

Ανάλυση γραμμικού τελεστή αναλλοίωτου ως προς κυκλικές ολισθήσεις

Τα σήματα P_K , $0 \leq K \leq N-1$, όπου: $P_K(K) = 1$, $P_K(j) = 0$ όταν $j \neq K$ αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου $(C^N, +, -, \cdot)$.

Έστω σήμα s και γραμμικός τελεστής A αναλλοίωτος ως προς κυκλικές ολισθήσεις:

$$\begin{aligned} A(s) &= \sum_{0 \leq K \leq N-1} s(K) \cdot A(P_K) \\ &= \sum_{0 \leq K \leq N-1} s(K) \cdot \text{Tr}_K(A(P_0)) \end{aligned}$$

Το σήμα $A(P_0)$ λέγεται κρουστική απόκριση του φίλτρου A .

Κυκλική συνέλιξη των σημάτων s, h λέγεται το σήμα $s * h$, όπου :

$$(s * h)(j) = \sum_{0 \leq K \leq N-1} s(K) h(j-K \bmod N), \quad 0 \leq j \leq N-1.$$

Άσκηση 1 Ελέγξτε ότι:

$$\alpha \quad g * h = h * g \quad (f * h) * g = f * (h * g)$$

$$\beta \quad P_K * s = \text{Tr}_K(s), \quad 0 \leq K \leq N-1$$

$$\gamma \quad (s_1 + s_2) * h = (s_1 * h) + (s_2 * h)$$

$$(\alpha \cdot s) * h = \alpha \cdot (s * h), \quad \alpha \in C$$

Άσκηση 2 Ελέγξτε ότι, αν οι τελεστές A, B είναι γραμμικοί και αναλλοίωτοι ως προς κυκλικές ολισθήσεις:

$$A(s) = s * A(P_0)$$

$$(B \circ A)(s) = s * A(P_0) * B(P_0) \quad (B \circ A)(P_0) = A(P_0) * B(P_0)$$

$$B \circ A = A \circ B$$

Άσκηση 3 Ελέγξτε ότι: για κάθε σήμα h , ο τελεστής $A(s) = s * h$ είναι γραμμικός.

Μετασχηματισμός Φουριέ διακριτού χρόνου

N -στές ρίζες του 1 (ρίζες του πολυωνύμου $x^N - 1$) :

$$\zeta^M, \quad \zeta = e^{-2\pi i / N}, \quad 0 \leq M \leq N-1$$

Εκθετικές συναρτήσεις διακριτού χρόνου E_M , $0 \leq M \leq N-1$:

$$E_M(j) = (\zeta^M)^j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

Συντελεστές Φουριέ

Έστω $s(K)$, $0 \leq K \leq N-1$, οι τιμές ενός σήματος s :

Οι συντελεστές Φουριέ του s , είναι οι τιμές

$$S_M = \sum_{0 \leq K \leq N-1} s(K) (\zeta^M)^K, \quad 0 \leq M \leq N-1.$$

Θεώρημα 1

Οι εκθετικές συναρτήσεις E_M , $0 \leq M \leq N-1$:

A Είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

B Είναι *ιδιο-διανύσματα* κάθε γραμμικού τελεστή A που είναι αναλλοίωτος ως προς κυκλικές ολισθήσεις.

Οι ιδιοτιμές του A που αντιστοιχούν στα ιδιο-διανύσματα E_M , είναι οι συντελεστές Φουριέ της κρουστικής απόκρισης του A .

Γ Για κάθε σήμα h : $\mathbf{h}_M \bullet E_M = h * E_M$,
όπου $\mathbf{h}_M$ οι συντελεστές Φουριέ του h , $0 \leq M \leq N-1$.

Θεώρημα 2 Αντίστροφος μετασχηματισμός Φουριέ

Δ $1/N \sum_{0 \leq M \leq N-1} E_M = \mathbf{1}$, όπου $\mathbf{1}(0) = 1$, $\mathbf{1}(j) = 0$, $0 < j \leq N-1$

E Για κάθε σήμα h : $h = \sum_{0 \leq M \leq N-1} \mathbf{h}_M \bullet (1/N E_M)$
 $h = \sum_{0 \leq M \leq N-1} h * (1/N E_M)$

Τα σήματα $\mathbf{h}_M \bullet (1/N E_M) = h * (1/N E_M)$ είναι οι *συνιστώσες Φουριέ* του h :
αποτελούν ανάλυση του h σε στοιχεία των *υπο-χώρων* διάστασης 1 που δημιουργούν οι εκθετικές συναρτήσεις E_M , $0 \leq M \leq N-1$.

Απόδειξη του B

$$\begin{aligned}\text{Tr}_K(E_M)(j) &= (\zeta^{-M})^{(j-K \bmod N)} = (\zeta^{-M})^{(j \bmod N)} (\zeta^{-M})^{(-K \bmod N)} \\ &= (\zeta^{-M})^j (\zeta^{-M})^{-K} = \zeta^{MK} (\zeta^{-M})^j, \quad \text{άρα} \quad \text{Tr}_K(E_M) = \zeta^{MK} \cdot E_M.\end{aligned}$$

$$\text{Από την ισότητα} \quad A = \sum_{0 \leq K \leq N-1} h_K \cdot (\text{Tr}_1)^K,$$

όπου h_K , $0 \leq K \leq N-1$ είναι οι τιμές της κρουστικής απόκρισης h του A :

$$\begin{aligned}A(E_M) &= \sum_{0 \leq K \leq N-1} h_K \cdot \text{Tr}_K(E_M) = \sum_{0 \leq K \leq N-1} (h_K \zeta^{MK}) \cdot E_M \\ &= \left(\sum_{0 \leq K \leq N-1} h_K \zeta^{MK} \right) \cdot E_M\end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο ιδιο-διάνυσμα E_M

είναι $\sum_{0 \leq K \leq N-1} h_K \zeta^{MK}$, που είναι ο συντελεστής Φουριέ $\mathbf{h}_M$ του σήματος h , $0 \leq M \leq N-1$.

Απόδειξη του Γ

Έστω A ένας γραμμικός τελεστής, αναλλοίωτος ως προς κυκλικές ολισθήσεις, με κρουστική απόκριση h .

$$\text{Από την Απόδειξη του B:} \quad A(E_M) = \mathbf{h}_M \cdot E_M$$

$$\text{Από την Άσκηση 2:} \quad A(E_M) = h * E_M$$

Άσκηση 4

α Ελέγξτε ότι οι N -στές ρίζες του 1 είναι ιδιοτιμές του τελεστή κυκλικής ολίσθησης, Tr_1 .

Βρείτε τις ιδιοτιμές των τελεστών Tr_K , $0 \leq K \leq N-1$.

β Αποδείξτε το E.