

Ο τελεστής $A : C^N \rightarrow C^N$ είναι αναλλοίωτος ως προς κυκλικές ολισθήσεις όταν ισχύουν οι ισότητες

$$A(\text{Tr}_K(s)) = \text{Tr}_K(A(s)), \quad 0 \leq K \leq N-1.$$

Ο τελεστής A είναι αναλλοίωτος ως προς κυκλικές ολισθήσεις *άν και μόνο αν* ο A είναι αναλλοίωτος ως προς την Tr_1 : $A(\text{Tr}_1(s)) = \text{Tr}_1(A(s))$.

Άσκηση 0 Ελέγξτε ότι ισχύει η παραπάνω ιδιότητα.

Ανάλυση γραμμικού τελεστή αναλλοίωτου ως προς κυκλικές ολισθήσεις

Τα σήματα P_K , $0 \leq K \leq N-1$, όπου: $P_K(K) = 1$, $P_K(j) = 0$ όταν $j \neq K$ αποτελούν *βάση* του διανυσματικού χώρου $(C^N, +, -, 0, \cdot)$.

Έστω σήμα $s : Z_N \rightarrow C$:

$$s = \sum_{0 \leq K \leq N-1} s(K) \cdot P_K.$$

$$A(s) = \sum_{0 \leq K \leq N-1} s(K) \cdot A(P_K), \quad \text{επειδή } A \text{ γραμμικός.}$$

Επειδή A αναλλοίωτος ως προς κυκλικές ολισθήσεις,

και $P_K = \text{Tr}_K(P_0)$:

$$A(P_K) = \text{Tr}_K(A(P_0)),$$

$$A(s) = \sum_{0 \leq K \leq N-1} s(K) \cdot \text{Tr}_K(A(P_0))$$

Το σήμα $A(P_0)$ λέγεται κρουστική απόκριση του φίλτρου A .

Μητρώο γραμμικού τελεστή αναλλοίωτου ως προς κυκλικές ολισθήσεις

Έστω A ένα γραμμικό φίλτρο αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις, $A(P_0)$ η κρουστική απόκριση του A : $A(P_0)(j) = h_j$, $0 \leq j \leq N-1$.

Υπολογίζουμε το μητρώο $\mu(A) = (w_0, w_1, \dots, w_{N-1})$ ως προς τη βάση $\{P_K\}$:

$$\begin{aligned} w_K &= u(A(P_K)) = u(A(\text{Tr}_K(P_0))) \\ &= u(\text{Tr}_K(A(P_0))), \quad 0 \leq K \leq N-1. \end{aligned}$$

Από τον ορισμό του τελεστή Tr_K

$$\begin{aligned} \text{Tr}_K(A(P_0))(j) &= A(P_0)(j-K \bmod N) \\ &= h_{-K+j \bmod N}, \quad 0 \leq j \leq N-1. \end{aligned}$$

Άρα

$$w_K = (h_{-K \bmod N}, h_{-K+1 \bmod N}, \dots, h_{-K+N-1 \bmod N})^{\text{Transpose}}$$

Άσκηση 1 Ελέγξτε ότι η στήλη $w_{K+\Lambda}$ του παραπάνω μητρώου, $\Lambda \geq 0$, προκύπτει από τη στήλη w_K με *κυκλική ολίσθηση κατά Λ θέσεις*.

Σημείωση Ένα μητρώο $(w_0, w_1, \dots, w_{N-1})$ διαστάσεων $N \times N$, όπου η στήλη w_j προκύπτει από τη στήλη w_0 με κυκλική ολίσθηση κατά j θέσεις, ονομάζεται *κυκλικό* (circulant).

Άσκηση 2 Έστω A ένα γραμμικό φίλτρο αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις, $A(P_0)$ η κρουστική απόκριση του A : $A(P_0)(j) = h_j$, $0 \leq j \leq N-1$.

α Βρείτε το μητρώο $\mu(A)$ ως προς τη βάση $\{P_K\}$, για $N=4$.

Απάντηση

$$\begin{array}{cccc} h_0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{array}$$

β Βρείτε το μητρώο $\mu(A)$ ως προς τη βάση $\{P_K\}$, για γενικό N .

Άσκηση 3 Έστω $M = (w_0, w_1, \dots, w_{N-1})$ ένα μητρώο διαστάσεων $N \times N$, όπου η στήλη w_j προκύπτει από τη στήλη w_0 με κυκλική ολίσθηση κατά j θέσεις. Έστω A το γραμμικό φίλτρο που περιγράφεται από το M , ως προς τη βάση $\{P_K\}$.

1 Ελέγξτε ότι: $A(P_K) = \text{Tr}_K(A(P_0))$, $0 \leq K \leq N-1$.

2 Αποδείξτε ότι: Το φίλτρο A είναι αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις.

Απόδειξη Υπολογίζουμε τα μητρώα που εκφράζουν τους μετασχηματισμούς

$\text{Tr}_1 \circ A$ και $A \circ \text{Tr}_1$, ως προς τη βάση $\{P_K\}$:

$$\mu(\text{Tr}_1 \circ A) = \mu(\text{Tr}_1) M,$$

$$\mu(A \circ \text{Tr}_1) = M \mu(\text{Tr}_1).$$

Ο υπολογισμός δείχνει ότι $\mu(\text{Tr}_1) M = M \mu(\text{Tr}_1)$, άρα $\text{Tr}_1 \circ A = A \circ \text{Tr}_1$.

Από τις Ασκήσεις 1, 3 έχουμε το

Θεώρημα 1

Ένα γραμμικό φίλτρο A είναι αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις, *άν και μόνο αν* το μητρώο $\mu(A)$ ως προς τη βάση $\{P_K\}$ είναι κυκλικό.

Πολυώνυμο γραμμικού τελεστή αναλλοίωτου ως προς κυκλικές ολισθήσεις

Έστω A ένα γραμμικό φίλτρο αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις,

$A(P_0)$ η κρουστική απόκριση του A : $A(P_0)(j) = h_j$, $0 \leq j \leq N-1$.

Από την Άσκηση 2, εξετάζοντας τα μητρώα των τελεστών Tr_K , $0 \leq K \leq N-1$, μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{aligned}\mu(A) &= h_0 \mu(Tr_0) + h_1 \mu(Tr_1) + \dots + h_{N-1} \mu(Tr_{N-1}) \\ &= \mu(h_0 Tr_0 + h_1 Tr_1 + \dots + h_{N-1} Tr_{N-1})\end{aligned}$$

Επομένως $A = h_0 \cdot Tr_0 + h_1 \cdot Tr_1 + \dots + h_{N-1} \cdot Tr_{N-1}$

και το φίλτρο A γράφεται ως *πολυώνυμο της κυκλικής ολίσθησης*:

$$A = \sum_{0 \leq K \leq N-1} h_K \cdot (Tr_1)^K$$

$$\begin{aligned}\text{όπου} \quad (Tr_1)^K &= Tr_1 \circ \dots \circ Tr_1, \quad K \text{ φορές} = Tr_K \\ (Tr_1)^0 &= \mathbf{1}\end{aligned}$$

Άσκηση 4 Αποδείξτε ότι: Αν ένα γραμμικό φίλτρο είναι πολυώνυμο της κυκλικής ολίσθησης, θα είναι αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις.

Από τα παραπάνω και την Άσκηση 4, έχουμε το

Θεώρημα 2

Ένα γραμμικό φίλτρο A είναι αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις, *άν και μόνο αν* το A είναι πολυώνυμο της κυκλικής ολίσθησης.

Άσκηση 5 Αποδείξτε ότι, αν τα A_1, A_2 είναι γραμμικά φίλτρα αναλλοίωτα ως προς κυκλικές ολισθήσεις: $A_1 \circ A_2 = A_2 \circ A_1$.

Άσκηση 6

Βρείτε μια βάση για τον διανυσματικό χώρο των γραμμικών φίλτρων που είναι αναλλοίωτα ως προς κυκλικές ολισθήσεις. Ποιά είναι η διάσταση αυτού του χώρου;