

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ – ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΑΑΕΣ

5 Σεπτεμβρίου 2023

1γ/22-23

Στοιχεία Εξεταζόμενου/ης			
ΕΠΩΝΥΜΟ :		ΟΝΟΜΑ :	
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ :		ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ :	
ΑΙΘΟΥΣΑ :	ΑΦΕ	ΣΤΗΛΗ :	ΜΟΝΑΔΕΣ :

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

Στο διαγώνισμα υπάρχουν επτά (7) προβλήματα με ερωτήσεις

- του τύπου “Σωστό/Λάθος” και καλείσθε, μετά από ένα σύντομο έλεγχο να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
- με την ένδειξη ■ στα οποία πρέπει να δώσετε, δίχως αιτιολόγηση, την τελική απάντηση ή λύση, μετά από σχετική προεργασία στο πρόχειρο.
- με την ένδειξη □ στα οποία καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά “οικονομική απόδειξη-λύση” για το ζητούμενο στο χώρο που παρέχεται.

Σε όλες τις περιπτώσεις συστήνεται και σε κάποιες επιβάλλεται να “δουλέψετε” κάθε ερώτημα ή υποερώτημα στο πρόχειρο ώστε η απάντησή σας να μην είναι τυχαία. Ως πρόχειρο μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις λευκές σελίδες (άρτιες) του φυλλαδίου.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 15 λεπτά. Η παράδοση των γραπτών αρχίζει 60 λεπτά μετά από την έναρξη της εξέτασης.

Λύσεις και σχόλια

Καλή Επιτυχία!

Σε οποιοδήποτε πρόβλημα με τριγωνομετρικές συναρτήσεις ο τριγωνομετρικός κύκλος δίνει πολλές πληροφορίες και αναμφισβήτητα βοηθάει.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί κάποιων γωνιών					
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\sin x$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Θ1. (2.4 μονάδες) Δώστε την απάντηση.

(α) ■ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^n = e.$

$$\left(\frac{n+3}{n+2} \right)^n = \left(\frac{n+2}{n+2} + \frac{1}{n+2} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{k-2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{k} \right)^k}{\left(1 + \frac{1}{k} \right)^2} \rightarrow \frac{e}{1}.$$

(β) ■ Εάν $a \neq 0$ και $r \in \mathbb{R}$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (an^r)^2$ συγκλίνει αν και μόνο αν $r < -1/2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (an^r)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a^2 n^{2r} = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-2r}}$$

που είναι p -σειρά, δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, με $p = -2r$, άρα συγκλίνει αν $p > 1$, ισοδύναμα $-2r > 1$.

(γ) ■ $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = 0.$

Γράφοντας

$$x \log x = \frac{\log x}{1/x}$$

βλέπουμε ότι καθώς $x \rightarrow 0+$ ο αριθμητής και ο παρονομαστής, οι οποίοι είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις για $x > 0$, απειρίζονται, έτσι από τον κανόνα του l'Hospital παίρνουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = - \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0.$$

(δ) ■ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{1-x} = -1.$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{-(x-1)} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = -1.$$

(ε) ■ Το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} \frac{1+x^p}{x^q} dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $q > 1$ και $q > p+1$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1+x^p}{x^q} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^q} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^p}{x^q} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^q} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{q-p}} dx$$

(ς) ■ Αν z είναι μιγαδικός αριθμός και $|z-i| = |z+i|$, τότε $z = x \in \mathbb{R}$.

Οι αριθμοί που ικανοποιούν την εξίσωση $|z-i| = |z+i|$ ισαπέχουν από τους $\pm i$, βρίσκονται δηλαδή επί της μεσοκαθέτου του τμήματος (επί του φανταστικού άξονα) με άκρα τους $-i$ και i , κατά συνέπεια είναι οι αριθμοί του πραγματικού άξονα.

Οι ερωτήσεις (α'), (β'), (ε') και (ς') του προβλήματος σχετίζονται με αντίστοιχες από το Θ1 του διαγωνίσματος του Ιουνίου, ειδικά το (ε') είναι κοινό στα δύο διαγωνίσματα. Και εδώ δημιουργείται το φυσιολογικό ερώτημα: πως προετοιμάζεστε για τις εξετάσεις σας αν δεν φροντίζετε να **κατανοήσετε** τουλάχιστον ό,τι περιέχεται σε προηγούμενη εξέταση; Γιατί ο υπεύθυνος διδάσκων αναρτά τις λύσεις; Για να τις έχετε μαζί σας στην εξέταση; Και αυτό συνέβη, κάποιοι/κάποιες, αντιγράφοντας πρόβλημα από την προηγούμενη εξέταση, στο Θ6 έγραψαν ότι η παράγωγος του λογαρίθμου είναι το ημίτονο ή το συνημίτονο!

Θ2. (1.2 μονάδες) □ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+1}$.

(α) Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού P_2 που προσεγγίζει την f σε ένα διάστημα $(-\epsilon, \epsilon)$ με $0 < \epsilon < 1$.

Η συνάρτηση ορίζεται για $x \geq -1$. Μας ενδιαφέρει η προσέγγιση σε διάστημα συμμετρικό ως προς το $x_0 = 0$, οπότε οι συντελεστές υπολογίζονται στο 0. Από τον τύπο του Taylor έχουμε

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = P_2(x) + R_2(\xi, x)$$

για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x . Στη συνέχεια υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^{1/2} & f'(x) &= \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} & f''(x) &= -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2} \\ f(0) &= 1 & f'(0) &= \frac{1}{2} & f''(0) &= -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

οπότε το πολυώνυμο Taylor δεύτερου βαθμού, στο 0, είναι

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2,$$

έτσι για x κοντά στο 0, βλέπε Σχήμα, είναι

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2.$$

(β) Να εκτιμηθεί το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης της f από το P_2 στο διάστημα $(-1/2, 1/2)$.

Την ακρίβεια της προσέγγισης εκτιμά το υπόλοιπο $R_2(\xi, x)$, αφού $f(x) - P_2(x) = R_2(\xi, x)$, με

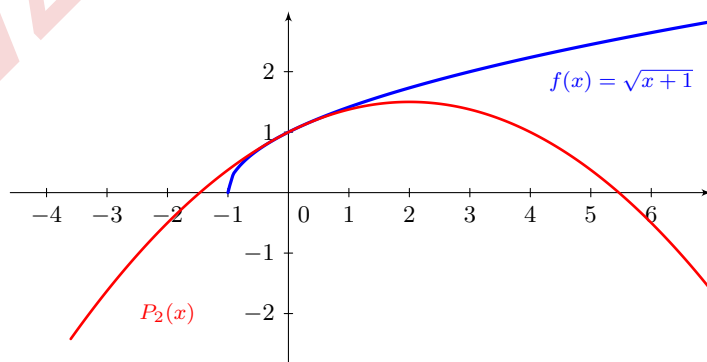
$$R_2(\xi, x) = \frac{f'''(\xi)x^3}{3!} \quad \text{και} \quad f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2},$$

έτσι

$$|R_2(\xi, x)| = \left| \frac{3x^3}{8(1+\xi)^{5/2}3!} \right| \leq \frac{(1/2)^3}{16(1-1/2)^{5/2}} = \frac{1}{16\sqrt{2}} = 0.0442$$

επειδή $x \in [-1/2, 1/2]$ και $0 < |\xi| < |x|$.

Στο σχήμα που ακολουθεί βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\sqrt{x+1}$, και $P_2(x)$ και πόσο κοντά είναι οι δύο σε μικρά διαστήματα γύρω από το 0.



Το πρόβλημα είναι λυμένη άσκηση, βλέπε Ασκήσεις Α04 Παράγωγοι συναρτήσεων # 8. Βλέπε και Διαγώνισμα Ιουνίου 2017, Θ3 στο eclass. Και συνεχίζουν ακάθεκτοι κάποιοι/κάποιες να γράφουν δυνάμεις του $\sqrt{x+1}$ στο πολυώνυμο Taylor.

Θ3. (1.8 μονάδες) Κυκλώστε Σ για σωστό ή Λ για λάθος.

(α) Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{|a_n|}$ συγκλίνει. Σ (Λ)

Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, αλλά η $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει. Βλέπε Θ1. (β) και Ασκήσεις A03 Σειρές, # 2.γ

(β) Αν $x, y \in \mathbb{R}$, τότε $|\arctan x - \arctan y| \geq |x - y|$. Σ (Λ)

Επειδή η συνάρτηση $\arctan x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για κάθε πραγματικό x και για κάθε πραγματικό y , υπάρχει s μεταξύ x και y ώστε

$$\arctan x - \arctan y = (\arctan' s)(x - y) = \frac{1}{1 + s^2}(x - y)$$

από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής, έτσι

$$|\arctan x - \arctan y| = \frac{1}{1 + s^2}|x - y| \leq |x - y|.$$

(γ) Αν η $f > 0$ είναι συνεχής, η $a_n = \int_1^n \frac{1}{f(x)} dx$ είναι αύξουσα. (Σ) Λ

$$a_{n+1} = \int_1^{n+1} \frac{1}{f(x)} dx = \int_1^n \frac{1}{f(x)} dx + \int_n^{n+1} \frac{1}{f(x)} dx > \int_1^n \frac{1}{f(x)} dx = a_n$$

αφού $1/f(x) > 0$. Σημείωση, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (n, n+1)$ ώστε

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{f(x)} dx = \frac{1}{f(\xi)}(n+1 - n) = \frac{1}{f(\xi)} > 0$$

από την υπόθεση στην f .

(δ) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ συγκλίνει. (Σ) Λ

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Η τελευταία σειρά συγκλίνει ως p -σειρά με $p = 2 > 1$, κατά συνέπεια η δοσμένη σειρά συγκλίνει.

(ε) Το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ συγκλίνει. (Σ) Λ

Για κάθε $\beta > 1$ ισχύει

$$\left| \int_1^{\beta} \frac{\sin x}{x^2} dx \right| \leq \int_1^{\beta} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx \leq \int_1^{\beta} \frac{1}{x^2} dx < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

και το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει ($p = 2 > 1$) έπεται ότι το δοσμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει. Βλέπε Διάλεξη 10, σελίδες 11-12.

(ς) Αν ο z είναι μιγαδικός αριθμός, τότε $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$. (Σ) Λ

Αν $z = x + yi$, τότε $x = \operatorname{Re} z$ και $y = \operatorname{Im} z$ οπότε

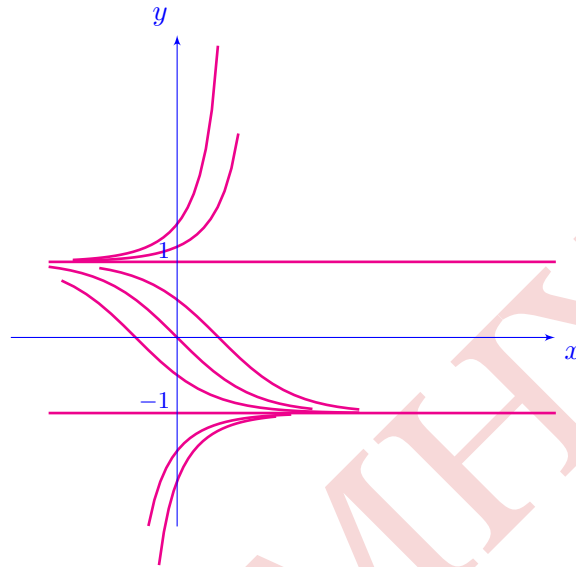
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$$

Θ4. (1.2 μονάδες) □ Δίνεται η εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 1.$$

(α) Σε ένα γράφημα δώστε τη συμπεριφορά των λύσεων, καθώς $x \rightarrow +\infty$, ανάλογα με την αρχική συνθήκη $y(0) = y_0$.

Οι συναρτήσεις $y = -1$ και $y = 1$ ικανοποιούν την διαφορική εξίσωση είναι δηλαδή λύσεις της εξίσωσης. Αν $|y| > 1$, τότε $y' > 0$, άρα η y είναι αύξουσα, ενώ αν $|y| < 1$, τότε $y' < 0$, οπότε η y είναι φθίνουσα. Τα αποτελέσματα αυτά αποτυπώνονται στο σχήμα



(β) Να βρεθούν **όλες** οι λύσεις της εξίσωσης.

Οι $y = \pm 1$ είναι, όπως είδαμε στο (α) λύσεις της εξίσωσης. Για $y \neq \pm 1$ η εξίσωση γράφεται

$$\frac{y'}{y^2 - 1} = 1 \Rightarrow \int \frac{y'}{(y-1)(y+1)} dx = \int dx \Rightarrow \int \frac{dy}{(y-1)(y+1)} = \int dx.$$

Αναλύοντας σε απλά κλάσματα βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{(y-1)(y+1)} &= \int \left[\frac{1/2}{(y-1)} - \frac{1/2}{(y+1)} \right] dy = \frac{1}{2} \left[\int \frac{dy}{y-1} - \int \frac{dy}{y+1} \right] = \int dx \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} [\ln |y-1| - \ln |y+1|] = x + c \end{aligned}$$

οπότε

$$\ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = 2x + 2c \Rightarrow \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = e^{2x+2c} \Rightarrow \frac{y-1}{y+1} = \pm e^{2x+2c} = \pm e^{2c} e^{2x} = k e^{2x}$$

με $k = \pm e^{2c}$, απ' όπου λύνοντας ως προς y βρίσκουμε

$$y - 1 = (y + 1)k e^{2x} \Rightarrow \dots \Rightarrow y = \frac{1 + k e^{2x}}{1 - k e^{2x}}.$$

Αν $y(0) = y_0$ βρίσκουμε $y_0 = (1 + k)/(1 - k)$ οπότε $k = (y_0 - 1)/(y_0 + 1)$ και η λύση μετά από πράξεις γίνεται

$$y = \frac{y_0(1 + e^{2x}) + 1 - e^{2x}}{y_0(1 - e^{2x}) + 1 + e^{2x}}.$$

Για $y_0 = \pm 1$ προκύπτουν αντίστοιχα οι λύσεις $y = \pm 1$, κατά συνέπεια η τελευταία έκφραση είναι η γενική λύση της εξίσωσης.

Θ5. (2.4 μονάδες) Έστω $z = 3 + i\sqrt{3}$.

(α) ■ $|z| = 2\sqrt{3}$.

$$|z| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Και όμως, υπάρχουν εξεταζόμενοι που δεν γνωρίζουν ότι το μέτρο μιγαδικού αριθμού είναι η ευκλείδεια απόσταση του αριθμού από την αρχή των αξόνων. Και έχετε μαζί σας ό,τι βοήθημα έχετε επιλέξει να έχετε.

(β) ■ Αν $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, και $0 \leq \theta < 2\pi$, τότε

i. $r = |z| = 2\sqrt{3}$.

ii. $\cos \theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

iii. $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$.

iv. $\theta = \frac{\pi}{6}$. Βλέπε πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών στη πρώτη σελίδα.

(γ) ■ Η εκθετική μορφή ($z = re^{i\theta}$) του z είναι $z = 2\sqrt{3}e^{i\pi/6}$.

Θ6. (0.6 μονάδες) □ Αν $\delta > 0$, να βρεθεί διάστημα μέγιστου μήκους ώστε

$$|\ln x - \ln y| > \delta |x - y|$$

για όλα τα σημεία x, y του διαστήματος.

Έχουμε ότι $x > 0$ και $y > 0$ (για να ορίζεται ο λογάριθμος). Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, που ισχύει αφού η συνάρτηση $\ln$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, άρα και συνεχής, έπεται ότι

$$\ln x - \ln y = \frac{1}{\xi}(x - y)$$

για κάθε $x > 0$ και $y > 0$, όπου ξ είναι κάποιος πραγματικός αριθμός μεταξύ x και y , άρα θετικός, έτσι

$$|\ln x - \ln y| = \frac{1}{\xi}|x - y|,$$

οπότε θέλουμε

$$\frac{1}{\xi} > \delta \Leftrightarrow \xi < \frac{1}{\delta}$$

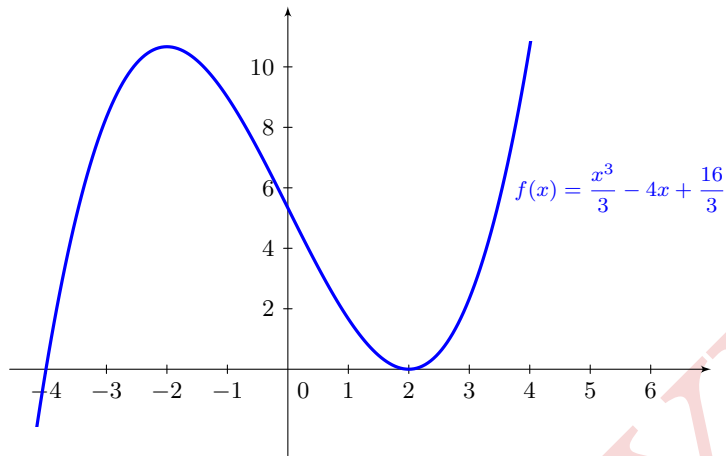
για όλα τα $x > 0$ και $y > 0$. Επομένως το ζητούμενο διάστημα είναι το $(0, 1/\delta)$ αφού οποιεδήποτε οι x και y περιέχονται σ' αυτό το διάστημα περιέχεται και το αντίστοιχο ξ , άρα ισχύει η ζητούμενη ανισότητα.

Η ιδέα είναι παρόμοια με αυτή της άσκησης # 6 από τις Ασκήσεις A04 Παράγωγοι συναρτήσεων. Βλέπε και Θ6. από το διαγώνισμα του Ιουνίου.

Θ7. (0.6 μονάδες) □ Αποδείξτε ότι

$$4x \leq \frac{x^3}{3} + \frac{16}{3}$$

για όλα τα $x > 0$.



Θέλουμε, ισοδύναμα, να δείξουμε ότι

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + \frac{16}{3} \geq 0 \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη οπότε παίρνοντας την παράγωγο βρίσκουμε

$$f'(x) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Παρατηρούμε ότι για $0 < x < 2$ η f είναι φθίνουσα, αφού $f'(x) < 0$, $f'(2) = 0$, και για $x > 2$ η f είναι αύξουσα, αφού $f'(x) > 0$, συνεπώς η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της (στο $x > 0$) στο $x = 2$, επομένως

$$f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} - 4x + \frac{16}{3} \geq 0$$

που είναι ότι θέλουμε να δείξουμε.

Το πρόβλημα είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας του Young, βλέπε Ασκήσεις A05 Παράγωγοι συναρτήσεων II # 3, με $p = 3$, $q = 2/3$ και $b = 4$.