

Η αλγεβρική δομή $(D, +, -, 0)$ είναι **αβελιανή ομάδα** όταν :

Ισχύουν οι ιδιότητες

$$(s_1 + s_2) + s = s_1 + (s_2 + s)$$

$$s + 0 = 0 + s = s$$

$$s + (-s) = (-s) + s = 0$$

$$s_1 + s_2 = s_2 + s_1$$

Παραδείγματα αβελιανών ομάδων

R, C, C^N, Z ως προς πρόσθεση

$R - \{0\}, C - \{0\}$ ως προς πολλαπλασιασμό

Τα πολυώνυμα με συντελεστές στο $R / C / Z$ ως προς πρόσθεση

Τα μονώνυμα $\{x^n \mid n \in Z\}$ ως προς πολλαπλασιασμό:

$$x^0 = 1, \quad x^n \circ x^m = x^{n+m}$$

Οι N -στές ρίζες του 1 (οι ρίζες του πολυωνύμου $x^N - 1$) :

$$\{1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{N-1}\}, \quad \zeta = e^{-2\pi i / N} \quad \text{ως προς πολλαπλασιασμό}$$

Η αλγεβρική δομή $(D, +, -, 0, \cdot)$, με βαθμωτά στο R είτε στο C , είναι **διανυσματικός χώρος** όταν :

1 $(M, +, -, 0)$ είναι αβελιανή ομάδα

2 Ισχύουν οι ιδιότητες

$$\alpha \cdot (s_1 + s_2) = (\alpha \cdot s_1) + (\alpha \cdot s_2)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot s = (\alpha_1 \cdot s) + (\alpha_2 \cdot s)$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot s) = (\alpha \beta) \cdot s$$

$$1 \cdot s = s$$

Παραδείγματα διανυσματικών χώρων

R, R^N, C, C^N

Η αλγεβρική δομή $(D, +, -, 0, \circ, 1)$

είναι **αντιμεταθετικός δακτύλιος** όταν :

1 Με τις πράξεις $+, -, 0$ είναι αβελιανή ομάδα

2 Ισχύουν οι ισότητες

$$(A1 \circ A2) \circ A = A1 \circ (A2 \circ A)$$

$$A \circ 1 = 1 \circ A = A$$

$$A \circ (A1 + A2) = (A \circ A1) + (A \circ A2)$$

$$(A1 + A2) \circ A = (A1 \circ A) + (A2 \circ A)$$

3 Ισχύει η ισότητα

$$A1 \circ A2 = A2 \circ A1$$

Παραδείγματα δακτυλίων

Οι γραμμικοί τελεστές, $A: C^N \rightarrow C^N$, με τις πράξεις $+, -, 0, \circ, 1$

Τα μητρώα διαστάσεων $N \times N$, με τις πράξεις $+, -, 0$, πολ/σμός, I_N

Παραδείγματα αντιμεταθετικών δακτυλίων

R, C, Z ως προς πρόσθεση και πολλαπλασιασμό

Τα πολυώνυμα με συντελεστές στο R είτε C είτε Z ,
ως προς πρόσθεση και πολλαπλασιασμό

Οι γραμμικοί τελεστές που είναι αναλλοίωτοι ως προς κυκλικές ολισθήσεις

Τα κυκλικά μητρώα διαστάσεων $N \times N$

Τα σήματα $s: Z \rightarrow C^N$, με τις πράξεις $+, -, 0$, *κυκλική συνέλιξη*, P_0