

Σήματα και φίλτρα διακριτού χρόνου

Χρονικές στιγμές

$$Z_N = \{ 0, 1, \dots, N-1 \}$$

Σήμα διακριτού χρόνου s

$$\text{Συνάρτηση } s: Z_N \rightarrow \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}^N$: το σύνολο των σημάτων (συναρτήσεων από το Z_N στο $\mathbb{C}$)

Πράξεις μεταξύ σημάτων

$$s_1 + s_2 = s, \quad \text{όπου} \quad s(j) = s_1(j) + s_2(j)$$

$$-s, \quad \text{όπου} \quad (-s)(j) = -s(j)$$

$$\alpha \cdot s_1 = s, \quad \text{όπου} \quad s(j) = \alpha s_1(j), \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

Μηδενικό σήμα

$$\mathbf{0}, \quad \text{όπου} \quad \mathbf{0}(K) = 0, \quad 0 \leq K \leq N-1$$

Άσκηση 1

α Αποδείξτε ότι τα σήματα P_K , $0 \leq K \leq N-1$, όπου:

$$P_K(K) = 1, \quad P_K(j) = 0 \quad \text{όταν } j \neq K$$

αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου $(\mathbb{C}^N, +, -, \mathbf{0}, \cdot)$.

β Επιβεβαιώστε ότι ο διανυσματικός χώρος $(\mathbb{C}^N, +, -, \mathbf{0}, \cdot)$ έχει διάσταση N .

Φίλτρο A

Τελεστής $A: C^N \rightarrow C^N$

Πράξεις μεταξύ τελεστών

$A1 + A2$ συνδεσμολογία εν παραλλήλω

$-A$

$A1 \circ A2$ $(A1 \circ A2)(s) = A1(A2(s))$
συνδεσμολογία εν σειρά (σύνθεση)

$\alpha \bullet A, \quad \alpha \in C$ ενίσχυση

Οι πράξεις $+$, $-$, 0 , $\bullet$ μεταξύ τελεστών ορίζονται μέσω των αντίστοιχων πράξεων μεταξύ σημάτων: για κάθε σήμα $s: Z_N \rightarrow C$,

$$(A1 + A2)(s) = A1(s) + A2(s)$$

ΚΟΚ

Άσκηση 2

α Ελέγξτε ότι η αλγεβρική δομή των τελεστών, με τις πράξεις $+$, $-$, 0 , $\bullet$ και με βαθμωτά στο R είτε στο C , είναι διανυσματικός χώρος.

β Ποιά είναι η διάσταση αυτού του χώρου; Μπορείτε να βρείτε μία βάση του;

Άσκηση 3 Βρείτε δύο τελεστές A, B , ώστε $A \circ B \neq B \circ A$.

Ο τελεστής $A: C^N \rightarrow C^N$ είναι γραμμικός όταν ισχύουν οι ιδιότητες

$$A(s_1 + s_2) = A(s_1) + A(s_2)$$

$$A(-s) = -A(s)$$

$$A(0) = 0$$

$$A(\alpha \cdot s) = \alpha \cdot A(s), \quad \alpha \in C$$

Παραδείγματα γραμμικών τελεστών

Ο ταυτοτικός τελεστής 1 : $1(s) = s$

Ο τελεστής $\alpha 1$, $\alpha \in C$: $\alpha 1(s) = \alpha \cdot s$

Οι τελεστές κυκλικής ολίσθησης Tr_K , $0 \leq K \leq N-1$:

$$Tr_K(s)(j) = s(j-K) \quad \text{όταν } j \geq K$$

$$Tr_K(s)(j) = s(j-K+N) \quad \text{όταν } j < K$$

Άσκηση 4 Ελέγξτε ότι $Tr_K = Tr_1 \circ Tr_1 \dots \circ Tr_1$ (K φορές)

Ελέγξτε ότι $Tr_K(s)(j) = s(j-K \bmod N)$

$m \bmod N$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του ακέραιου m με τον ακέραιο $N > 0$.

$m \bmod N$ είναι ο μοναδικός ακέραιος u , $0 \leq u \leq N-1$, όπου $m = qN + u$.

Άσκηση 5 Επιβεβαιώστε ότι οι τελεστές στα παραπάνω παραδείγματα είναι γραμμικοί.

Άσκηση 6 Επιβεβαιώστε ότι:

α Όταν ο A είναι γραμμικός, $A \circ \alpha 1 = \alpha \cdot A$.

β Για κάθε τελεστή A , $\alpha 1 \circ A = \alpha \cdot A$.

γ Τα αποτελέσματα των πράξεων $+$, $-$ μεταξύ γραμμικών τελεστών είναι γραμμικοί τελεστές.

Άσκηση 7

Ελέγξτε ότι οι γραμμικοί τελεστές, με τις πράξεις $+$, $-$, $\cdot$, 0 και με βαθμωτά στο C , είναι διανυσματικός χώρος. Μπορείτε να βρείτε μία βάση αυτού του χώρου; Ποιά είναι η διάστασή του;

Περιγραφή σημάτων και φίλτρων μέσω συντεταγμένων

Ένα σήμα διακριτού χρόνου $s : Z_N \rightarrow C$ μπορεί να περιγραφεί, ως προς μία βάση $\{ B_K \}$ του διανυσματικού χώρου $(C^N, +, -, 0, \cdot)$, με μία στήλη $u(s) = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})^{\text{Transpose}}$, $u_K \in C$ για την οποία $s = \sum_{0 \leq K \leq N-1} u_K \cdot B_K$.

Οι τιμές $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$ υπολογίζονται επιλύοντας ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων.

Όταν $\{ B_K \} = \{ P_K \}$ θα έχουμε $u_K = s(K)$, $0 \leq K \leq N-1$.

Άσκηση 8 Αποδείξτε ότι: για κάθε σήμα s και κάθε βάση $\{ B_K \}$, υπάρχει ακριβώς μία αντίστοιχη στήλη $u(s)$.

Ένα γραμμικό φίλτρο $A : C^N \rightarrow C^N$ μπορεί να περιγραφεί, ως προς μία βάση $\{ B_K \}$ του διανυσματικού χώρου $(C^N, +, -, 0, \cdot)$, με ένα μητρώο $\mu(A)$ διαστάσεων $N \times N$.

Η στήλη που αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα του φίλτρου $A(s)$ είναι:

το γινόμενο του μητρώου $\mu(A)$ επί την στήλη που αντιστοιχεί στο s :

$$\begin{array}{ccc} \mu(A) & u(s) & = & u(A(s)) \\ N \times N & N \times 1 & & N \times 1 \end{array}$$

Το μητρώο $\mu(A) = (w_0 \ w_1 \ \dots \ w_{N-1})$ (όπου η στήλη w_K έχει διάσταση $N \times 1$) υπολογίζεται: θέτοντας ως w_K την στήλη που αντιστοιχεί στο σήμα $A(B_K)$.

Άσκηση 9 Επιβεβαιώστε ότι για $N = 4$, τα μητρώα $\mu(\text{Tr}_1)$ και $\mu(\text{Tr}_2)$ ως προς την βάση $\{P_K\}$ είναι :

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Άσκηση 10 Βρείτε το μητρώο $\mu(\text{Tr}_K)$ ως προς τη βάση $\{P_K\}$.

Άσκηση 11 Έστω $\text{reverse}_N : C^N \rightarrow C^N$ το φίλτρο που αντιστρέφει το σήμα εισόδου: $\text{reverse}_N(s)(j) = s(N-1-j)$, $0 \leq j \leq N-1$.

Βρείτε το μητρώο $\mu(\text{reverse}_N)$ ως προς τη βάση $\{P_K\}$.

Άσκηση 12 Επιβεβαιώστε ότι: αν τα A, B είναι γραμμικά φίλτρα,

$$\begin{aligned} \mu(A + B) &= \mu(A) + \mu(B) & \mu(\alpha \bullet A) &= \alpha A \\ \mu(A \circ B) &= \mu(A) \mu(B) . \end{aligned}$$

Άσκηση 13 Βρείτε μια βάση για τον διανυσματικό χώρο των γραμμικών φίλτρων. Ποιά είναι η διάσταση αυτού του χώρου;