

Έστω $\Pi(s)(x) = s(0) + s(1)x + \dots + s(N-1)x^{N-1}$ το πολυώνυμο που περιγράφει ένα σήμα $s : Z_N \rightarrow C$.

Ορισμός : Έστω h ένα στοιχείο του *αντιμεταθετικού δακτύλιου*

$$(C[x] / \langle x^N - 1 \rangle, + \bmod x^N - 1, - \bmod x^N - 1, \mathbf{0}, \circ \bmod x^N - 1, \mathbf{1}).$$

Το h περιγράφει το γραμμικό φίλτρο $\varphi(h) : C^N \rightarrow C^N$,

$$\text{όπου } \Pi(\varphi(h)(s)) = \Pi(s) \circ h \bmod x^N - 1.$$

Έστω ζ^K , $0 \leq K \leq N-1$, οι N -στές ρίζες του 1 (ρίζες του πολυωνύμου $x^N - 1$): έχουμε $x^N - 1 = \prod_{0 \leq K \leq N-1} x - \zeta^K$.

Ορισμός : Οι συντελεστές Φουριέ του σήματος $s : Z_N \rightarrow C$, είναι οι τιμές

$$S_M = \sum_{0 \leq K \leq N-1} s(K) (\zeta^M)^K, \quad 0 \leq M \leq N-1.$$

Άσκηση 1 Έστω ένα σήμα $s : Z_N \rightarrow C$. Ελέγξτε ότι, για $0 \leq M \leq N-1$:

α $\Pi(s)(\zeta^M) = S_M$ και $\Pi(s)(x) \bmod x - \zeta^M = S_M$.

β Αν $P(x) \bmod x - \zeta^M = S_M$ για $0 \leq M \leq N-1$,
θα είναι $P(x) = \Pi(s)(x) \bmod x^N - 1$.

Απάντηση για το (β) :

Εφαρμόζουμε την Ιδιότητα πολυωνύμων πρώτων μεταξύ τους ανά δύο, στα πολυώνυμα $P(x)$, $\Pi(s)(x)$.

Αντίστροφος μετασχηματισμός Φουριέ μέσω πολωνύμων

Στην εφαρμογή του Chinese Remainder Theorem για τα πολυώνυμα $d_K(x) = x - \zeta^K$, και τις σταθερές $u_K = S_K$, $0 \leq K \leq N-1$, κατασκευάζονται τα πολυώνυμα

$$f_K(x) = \prod_{0 \leq j \leq N-1, j \neq K} (\zeta^K - \zeta^j)^{-1} (x - \zeta^j), \quad 0 \leq K \leq N-1.$$

$$\text{και έχουμε } f_K(x) = 1 \pmod{x - \zeta^K}$$

$$f_K(x) = 0 \pmod{x - \zeta^j}, \text{ για κάθε } j \neq K.$$

$$\text{Θέτουμε } \Sigma(x) = \sum_{0 \leq K \leq N-1} S_K f_K(x).$$

$$\text{Θα είναι } \Sigma(x) = S_M \pmod{x - \zeta^M} \text{ για } 0 \leq M \leq N-1.$$

Από την Άσκηση 1 :

$$\Pi(s)(x) = S_M \pmod{x - \zeta^M}, \quad 0 \leq M \leq N-1.$$

$$\text{Άρα } \Sigma(x) = \Pi(s)(x).$$

Άσκηση 2 Ελέγξτε ότι, για $0 \leq K \leq N-1$:

$$\alpha \quad f_K(\zeta^{K+M}) = 0, \quad 1 \leq M \leq N-1.$$

$$\beta \quad f_K(x) = \Pi(1/N E_K) = 1/N \sum_{0 \leq j \leq N-1} (\zeta^{-K})^j x^j.$$

Απάντηση για το (β) : Αρκεί να ελεγχθεί ότι

$$f_K(\zeta^K) = \Pi(1/N E_K)(\zeta^K) = 1,$$

$$f_K(\zeta^\Lambda) = \Pi(1/N E_K)(\zeta^\Lambda) = 0, \text{ για κάθε } \Lambda \neq K.$$

Από την Άσκηση 2 και το Θεώρημα 2 Ε για το Discrete Fourier classic:

Τα πολυώνυμα $S_K f_K(x)$, $0 \leq K \leq N-1$, περιγράφουν τα σήματα $S_K \bullet (1/N E_K)$, που είναι οι συνιστώσες Φουριέ του σήματος s .

Σημείωση 1

Από τις ιδιότητες των πολωνύμων $f_K(x)$, $0 \leq K \leq N-1$:

$$f_j(x) \circ f_K(x) = 0 \pmod{x^N-1} \text{ για κάθε } j \neq K ,$$

$$f_K(x) \circ f_K(x) = f_K(x) \pmod{x^N-1} .$$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως } \Sigma(x) \circ f_K(x) &= \left(\sum_{0 \leq j \leq N-1} S_j f_j(x) \right) \circ f_K(x) \\ &= S_K f_K(x) \pmod{x^N-1} = S_K f_K(x) , \end{aligned}$$

$$\text{και } \Pi(s)(x) \circ f_K(x) = S_K f_K(x) .$$

Από την Σημείωση 1: οι συνιστώσες Fourier του σήματος s μπορούν να υπολογιστούν με γινόμενο πολωνύμων.

Εφαρμογή πολωνύμου $\Pi(x)$ σε τελεστή $W : C^N \rightarrow C^N$

$$\text{Έστω } \Pi(x) = \mu_n x^n + \mu_{n-1} x^{n-1} + \dots \mu_1 x + \mu_0 .$$

$$\text{Ορίζουμε: } \Pi(W) = \mu_n \bullet W^n + \mu_{n-1} \bullet W^{n-1} + \dots \mu_1 \bullet W + \mu_0 \bullet \mathbf{1} .$$

Σημείωση 2

Από τις ιδιότητες των πολωνύμων $f_K(x)$, $0 \leq K \leq N-1$:

$$\sum_{0 \leq K \leq N-1} f_K(x) = 1 \pmod{x^N-1} ,$$

$$(x - \zeta^K) \circ f_K(x) = 0 \pmod{x^N-1} .$$

Επειδή $\text{Tr}_1^N - \mathbf{1} = \mathbf{0}$, θα έχουμε

$$\sum_{0 \leq K \leq N-1} f_K(\text{Tr}_1) = \mathbf{1}$$

$$(\text{Tr}_1 - \zeta^K \mathbf{1}) \circ f_K(\text{Tr}_1) = \mathbf{0} , \quad 0 \leq K \leq N-1 .$$

Μετασχηματισμός Φουριέ μέσω πολωνύμων του τελεστή Tr_1

Για κάθε σήμα $s : Z_N \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\text{Επειδή } (\text{Tr}_1 - \zeta^K \mathbf{1}) (f_K(\text{Tr}_1)(s)) = \mathbf{0}, \quad 0 \leq K \leq N-1,$$

τα σήματα $f_K(\text{Tr}_1)(s)$ είναι ιδιο-διανύσματα του Tr_1 ,
με αντίστοιχες ιδιοτιμές ζ^K , $0 \leq K \leq N-1$.

Αντίστροφος μετασχηματισμός Φουριέ

$$\sum_{0 \leq K \leq N-1} f_K(\text{Tr}_1)(s) = s$$

Τα σήματα $f_K(\text{Tr}_1)(s)$, $0 \leq K \leq N-1$, είναι οι **συνιστώσες Φουριέ** του s .

Άσκηση 3

Έστω A ένα γραμμικό φίλτρο αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις
και $A(P_0)$ η κρουστική απόκριση του A : $A(P_0)(j) = h_j$, $0 \leq j \leq N-1$.

Έχουμε $\Pi(A(P_0))(x) = h_{n-1} x^{n-1} + \dots h_1 x + h_0$.

Ελέγξτε ότι: $\Pi(A(P_0))(\text{Tr}_1)(s) = s * A(P_0)$.

Άσκηση 4

α Βρείτε την κρουστική απόκριση του τελεστή $f_K(\text{Tr}_1)$.

β Αποδείξτε ότι: $f_K(\text{Tr}_1)(s) = s * (1/N E_K)$
 $= \mathbf{s}_K \bullet (1/N E_K)$.

Σημείωση 3

Έστω A ένα φίλτρο γραμμικό και αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις.

Έστω $A(P_0)$ η κρουστική απόκριση του A , και $A(P_0)(j) = h_j$, $0 \leq j \leq N-1$.

Έστω h_M , $0 \leq M \leq N-1$, οι συντελεστές Φουριέ του σήματος $A(P_0)$.

Θέτουμε $H(x) = \sum_{0 \leq k \leq N-1} h_k f_k(x)$.

Από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Φουριέ μέσω πολωνύμων,

$$H(x) = h_0 + h_1 x + \dots + h_{N-1} x^{N-1} :$$

επομένως $A = \varphi(H)$.

Για κάθε σήμα s θα έχουμε

$$\begin{aligned} \Pi(A(s)) &= (H \circ \Pi(s)) \bmod x^N - 1 \\ &= \left(\sum_{0 \leq k \leq N-1} h_k f_k(x) \right) \circ \Pi(s)(x) \bmod x^N - 1 \\ &= \sum_{0 \leq k \leq N-1} h_k (f_k(x) \circ \Pi(s)(x)) \bmod x^N - 1 \\ &= \sum_{0 \leq k \leq N-1} h_k S_k f_k(x) \quad \text{από την Σημείωση 1.} \end{aligned}$$