

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Σταύρος Κοσμάδης, Δημήτριος Κοσμόπουλος & Εμμανουήλ Ψαράκης

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Κάτω από ποιες προϋποθέσεις σε σχέση με την κατευθυντικότητα ενός γραφήματος εξασφαλίζεται η συμμετρικότητα του μητρώου γειτνίασης;
2. Σε ποιά διάστημα παίρνουν τιμές οι ιδιοτιμές:
 - του Συμμετρικού Μητρώου, $D^{-1/2}AD^{-1/2}$
 - του Μη Συμμετρικού Λαπλασιανού Μητρώου, $L_{NS}=I-D^{-1}A$;Δικαιολογήστε το προσωνύμιο “Τυχαίος Περίπατος”.

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

3. Αποδείξτε ότι οι ιδιοτιμές λ_m του Συμμετρικού Κανονικοποιημένου Λαπλασιανού Μητρώου, $L_S = I - D^{-1/2} A D^{-1/2}$ όπου A , D το μητρώο γειτνίασης και βαθμών του γραφήματος αντίστοιχα, παίρνουν τιμές στο διάστημα $[0, 2]$.

4. Αποδείξτε ότι σε αυτή την περίπτωση ο “DTGFT” της κρουστικής απόκρισης του συστήματος εκφράζεται με την ακόλουθη σχέση:

$$d(\lambda) \sim \sum_{m=0}^{M-1} \lambda^m h_m, m = 0, 1, 2, \dots, M - 1$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

5. Υποθέστε ότι θέλετε να κάνετε **Φασματική Αποθουροποίηση (Spectral Denoising-filtering)** χρησιμοποιώντας τις γνωστές, από το μάθημα της Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων, **τεχνικές σχεδίασης FIR φίλτρων**.

Προσδιορίστε **κατάλληλ-ο-λους μετασχηματισμ-ό-λους** που θα σας επιτρέψει να τις χρησιμοποιήσετε.

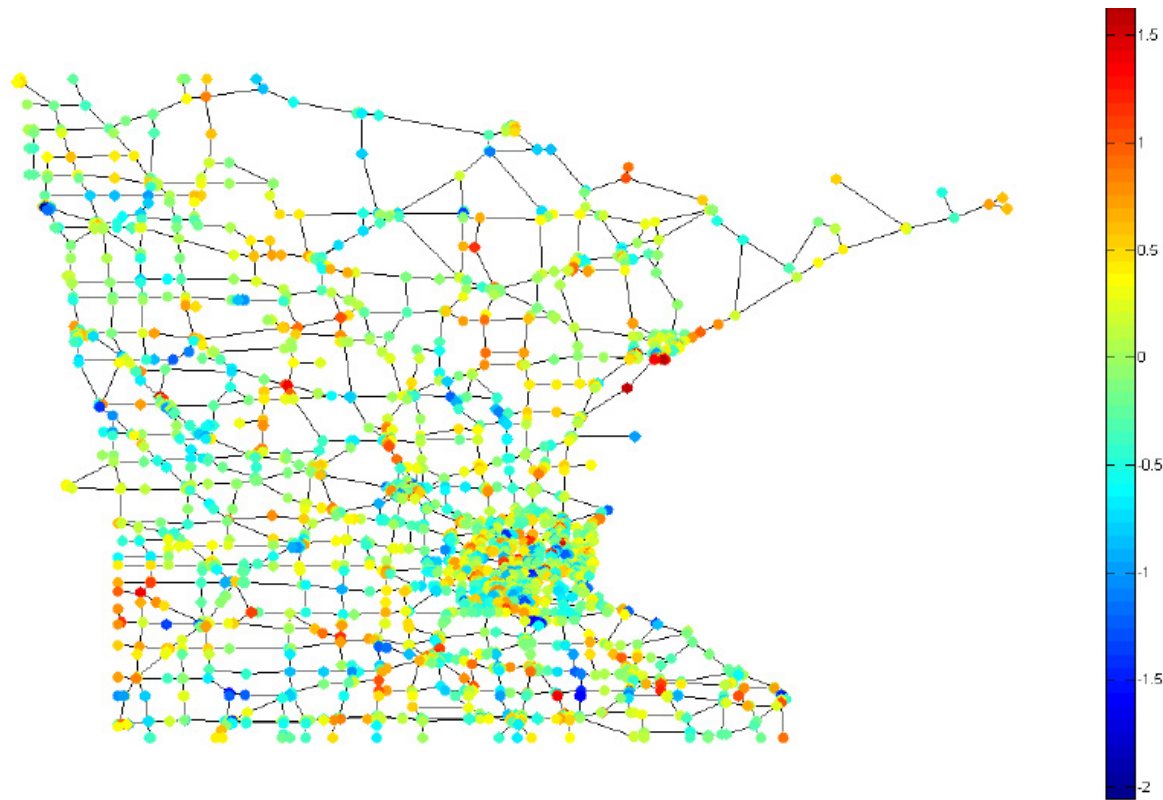
6. Για **τρεις (3) τουλάχιστον** από τις παραπάνω τεχνικές να ορίσετε:

(α): τη **συνάρτηση κόστους** και

(β): το **πρόβλημα βελτιστοποίησης** που θα πρέπει να λυθεί.

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

7. Το ιδανικό γράφημα που θα χρησιμοποιήσετε στα πειράματά σας είναι το γράφημα κυκλοφορίας της Μινεσότα που φαίνεται παρακάτω:



Υπάρχουν $N = 2642$ κόμβοι σε αυτό το γράφημα κυκλοφορίας.

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

8. Υποθέστε ότι διατίθεται το ακόλουθο **ενθόρυβο σήμα γραφήματος**:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{w}$$

όπου:

$$\mathbf{x} = [x(1) \quad x(2) \quad \dots \quad x(N - 1) \quad x(N)]^t$$

είναι το **σήμα πληροφορίας του γραφήματος** και:

$$\mathbf{w} = [w(1) \quad w(2) \quad \dots \quad w(N - 1) \quad w(N)]^t$$

ασυσχέτιστος προσθετικός **λευκός θόρυβος** τυπικής απόκλισης σ .

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Το πρόβλημα είναι πώς θα ανακτήσουμε το **αρχικό σήμα x** από το παρατηρούμενο **θορυβώδες σήμα y** .

9. Υπολογίστε το Συμμετρικό Κανονικοποιημένο Λαπλασιανό Μητρώο του γραφήματος και υπολογίστε τις **ιδιοτιμές** του.

10. Είναι το σήμα x ένα σήμα “**χαμηλής συχνότητας**”; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

11. Αν η απάντησή σας είναι θετική, για τη μείωση του θορύβου μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ένα **φίλτρο γραφήματος χαμηλής διέλευσης**.

Αποφασίστε **κατάλληλες συχνότητες**:

(α): διάβασης λ_p και

(β): αποκοπής λ_s .

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

12. Υποθέστε ότι ο προσθετικός λευκός θόρυβος w είναι ομοιόμορφα κατανομημένος στο διάστημα $[-\sigma, \sigma]$ και υπολογίστε το Signal to Noise Ratio (SNR):

$$10 \log \left(\frac{\|x\|_2^2}{\|w\|_2^2} \right)$$

για τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α): $\sigma = 0,125$,

(β): $\sigma = 0,25$,

(γ): $\sigma = 0,5$ και

(δ): $\sigma = 0,75$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

13. Για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις, καταγράψτε την απόδοση κάθε τεχνικής σχεδίασης για μήκη :

- $M=5$,
- $M=7$,
- $M=9$,
- $M=11$,
- $M=13$ και
- $M=15$

του φίλτρου.

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

14. Χρησιμοποιείτε για την αρχικοποίηση της τεχνικής σχεδίασης που βασίζεται στον αλγόριθμο του Remez την τεχνική [don't care](#).

Πόσο βελτιώνεται η ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου (σε αριθμό επαναλήψεων π.χ.) για μήκη :

- $M=5$,
- $M=7$,
- $M=9$,
- $M=11$,
- $M=13$ και
- $M=15$

του φίλτρου;

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

15. Ελαχιστοποιείστε την παρακάτω **συνάρτηση κόστους**:

$$C_{\mu}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2^2 + \mu\mathbf{x}^t L_S \mathbf{x}.$$

Αν:

$$\mathbf{x}_{\mu}^* = \arg \min_x C_{\mu}(\mathbf{x})$$

συγκρίνετε τα αποτελέσματα της τεχνικής αυτής με την $\min\max$ σε σχέση με την τιμή του μέγιστου σφάλματος που πετυχαίνει κάθε μία τεχνική, για κάθε M και για τις τιμές 0.1, 0.2, 0.5, 0.8 της υπερ-παραμέτρου μ .