

Τελεστής ολίσθησης γραφήματος G $\text{Tr}_G : C^N \rightarrow C^N$

Ο γραμμικός τελεστής Tr_G περιγράφεται, ως προς τη βάση $\{ P_K \}$ του διανυσματικού χώρου $(C^N, +, -, \mathbf{0}, \bullet)$, από το μητρώο γειτνίασης του G .

Έστω $m_G(x) = x^n + \mu_{n-1} x^{n-1} + \dots \mu_1 x + \mu_0$, $n \leq N$, το ελάχιστο πολυώνυμο του τελεστή Tr_G .

Έστω $h(x) = \sum_{0 \leq j \leq n-1} h_j x^j$ ένα στοιχείο του *αντιμεταθετικού δακτύλιου*
 $(C[x] / m_G(x), + \text{ mod } m_G(x), - \text{ mod } m_G(x), \mathbf{0}, \circ \text{ mod } m_G(x), \mathbf{1})$.

Ορισμός: το $h(x)$ περιγράφει ένα *φίλτρο γραφήματος* $H : C^N \rightarrow C^N$,
όπου $H = h(\text{Tr}_G) = \sum_{0 \leq j \leq n-1} h_j \bullet \text{Tr}_G^j$

Η ακολουθία h_j , $0 \leq j \leq n-1$, είναι οι *συντελεστές* του φίλτρου H .

Graph Fourier Transform Case 1 :

Ο γραμμικός τελεστής $\text{Tr}_G : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ έχει N διαφορετικές ιδιοτιμές.

Σημείωση Θα υπάρχουν N γραμμικά ανεξάρτητα ιδιο-διανύσματα του Tr_G . Κάθε ένα θα αντιστοιχεί σε μία από τις ιδιοτιμές του Tr_G .

Έστω ρ_m , $1 \leq m \leq N$ οι ιδιοτιμές του Tr_G , $\rho_j \neq \rho_k$ για $j \neq k$.

Έστω $m_G(x)$ το ελάχιστο πολυώνυμο του τελεστή Tr_G :

$$m_G(x) = \prod_{1 \leq m \leq N} (x - \rho_m).$$

Εξετάζουμε την εφαρμογή του Chinese Remainder Theorem

για τα πολυώνυμα $d_K(x) = x - \rho_K$, $0 \leq K \leq N-1$.

Κατασκευάζονται τα πολυώνυμα

$$f_K(x) = \prod_{0 \leq j \leq N-1, j \neq K} (\rho_K - \rho_j)^{-1} (x - \rho_j), \text{ για τα οποία}$$

$$\sum_{0 \leq K \leq N-1} f_K(x) = 1 \pmod{m_G(x)},$$

$$(x - \rho_K) \circ f_K(x) = 0 \pmod{m_G(x)}.$$

Επειδή $m_G(\text{Tr}_G) = \mathbf{0}$, θα έχουμε

$$\sum_{0 \leq K \leq N-1} f_K(\text{Tr}_G) = \mathbf{1}$$

$$(\text{Tr}_G - \rho_K \mathbf{1}) \circ f_K(\text{Tr}_G) = \mathbf{0}, \quad 0 \leq K \leq N-1.$$

Επομένως για κάθε σήμα $s : Z_N \rightarrow \mathbb{C}$ θα έχουμε

$$\sum_{0 \leq K \leq N-1} f_K(\text{Tr}_G)(s) = s \quad \text{Inverse Graph Fourier Transform}$$

$$(\text{Tr}_G - \rho_K \mathbf{1})(f_K(\text{Tr}_G)(s)) = \mathbf{0}, \quad 0 \leq K \leq N-1.$$

Βλέπουμε ότι: οι συνιστώσες Φουριέ του s ,

$$f_K(\text{Tr}_G)(s), \quad 0 \leq K \leq N-1,$$

είναι ιδιο-διανύσματα του τελεστή Tr_G (βλέπε και την Σημείωση).

Γραμμική ανεξαρτησία

Τα πολυώνυμα $f_K(x)$, $0 \leq K \leq N-1$, είναι γραμμικά ανεξαρτητα.

Οι τελεστές $f_K(\text{Tr}_G)$, $0 \leq K \leq N-1$, είναι γραμμικά ανεξάρτητοι.

Τα σήματα $f_K(\text{Tr}_G)(s)$, $0 \leq K \leq N-1$, όπου $f_K(\text{Tr}_G)(s) \neq 0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Τα παραπάνω αποδεικνύονται από τις ιδιότητες:

$$f_j(x) \circ f_K(x) = 0 \pmod{m_G(x)} \quad \text{για κάθε } j \neq K, \quad .$$

$$f_K(x) \circ f_K(x) = f_K(x) \pmod{m_G(x)} .$$

Graph Fourier Transform Case 2 :

Ο γραμμικός τελεστής $\text{Tr}_G : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ έχει Λ διαφορετικές ιδιοτιμές ($\Lambda < N$), και υπάρχουν Λ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιο-διανύσματα, που κάθε ένα αντιστοιχεί σε μία από τις ιδιοτιμές του Tr_G .

Έστω ρ_m , $1 \leq m \leq \Lambda$ οι ιδιοτιμές του Tr_G , $\rho_j \neq \rho_K$ για $j \neq K$.

Έστω $m_G(x)$ το ελάχιστο πολυώνυμο του τελεστή Tr_G :

$$m_G(x) = \prod_{1 \leq m \leq \Lambda} (x - \rho_m)^{p(m)}, \quad p(m) \text{ η αλγεβρική πολλαπλότητα της } \rho_m,$$

$$\text{και} \quad \sum_{1 \leq m \leq \Lambda} p(m) = N.$$

Εξετάζουμε την εφαρμογή του Chinese Remainder Theorem για τα πολυώνυμα $d_K(x) = (x - \rho_K)^{p(K)}$, $0 \leq K \leq \Lambda - 1$. Κατασκευάζονται τα πολυώνυμα

$g_K(x)$, για τα οποία

$$\sum_{0 \leq j \leq \Lambda - 1} g_j(x) = 1 \pmod{m_G(x)},$$

$$(x - \rho_K)^{p(K)} \circ g_K(x) = 0 \pmod{m_G(x)}.$$

Επειδή $m_G(\text{Tr}_G) = \mathbf{0}$ θα έχουμε:

$$\sum_{0 \leq j \leq \Lambda - 1} g_j(\text{Tr}_G) = \mathbf{1}$$

$$(\text{Tr}_G - \rho_K \mathbf{1})^{p(K)} \circ g_K(\text{Tr}_G) = \mathbf{0} \quad \text{για } 0 \leq K \leq \Lambda - 1.$$

Επομένως, για κάθε σήμα $s : Z_N \rightarrow \mathbb{C}$ θα έχουμε

$$\sum_{0 \leq j \leq \Lambda - 1} g_j(\text{Tr}_G)(s) = s \quad \text{Inverse Graph Fourier Transform}$$

$$(\text{Tr}_G - \rho_K \mathbf{1})^{p(K)} \circ (g_K(\text{Tr}_G)(s)) = \mathbf{0}, \quad 0 \leq K \leq \Lambda - 1.$$

Οι συνιστώσες Φουριέ $\{ (\text{Tr}_G - \rho_K \mathbf{1})^m \circ g_K(\text{Tr}_G)(s) \}$, $0 \leq m \leq p(K) - 1$,
 $0 \leq K \leq \Lambda - 1$,

είναι γενικευμένα ιδιο-διανύσματα του τελεστή Tr_G .

Γραμμική ανεξαρτησία

Τα πολυώνυμα $g_K(x)$, $0 \leq K \leq \Lambda-1$, είναι γραμμικά ανεξαρτητα.

Οι τελεστές $g_K(\text{Tr}_G)$, $0 \leq K \leq \Lambda-1$, είναι γραμμικά ανεξάρτητοι.

Τα σήματα $(\text{Tr}_G - \rho_K \mathbf{1})^m \circ g_K(\text{Tr}_G)(s)$, $0 \leq m \leq p(K)-1$, $0 \leq K \leq \Lambda-1$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Τα παραπάνω αποδεικνύονται από τις ιδιότητες:

$$g_j(x) \circ g_K(x) = 0 \bmod m_G(x) \quad \text{για κάθε } j \neq K, \quad .$$

$$g_K(x) \circ g_K(x) = g_K(x) \bmod m_G(x) .$$