ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

"Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ'αυτό μένειν"
Ηράκλειτος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Δεκέμβρης 2025

Περιεχόμενα

I

1 Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά

Το φως αποτέλεσε για αιώνες ένα μυστήριο για τον άνθρωπο. Στα έργα των ανθρώπων, όπως στους μύθους, στις επιστήμες, ακόμη και στις θρησκείες, το φως έπαιζε πάντοτε ιδιαίτερο ρόλο. Οι πρώτες εικόνες που υπέπεσαν στην αντίληψη του ανθρώπου ήταν οι ευθύγραμμες ακτίνες του φωτός και ο κυκλικός δίσκος του Ήλιου και των πλανητών του. 'Ηταν φυσικό λοιπόν όταν η Γεωμετρία μπήκε στη ζωή των ανθρώπων με την εμπειρική της μορφή, τα πρώτα γεωμετρικά σχήματα που κατασκευάστηκαν να είναι η ευθεία και ο κύκλος. Έτσι φθάσαμε στο σημείο η ευθεία και ο κύκλος να αποκτήσουν ιδιαίτερη σημασία, ιδίως μετά την ανακάλυψη της απόδειξης όπου θεωρούνταν ανεπίτρεπτη η επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος χωρίς την χρήση του χάρακα και του διαβήτη. Η εισαγωγή της Γεωμετρίας άλλαξε την ποιότητα της ανθρώπινης σκέψης και την οδήγησε από την πρακτική στη θεωρητική αντιμετώπιση των πραγμάτων και στην παραγωγή της γνώσης. Η φύση λοιπόν σηματοδότησε την πρώτη μεγάλη ερευνητική διείσδυση της ανθρώπινης σκέψης για την ερμηνεία και την κατανόηση της φυσικής πραγματικότητας. Οι πραγματείες του Αριστοτέλη και η θεμελίωση της Γεωμετρίας από τον Ευκλείδη δημιούργη- σαν το υπόβαθρο στο οποίο βασίστηκαν μετά απο πολλούς αιώνες ο Γαλιλαίος και ο Νεύτωνας, προκειμένου να διαμορφώσουν τη σύγχρονη αντίληψη της Φυσικής δίνοντας με αυτό τον τρόπο το έναυσμα στην εξέλιξη της μαθηματικής Επιστήμης, η οποία με αυτόν τον τρόπο εξελίσσεται μέσα απο μια σειρά σκέψεων και πράξεων που κάθε μια οικοδομείται επάνω στις προηγούμενες. Πολλοί αρχαίοι λαοί όπως οι Σουμέριοι, οι Αιγύπτιοι, οι Κινέζοι και άλλοι χρησιμοποιούσαν άτυπες μαθηματικές πράξεις, όμως, τα μαθηματικά ως μια έννοια που δηλώνει επιστήμη εμφανίζονται για πρώτη φορά στην αρχαία ελλάδα. Ο διακεκριμένος Γάλλος ιστορικός Αρνό Ρεϋμόν έγραψε: «*Σε σύγκριση με τις εμπειρικές και σκόρπιες γνώσεις που οι λαοί της Ανατολής συγκέντρωσαν με τη δουλειά τους στη διάρκεια πολλών αιώνων, η ελληνική επιστήμη είναι ένα θαύμα. Εδώ για πρώτη φορά η ανθρώπινη σκέψη κατανόησε ότι πρέπει να καθορίσει έναν αριθμό γενικών αρχών και να βγάλει απ' αυτές ορισμένες αλήθειες που είναι τ' αναγκαίο αποτέλεσμά τους*». Δυο είναι τα στοιχεία που υπονοεί ο Ρεϋμόν και έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην πορεία της εξέλιξης των μαθηματικών, η έννοια απόδειξης, και η ιδέα της αξιωματικής θεμελίωσης. Η έννοια της απόδειξης ξεκίνησε από τον Θαλή, αναπτύχθηκε από τον Πυθαγόρα και συστηματοποιήθηκε και τελειοποιήθηκε από τον Πλάτωνα, τον Αριστοτέλη, τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη. Η σύλληψη της ιδέας της αξιωματικής θεμελίωσης οφείλεται στους αρχαίους Έλληνες. Κλασικό παράδειγμα είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία, η αρχιτεκτονική της αποδεικτικής διαδικασίας απο τον Αριστοτέλη και τον Πυθαγόρα και τους υποστηρικτές του που ονομάστηκαν Πυθαγόρειοι, κ.α.λ. Τα έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών έβαλαν τα θεμέλια και αποτέλεσαν την βάση για την πιό πέρα εξέλιξη των μαθηματικών επιστημών, όπως Θεωρίας Αριθμών, μαθηματικής Λογικής, Αλγεβρας και Απειροστικού Λογισμού. Στο πλαίσιο μιας σφαιρικής πραγμάτευσης των μαθηματικών και με κίνητρο την καταννόησή τους, δίνουμε μερικά στοιχεία της κατηγοριοποίησης των μαθηματικών απο το 3000 π.Χ μέχρι και τον Έκτο αιώνα μ.Χ, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν υπάρχουν αλληλεπικαλύψεις μεταξύ διαφορετικών κατηγοριών.

II

2 Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

2.1 Εισαγωγή

2.2 Απροσδιόριστες μορφές

Η αντικατάσταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε όρια όταν η υπό μελέτη συνάρτηση είναι γνωστό ότι είναι συνεχής. Όταν θα μελετήσουμε τις παραγώγους θα αντιμετωπίσουμε όρια $\lim_{x \to x_0} f(x)$ όπου η τιμή $f(x_0)$ δεν ορίζεται. Σε τέτοιες περιπτώσεις η αντικατάσταση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας. Ωστόσο, πολλά από αυτά τα όρια μπορούν να υπολογιστούν αν χρησιμοποιήσουμε την άλγεβρα για να ξαναγράψουμε τον τύπο της $f(x)$.

Ορισμός 2.2.1 Αν δίνεται μια συνάρτηση f της οποίας ο τύπος παράγει μια απροσδιόριστη έκφραση για το $f(x)$ σε μία από τις μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$ ή $\infty - \infty$, τότε λέμε ότι η $f(x)$ έχει *απροσδιόριστη μορφή* (ή είναι *απροσδιόριστη*) στο $x = x_0$.

Μία απροσδιόριστη μορφή, όπως υποδηλώνει και το όνομά της, δείχνει ότι το όριο δεν μπορεί να προσδιοριστεί από τη μορφή της συνάρτησης. Αυτό δεν σημαίνει ότι το όριο δεν υπάρχει. ’Οταν η $f(x)$ έχει μια απροσδιόριστη μορφή στο $x = x_0$ μία στρατηγική είναι να μετασχηματίσου- με αλγεβρικά την $f(x)$, αν είναι δυνατόν, σε μία νέα έκφραση που ορίζεται και είναι συνεχής στο $x = x_0$ και έπειτα να υπολογίσουμε το όριο με αντικατάσταση. Το κρίσιμο βήμα στα περισσότερα παραδείγματα είναι η απλοποίηση ενός κοινού παράγοντα από τον αριθμητή και τον παρονομαστή την κατάλληλη στιγμή, το οποίο αίρει την απροσδιοριστία.

Περίληψη 2.2.2

- Όταν η f είναι γνωστό ότι είναι συνεχής στο $x = x_0$, τότε το όριο μπορεί να υπολογιστεί με αντικατάσταση

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- Αν ο τύπος για το $f(x_0)$ οδηγεί σε μια απροσδιόριστη έκφραση της μορφής

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty \cdot 0, \quad \infty - \infty$$

τότε λέμε ότι η $f(x)$ είναι απροσδιόριστη ή έχει απροσδιόριστη μορφή στο $x = x_0$.

- Αν η $f(x)$ είναι απροσδιόριστη στο $x = x_0$ δοκιμάζουμε να την μετασχηματίσουμε αλγεβρικά σε μια νέα έκφραση όπου ορίζεται και είναι συνεχής στο $x = x_0$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το όριο με αντικατάσταση.

Παράδειγμα 2.2.3 Απλοποίηση κλάσματος με παραγοντοποίηση Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2+x-12}.$$

Λύση. Η συνάρτηση έχει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ στο $x = 3$. 'Εχουμε

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-12} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+4)} = \frac{x-1}{x+4}, \quad \text{για } x \neq 3.$$

Επειδή η έκφραση στο δεξιό μέλος της εξίσωσης είναι συνεχής στο $x = 3$, υπολογίζουμε το όριο ως ακολούθως:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2+x-12} = \lim_{x\to 3} \frac{x-1}{x+4} = \frac{3-1}{3+4} = \frac{2}{7}$$

Παράδειγμα 2.2.4 Πολλαπλασιασμός με τον συζυγή Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$.

Λύση. Το όριο έχει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, αφού $x-9 \to 0$ και $\sqrt{x}-3 \to 0$ όταν $x \to 9$.

Για να απλοποιήσουμε την έκφραση, πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με το συζυγές του παρονομαστή:

$$\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9}.$$

Απλοποιώντας τον κοινό παράγοντα $x-9$ (για $x \neq 9$) έχουμε

$$\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \sqrt{x}+3.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \sqrt{9}+3 = 3+3 = 6.$$

Ασκήσεις 2.2.5 1. Να δείξετε ότι το όριο οδηγεί σε μία απροσδιόριστη μορφή. Έπειτα να ακολουθήσετε τη διαδικασία δύο βημάτων. Μετασχηματίστε αλγεβρικά τη συνάρτηση και υπολογίστε χρησιμοποιώντας τη συνέχεια.

(a) $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-36}{x-6}$ (b) $\lim_{h\to 3}\frac{9-h^2}{h-3}$ (c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x+1}$

(d) $\lim_{t\to 9}\frac{2t-18}{5t-45}$.

2. Να υπολογίσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια. Αν δεν υπάρχουν, να προσδιορίσετε αν υπάρχουν πλευρικά όρια (πεπερασμένα ή άπειρα).

(a) $\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{x^2-49}$ (d) $\lim_{x\to 8}\frac{x^3-64x}{x-8}$ (g) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\right)$

(b) $\lim_{x\to 8}\frac{x^2-64}{x-9}$ (e) $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x-4}-2}{x-8}$ (h) $\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-9x-5}{x^2-25}$

(c) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x+2}$ (f) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{5-x}-1}{2-\sqrt{x}}$ (i) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{2x+1}{2x^2+3x+1}$

3. Τα ακόλουθα όρια έχουν όλα την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Ένα από τα όρια δεν υπάρχει, ένα είναι ίσο με 0 και ένα είναι μη μηδενικό. Να υπολογίσετε κάθε όριο αλγεβρικά, αν είναι εφικτό.

(a) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x+2}$ (b) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^{-1}}{x-2+x^{-1}}$ (c) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-e^x}$

4. Τα ακόλουθα όρια έχουν όλα την απροσδιόριστη μορφή ∞/∞. Ένα από τα όρια δεν υπάρχει, ένα είναι ίσο με 0 και ένα είναι μη μηδενικό. Να υπολογίσετε κάθε όριο αλγεβ- ρικά, αν είναι εφικτό, ή αλλιώς να το διερευνήσετε αριθμητικά.

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{x^{-4}}{4+x^{-1}}$ (b) $\lim_{x\to 0}\frac{3\cot x}{\csc x}$ (c) $\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^4}}$

5. Να υπολογίσετε τα όρια χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ (c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x^3-1}$ (e) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1}$

(b) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$ (d) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2+6x+8}$ (f) $\lim_{x\to 27} \frac{x-27}{x^{1/3}-3}$

6. Να υπολογίσετε τα όρια συναρτήσει της σταθεράς a.

(a) $\lim_{x\to 0}(2a+x)$

(b) $\lim_{h\to -2}(4ah+7a)$

(c) $\lim_{t\to -1}(4t-2at+3a)$

(d) $\lim_{x\to a} \frac{(x+a)^2-4x^2}{x-a}$

(e) $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

(f) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+2h}-\sqrt{a}}{h}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{(x+a)^3-a^3}{x}$

(h) $\lim_{h\to a} \frac{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}{h-a}$

7. Να βρείτε όλες τις τιμές του c για τις οποίες υπάρχει το όριο.

(a) $\lim_{x\to c} \frac{x^2-5x-6}{x-c}$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x+c}{x-1}$

(c) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{c}{x^3-1}\right)$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{1+cx^2-\sqrt{1+x^2}}{x^4}$

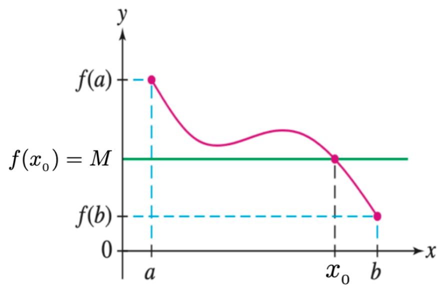
2.3 θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών (ΘΕΤ) αναφέρει ότι αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα, τότε παίρνει όλες τις τιμές ανάμεσα στις τιμές που παίρνει στα άκρα του διαστήματος. Για παράδειγμα, αν μια συνάρτηση περιγράφει το ύψος ενός αεροπλάνου από τη στιγμή της απογείωσης μέχρι να φτάσει σε ένα μέγιστο ύψος, τότε το αεροπλάνο πρέπει να περάσει από κάθε ύψος μεταξύ του ελάχιστου και του μέγιστου ύψους, χωρίς να παραλείψει καμία τιμή.

Με απλά λόγια, αν ξεκινήσεις από ένα σημείο και φτάσεις σε ένα άλλο, τότε πρέπει να έχεις περάσει από όλα τα ενδιάμεσα σημεία, αρκεί η διαδρομή σου να είναι συνεχής και χωρίς “άλματα”.

Θεώρημα 2.3.1 Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$, τότε για κάθε τιμή M, αυστηρά μεταξύ του $f(a)$ και του $f(b)$, υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή $x_0 \in (a,b)$ τέτοια ώστε $f(x_0)=M$.

Γραφικά, όπως στο Σχήμα 2.1, το αποτέλεσμα φαίνεται προφανές. Για μια συνεχή συνάρτηση κάθε οριζόντια ευθεία σε ύψος M μεταξύ του $f(a)$ και του $f(b)$ είναι υποχρεωμένη να συναντήσει τη γραφική παράσταση και επομένως πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή x_0 στο (a,b) τέτοια ώστε $f(x_0)=M$.



Σχήμα 2.1 *Για κάθε M μεταξύ του $f(a)$ και του $f(b)$ υπάρχει κάποιο x_0 μεταξύ του a και του b τέτοιο ώστε $f(x_0)=M$.*

Πόρισμα 2.3.2 Ύπαρξη ριζών (Bolzano) Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$. Αν

$$f \text{ είναι συνεχής στο } [a,b] \text{ και, επιπλέον, ισχύει}$$

$$f(a)\cdot f(b)<0,$$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(a,b)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Δηλαδή, υπάρχει μία, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοιχτό διάστημα (a,b).

Παράδειγμα 2.3.3 Να δείξετε ότι η $f(x)=\dfrac{x^2}{x^7+1}$ παίρνει την τιμή 0.4.

Λύση. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x)=0.4$. Δηλαδή,

$$\frac{x^2}{x^7+1}=0.4.$$

Πολλαπλασιάζουμε και τις δύο πλευρές με τον παρονομαστή x^7+1 (υποθέτοντας $x^7+1\neq 0$) θα έχουμε

$$x^2=0.4(x^7+1)\Rightarrow x^2-0.4x^7-0.4=0.$$

Η συνάρτηση $g(x)=x^2-0.4x^7-0.4$ είναι συνεχής, επειδή είναι πολυωνυμική. Εξετάζουμε αν το $g(x)$ αλλάζει πρόσημο σε ένα διάστημα. Έχουμε

- Για $x=0$: $g(0)=0^2-0.4(0)^7-0.4=-0.4$ (αρνητικό).
- Για $x=1$: $g(1)=1^2-0.4(1)^7-0.4=1-0.4-0.4=0.2$ (θετικό).

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή $x\in(0,1)$ για την οποία $g(x)=0$. Επομένως, η $f(x)$ παίρνει την τιμή 0.4.

Παράδειγμα 2.3.4 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,3)$.

Λύση. Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται

$$f(x) = x \iff f(x) - x = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή η f διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,1)$, ισχύει ότι

$$f(1) = 2 \quad \text{και} \quad f(3) = 1.$$

Η f είναι συνεχής στο $[1,3] \subseteq \mathbb{R}$ από υπόθεση. Άρα, και η $g(x) = f(x) - x$ είναι συνεχής, καθώς είναι πράξη συνεχών συναρτήσεων. Επίσης, έχουμε

$$g(1) = f(1) - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ και g(3) = f(3) - 3 = 1 - 3 = -2.}$$

Άρα, ισχύει ότι:

$$g(1) \cdot g(3) = 1 \cdot (-2) = -2 < 0.$$

Από το Θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \iff f(x_0) - x_0 = 0 \iff f(x_0) = x_0.$$

2.4 Παραγώγιση

Η *παράγωγος* αποτελεί θεμελιώδη έννοια στον διαφορικό λογισμό και στα μαθηματικά γενικότερα. Η μελέτη της παραγώγου επικεντρώνεται στον *ρυθμό μεταβολής* μιας ποσότητας καθώς και στην κλίση μιας εφαπτόμενης ευθείας σε ένα σημείο της συνάρτησης. Η παράγωγος είναι το όριο του πηλίκου των διαφόρων τιμών που προκύπτουν σε πολύ μικρές μεταβολές και εκφράζει πόσο γρήγορα αλλάζει μία συνάρτηση. Η έννοια της παραγώγου αναπτύχθηκε ανεξάρτητα από δύο κορυφαίους μαθηματικούς του 17ου αιώνα: τον Ισαάκ Νεύτωνα και τον Gottfried Wilhelm Leibniz. Ο Νεύτωνας (1642-1727), Άγγλος μαθηματικός και φυσικός, ανέπτυξε την έννοια της παραγώγου στο πλαίσιο της θεωρίας των ροών εστιάζοντας στην έννοια της κίνησης και του ρυθμού. Από την άλλη ο Leibniz (1646-1716), Γερμανός μαθηματικός και φιλόσοφος, διατύπωσε τις θεμελιώδεις αρχές του διαφορικού λογισμού εισάγοντας την έννοια των απείρως μικρών μεταβολών. Παρά τη διαμάχη για την πατρότητα της θεωρίας και οι δύο αναγνωρίζονται σήμερα ως συνδημιουργοί του διαφορικού λογισμού. Σήμερα η παράγωγος αποτελεί ένα εργαλείο που μας επιτρέπει να αναλύουμε και να κατανοούμε την κίνηση και τον ρυθμό μεταβολής σε φυσικά και κοινωνικά φαινόμενα και χρησιμοποιείται είτε για την κατανόηση φυσικών διεργασιών είτε για τη μοντελοποίηση οικονομικών και βιολογικών προβλημάτων, και γενικότερα, μας επιτρέπει να μελετήσουμε τον ρυθμό με τον οποίο αλλάζουν τα πράγματα γύρω μας. Στη φύση η παράγωγος εμφανίζεται σε πολλές διαδικασίες. Για παράδειγμα, όταν ένα σώμα κινείται η ταχύτητά του υπολογίζεται ως η παράγωγος της θέσης του ως προς τον χρόνο. Αν ρίξουμε μια πέτρα από ένα ύψος, η ταχύτητά της αυξάνεται σταδιακά καθώς πέφτει ενώ η επιτάχυνση της πτώσης εκφράζεται επίσης μέσω παραγώγων. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η ροή του νερού σε ένα ποτάμι. Όταν η στάθμη του νερού ανεβαίνει η ταχύτητα της ροής αυξάνεται και αυτό περιγράφεται με την παράγωγο. Αντίστοιχα, στα φυτά η παράγωγος δείχνει τον ρυθμό με τον οποίο απορροφούν διοξείδιο του άνθρακα ανάλογα με την ένταση του φωτός που δέχονται. Περνώντας στην πραγματική ζωή η έννοια της παραγώγου είναι εξίσου σημαντική. Στην οικονομία, η παράγωγος χρησιμοποιείται για να μετρήσει τον ρυθμό αύξησης των τιμών ενός προϊόντος ή τον πληθωρισμό. Όταν οι τιμές αυξάνονται γρήγορα μπορούμε να κατανοήσουμε πόσο απότομα μεταβάλλεται η οικονομία. Στην υγεία ο καρδιακός ρυθμός, δηλαδή ο αριθμός των παλμών ανά λεπτό, εκφράζεται με την παράγωγο και μπορεί να αποκαλύψει πότε το σώμα βρίσκεται υπό έντονη δραστηριότητα ή άγχος. Ακόμη και η κίνηση στον δρόμο περιγράφεται μέσω παραγώγων. Η κυκλοφοριακή ροή, δηλαδή η ταχύτητα με την οποία κινούνται τα οχήματα σε έναν αυτοκινητόδρομο, αλλάζει όταν αυξάνεται ο αριθμός των αυτοκινήτων ή υπάρχει συμφόρηση. Τέλος, στην καθημερινότητα, η παράγωγος χρησιμοποιείται για να μελετήσει τον ρυθμό με τον οποίο αλλάζει ο πληθυσμός μιας πόλης, πόσο γρήγορα αναπτύσσεται μία καλλιέργεια ή ακόμη και τον ρυθμό αναγέννησης των κυττάρων του ανθρώπινου δέρματος. Η παράγωγος είναι λοιπόν ένα πολύτιμο εργαλείο που μας βοηθά να κατανοούμε τις μεταβολές που συμβαίνουν γύρω μας. Επομένως η παράγωγος μας επιτρέπει να περιγράφουμε με ακρίβεια τον κόσμο και να προβλέπουμε τις αλλαγές που συμβαίνουν σε αυτόν.

2.4.1 Ορισμός της παραγώγου

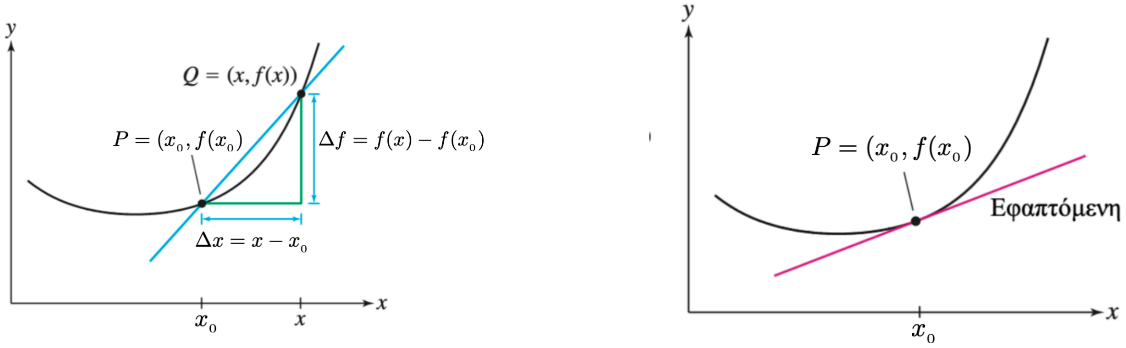
Στη μελέτη των συναρτήσεων και της μεταβολής τους υπάρχει μια βασική ερώτηση: Πώς μπορούμε να μετρήσουμε τον ρυθμό με τον οποίο αλλάζει μια συνάρτηση; Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, ας ξεκινήσουμε με την έννοια της *τέμνουσας ευθείας της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης* f. Όταν έχουμε δύο σημεία $P = (x_0, f(x_0))$ και $Q = (x, f(x))$ σε μια καμπύλη, μπορούμε να ενώσουμε τα σημεία αυτά με μια ευθεία. Η κλίση της τέμνουσας ευθείας που δίνεται από τον λόγο των μεταβολών

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

μας δείχνει πόσο αυξάνεται ή μειώνεται η τιμή της συνάρτησης καθώς το x αλλάζει. Η παραπάνω έκφραση ονομάζεται *πηλίκο διαφορών*. Το $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ εκφράζει τη μεταβολή της τιμής της συνάρτησης, ενώ το $\Delta x = x - x_0$ εκφράζει τη μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Η τέμνουσα ευθεία είναι μια *πρόχειρη προσέγγιση* της κλίσης της καμπύλης (Σχήμα 2.3(a)). Όμως, τι συμβαίνει αν φέρουμε το σημείο Q όλο και πιο κοντά στο σημείο P; Όσο το x πλησιάζει το x_0, η τέμνουσα ευθεία μετατρέπεται σε *εφαπτόμενη ευθεία*, η οποία είναι μια ακριβής προσέγγιση της κλίσης της καμπύλης στο σημείο P. Η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας ορίζεται ως το όριο του πηλίκου διαφορών όταν το x τείνει στο x_0:

$$\textit{Κλίση} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Αυτή η κλίση αποτελεί τον *ρυθμό μεταβολής* της συνάρτησης στο σημείο P και είναι γνωστή ως *παράγωγος* της συνάρτησης (Σχήμα 2.3(b)). Η παράγωγος είναι ένα πανίσχυρο εργαλείο που χρησιμοποιείται για να περιγράψει πόσο γρήγορα αλλάζουν οι τιμές μιας συνάρτησης είτε αυτή αναφέρεται στη θέση ενός κινούμενου σώματος είτε στην ανάπτυξη ενός φυτού ή ακόμα και στις τιμές των μετοχών σε μια οικονομία.



(a) **(b)**

Σχήμα 2.2 *Η τέμνουσα ευθεία έχει κλίση* $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. *Ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο* $(x_0, f(x_0))$.

Ορισμός 2.4.1 Η παράγωγος Η *παράγωγος* της f σε ένα σημείο x_0 είναι το όριο του πηλίκου διαφορών (αν υπάρχει):

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ή ισοδύναμα

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Όταν το όριο υπάρχει, λέμε ότι η f είναι *παραγωγίσιμη* στο x_0.

Ορισμός 2.4.2 Η πλευρική παράγωγος Έστω μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$.

(1) Η f ονομάζεται *παραγωγίσιμη από αριστερά* στο x_0 αν υπάρχει το πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Σε αυτή την περίπτωση το όριο λέγεται *παράγωγος* της f *από αριστερά* στο x_0 και συμβολίζεται με $f'_-(x_0)$.

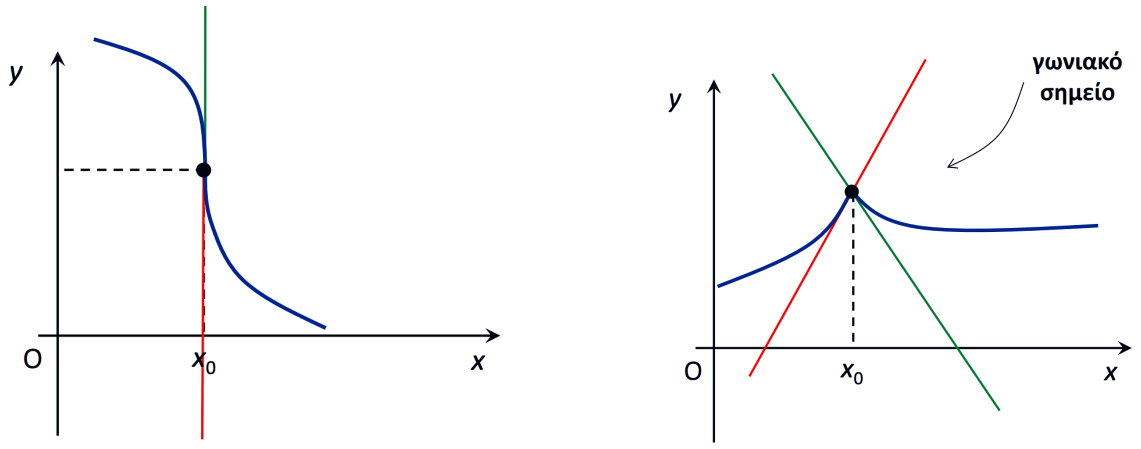
(2) Η f ονομάζεται *παραγωγίσιμη από δεξιά* στο x_0 αν υπάρχει το πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Σε αυτή την περίπτωση το όριο λέγεται *παράγωγος* της f *από δεξιά* στο x_0 και συμβολίζεται με $f'_+(x_0)$.

Αν συμβολίσουμε με h την διαφορά $x - x_0$ τότε θα έχουμε

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{και} \quad f'_{+}(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



(a) $f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0) = -\infty$ **(b)** $f'_{-}(x_0) = a \neq f'_{+}(x_0) = b,\ a, b \in \mathbb{R}$

Σχήμα 2.3 *Πλευρικές παράγωγοι.*

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε την εφαπτόμενη ευθεία με πιο αυστηρό τρόπο ως την ευθεία με κλίση $f'(x_0)$ που διέρχεται από το σημείο $P = (x_0, f(x_0))$.

Ορισμός 2.4.3 Εφαπτόμενη ευθεία Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο a. Η *εφαπτόμενη ευθεία* στο σημείο $P = (x_0, f(_0))$ της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ είναι η ευθεία που διέρχεται από το P και έχει κλίση $f'(x_0)$.
Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας σε μορφή σημείου-κλίσης δίνεται από τον τύπο:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $P = (a, b)$ με κλίση λ σε μορφή σημείου-κλίσης είναι:

$$y - b = \lambda(x - a)$$

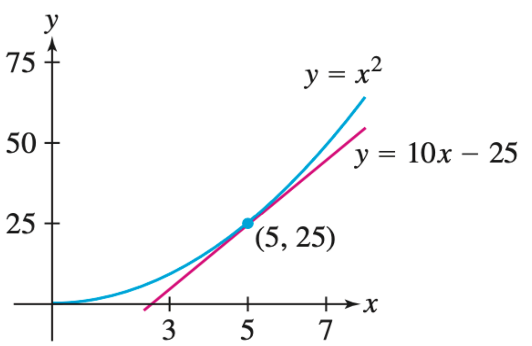
Παράδειγμα 2.4.4 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 \text{ στο } x = 5.$$

Λύση. Αρχικά, πρέπει να υπολογίσουμε το $f'(5)$. Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε:

$$f'(5) = \lim_{x \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

Αυτό το όριο είναι στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Μπορούμε να απλοποιήσουμε και μετά να υπολογίσουμε με αντικατάσταση:



Σχήμα 2.4 *Εφαπτόμενη ευθεία της $y = x^2$ στο $x = 5$.*

$$f'(5) = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \to 5}(x+5) = 10.$$

Η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας είναι $\lambda = f'(5) = 10$. Χρησιμοποιούμε τον τύπο της ευθείας σημείου-κλίσης $y - b = \lambda(x - a)$, όπου $P = (5, 25)$, $\lambda = 10$ και έχουμε

$$y - 25 = 10(x - 5) \text{ ή } y = 10x - 25.$$

Στο επόμενο παράδειγμα θα κάνουμε την παραγώγιση χρησιμοποιώντας την δεύτερη εξίσωση του ορισμού της παραγώγου.

Παράδειγμα 2.4.5 Να υπολογίσετε την $f'(3)$, όπου $f(x) = x^2 - 8x$.

Λύση. Χρησιμοποιώντας την δεύτερη εξίσωση του ορισμού της παραγώγου στο σημείο $x_0 = 3$ έχουμε:

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(3+h)^2 - 8(3+h)] - (3^2 - 8.3)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(9 + h^2 + 6h - 24 - 8h - 9 + 24)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - 2h}{h} = \lim_{h\to 0}(h - 2) = -2.$$

Επομένως $f'(3) = -2$.

Θεώρημα 2.4.6 *Η παραγωγισιμότητα συνεπάγεται τη συνέχεια* Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$, τότε η f είναι συνεχής στο $x = x_0$.

Απόδειξη. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$, τότε υπάρχει το παρακάτω όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, επειδή αυτός είναι ο ορισμός της συνέχειας στο $x = x_0$.

Για να συνδέσουμε τα δύο όρια θεωρήστε την εξίσωση (ισχύει για $x \neq x_0$)

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Και οι δύο όροι στο δεξί μέλος τείνουν σε ένα όριο καθώς $x \to x_0$, επομένως:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} \left((x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right).$$

Αυτό οδηγεί στο:

$$\left(\lim_{x\to x_0} (x - x_0) \right) \cdot \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = 0 \cdot f'(x_0) = 0.$$

Τέλος, από τον κανόνα του αθροίσματος για τα όρια:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0 \text{ ή } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0.$$

□

2.4.2 Ο συμβολισμός του Leibniz για την παράγωγο

Ο συμβολισμός του Leibniz για την παράγωγο, δηλαδή το $\frac{dy}{dx}$ αποτελεί μία από τις πιο σημαντικές και χρήσιμες σημειολογικές αναπαραστάσεις στα μαθηματικά και τη φυσική. Ο συμβολισμός αυτός εισήχθη από τον Gottfried Wilhelm Leibniz και παρέμεινε διαχρονικός χάρη στην ευελιξία και τη σαφήνεια που προσφέρει.

Ορισμός 2.4.7 Η παράγωγος σύμφωνα με τον ορισμό του Leibniz γράφεται ως

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{ή} \quad \frac{d}{dx} f(x)$$

και διαβάζεται ως «*η παράγωγος του y ως προς το x*».

Αν έχουμε τη συνάρτηση: $y = x^{-2}$ τότε η παράγωγος είναι $\dfrac{dy}{dx} = -2x^{-3}$.
Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Leibniz, για συγκεκριμένη τιμή $x = x_0$ γράφουμε:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \quad \text{ή} \quad \left.\frac{d}{dx} f(x)\right|_{x=x_0}.$$

Σημείωση 2.4.8 Δεν πρέπει να θεωρούμε το $\dfrac{dy}{dx}$ ως πηλίκο. Οι όροι dy και dx ονομάζονται *διαφορικά* και παίζουν σημαντικό ρόλο σε πολλές εφαρμογές, όπως τη γραμμική προσέγγιση και τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

Ο συμβολισμός του Leibniz χρησιμοποιείται ευρέως για διάφορους λόγους:

1. Υπενθυμίζει ότι η παράγωγος $\dfrac{df}{dx}$ είναι το όριο του λόγου $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.
2. Επιτρέπει τον διαχωρισμό των μεταβλητών όταν μελετάμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.
3. Θεωρείται χρήσιμος όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή αλλάζει, π.χ., αν αντί για x έχουμε t τότε γράφουμε:
$$\frac{df}{dt}.$$
4. Επιτρέπει την ευκολότερη εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας στη μελέτη παραγώγων.

Ο συμβολισμός του Leibniz λοιπόν παρέχει ένα πολύτιμο εργαλείο για την ανάλυση και τη μελέτη αλλαγών σε συναρτήσεις.

2.4.3 Η παράγωγος ως συνάρτηση

Στην προηγούμενη ενότητα υπολογίσαμε την παράγωγο $f'(x_0)$ για συγκεκριμένες τιμές του x_0. Είναι χρήσιμο επίσης να δούμε την παράγωγο ως μία συνάρτηση f', της οποίας οι τιμές $f'(x)$ ορίζονται από τον ορισμό της παραγώγου με βάση το όριο

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Αν $y = f(x)$, γράφουμε επίσης y' ή $y'(x)$ για την $f'(x)$.
Το πεδίο ορισμού της f' αποτελείται από όλες τις τιμές του x στο πεδίο ορισμού της f για τις οποίες υπάρχει το όριο $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Λέμε ότι η f είναι *παραγωγίσιμη* στο (a, b) αν υπάρχει η $f'(x)$ για κάθε x στο (a, b). Όταν η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε x στο διάστημα ή στα διαστήματα στα οποία ορίζεται η f, τότε λέμε απλά ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

Παράδειγμα 2.4.9 Να αποδείξετε ότι η $f(x) = x^{-2}$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογίσετε την f'.

Λύση. Το πεδίο ορισμού της $f(x) = x^{-2}$ είναι το $\{x : x \neq 0\}$, οπότε υποθέτουμε ότι $x \neq 0$. Έχουμε

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}.$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2} \right).$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{-h(2x+h)}{x^2(x+h)^2} \right) = \lim_{h \to 0} -\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2} \quad (\text{Απαλοιφή του } h)$$

$$= -\frac{2x+0}{x^2(x+0)^2} = -\frac{2x}{x^4} = -2x^{-3}.$$

Το όριο υπάρχει για κάθε $x \neq 0$, οπότε η $y = x^{-2}$ είναι παραγωγίσιμη και $y' = -2x^{-3}$.

2.5 Διαφορικό

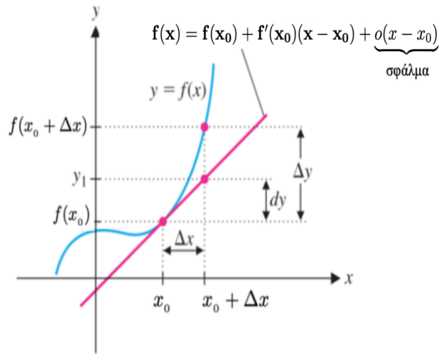
Ανάλυοντας την παράγωγο ως τοπικό μέτρο μεταβολής μιας συνάρτησης, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η παράγωγος σε ένα σημείο είναι μια τοπική ιδιότητα που εξαρτάται από τη συμπεριφορά της συνάρτησης στη γειτονιά του συγκεκριμένου σημείου. Συγκεκριμένα, η τιμή της παραγώγου στο x_0 δεν μπορεί να υπολογιστεί αν έχουμε γνώση μόνο της τιμής της συνάρτησης στο x_0 καθώς απαιτούνται πληροφορίες για τη συμπεριφορά της στη γύρω περιοχή. Αντίστροφα, η τιμή της παραγώγου στο x_0 δεν επαρκεί για να προσδιοριστεί η τιμή της συνάρτησης στο ίδιο σημείο. Μέσω της γεωμετρικής αναπαράστασης της παραγώγου ως κλίση της εφαπτομένης στο σημείο x_0, μπορούμε να κατανοήσουμε ότι αν γνωρίζουμε μόνο ένα σημείο του γραφήματος, δεν είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε την εξίσωση της εφαπτομένης. Επίσης αν γνωρίζουμε την κλίση της εφαπτομένης, αυτό από μόνο του δεν μας επιτρέπει να καθορίσουμε πού ακριβώς βρίσκεται τοποθετημένη. Παρόμοιες αρχές ισχύουν και στη Φυσική. Για παράδειγμα, η γνώση της θέσης ενός κινητού δεν είναι επαρκής για να καθορίσει την ταχύτητά του όπως και η γνώση της ταχύτητάς του δεν αρκεί για να υπολογιστεί η θέση του. Παρότι το διαφορικό συνδέεται με την παράγωγο, είναι διαφορετική έννοια. Το διαφορικό αποτελεί μια προσέγγιση της μεταβολής μιας συνάρτησης βασισμένη στην παράγωγο και χρησιμοποιείται κυρίως για τον υπολογισμό μικρών μεταβολών. Έτσι, ενώ η παράγωγος είναι ένα εργαλείο για την περιγραφή του ρυθμού μεταβολής, το διαφορικό μας παρέχει έναν πρακτικό τρόπο για την εκτίμηση μικρών αλλαγών στις τιμές μιας συνάρτησης.

Το διαφορικό λοιπόν μας εξασφαλίζει μια *μέθοδο εκτίμησης* της επίπτωσης που έχει στο y μια μεταβολή του x ίση με $dx = \Delta x$. Το Δy είναι η *ακριβής* μεταβολή του y ενώ το dy είναι η *κατά προσέγγιση* μεταβολή του y. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5 η μεταβολή της τιμής της συνάρτησης μεταξύ των x και του x_0 δίνεται από την διαφορά $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, ενώ αν προσεγγίσουμε την συνάρτηση με την εφαπτομένη της στο x_0, η διαφορά αυτή ισούται με $dy = f'(x_0)(x - x_0)$.

Ορισμός 2.5.1 Το διαφορικό μίας συνάρτησης στο σημείο x_0 ορίζεται από τον τύπο

$$df(x_0) = f'(x_0)\, dx.$$

Καθώς το x πλησιάζει το x_0 η προσέγγιση του γραφήματος από την εφαπτομένη στο σημείο x_0 βελτιώνεται και στο όριο, καθώς το $x \to x_0$, η προσεγγιστική σχέση



Σχήμα 2.5

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{o(x - x_0)}_{\text{σφάλμα}}$$

αντικαθίσταται από τη σχέση ορισμού του διαφορικού

$$dy = df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Δηλαδή το διαφορικό στο σημείο x_0 καθορίζει μία γραμμική σχέση μεταξύ τοπικών μεταβολών της ανεξάρτητης μεταβλητής dx και της εξαρτημένης μεταβλητής dy. Η παράγωγος της f στο x_0 αποτελεί το συντελεστή αναλογίας μεταξύ των δύο αυτών μεταβολών. Ειδικά, αν η f είναι η ταυτοτική συνάρτηση

$$f(x) = x$$

τότε

$$dy = dx.$$

Αυτό αποδεικνύεται και αναλυτικά πολύ απλά γιατί αν η f δίνεται από την $f(x) = x$ τότε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Άρα, η παράγωγος της $f(x) = x$ είναι παντού ίση με τη μονάδα.

Στον Πίνακα 2.1 που ακολουθεί παρουσιάζονται συνοπτικά οι βασικές διαφορές μεταξύ της παραγώγου και του διαφορικού προσφέροντας μια συνοπτική αλλά κατανοητή σύγκριση των δύο εννοιών.

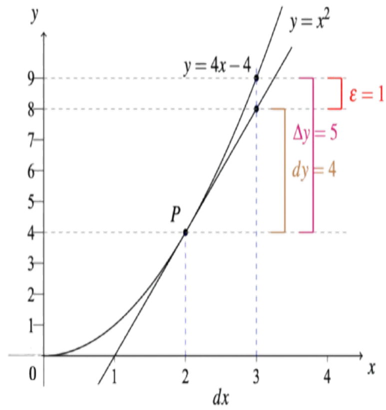
Πίνακας 2.1 Σύγκρισης παραγώγου και διαφορικού.

Χαρακτηριστικό	*Παράγωγος* ($f'(x)$)	*Διαφορικό* ($dy = f'(x)dx$)
Ορισμός	Ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης.	Προσεγγιστική μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής.
Μορφή	Ένα αριθμητικό μέγεθος (κλίση).	Μια εξίσωση που περιλαμβάνει dx.
Σχέση με τη μεταβολή	Περιγράφει την αλλαγή γενικά.	Προσεγγίζει μικρές αλλαγές (Δy).
Εφαρμογές	Γεωμετρικές/μαθηματικές αναλύσεις.	Προσεγγιστικοί υπολογισμοί σε φυσικές επιστήμες και μηχανική.

Παράδειγμα 2.5.2 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Θα δούμε τι σημαίνει η παράγωγος και τι το διαφορικό χρησιμοποιώντας το σημείο $x_0 = 2$ της συνάρτησης. Έχουμε ότι $f'(x) = 2x$ και συνεπώς η η παράγωγος στο 2 είναι $f'(2) = 4$. Δηλαδή η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό είναι ίση με 4. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο $x_0 = 2$ είναι $y - 4 = 4(x-2)$ που συνεπάγεται ότι $y = 4x - 4$. Το διαφορικό dy προσεγγίζει τη μεταβολή της συνάρτησης Δy για μια μικρή μεταβολή dx στο x. Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$, το διαφορικό είναι$dy = f'(x) \cdot dx$. Όταν $x_0 = 2$, έχουμε $f'(2) = 4$. Αν η μεταβολή στο x είναι $dx = 1$, τότε

$$dy = f'(2) \cdot dx = 4 \cdot 1 = 4.$$

Για $x_0 = 2$ και $dx = 1$ η πραγματική μεταβολή της συνάρτησης Δy υπολογίζεται ως:



Σχήμα 2.6

$$\Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0) = f(3) - f(2) = 9 - 4 = 5.$$

Παρατηρούμε ότι $dy = 4$ ενώ $\Delta y = 5$. Το διαφορικό dy είναι μια γραμμική προσέγγιση της πραγματικής μεταβολής Δy και είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για μικρές μεταβολές του dx.

Παράδειγμα 2.5.3 1) Να προσεγγίσετε με τη βοήθεια του διαφορικού την τιμή της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ στις τιμές $x_1 = 1.2$, $x_2 = 1.1$ και $x_3 = 1.01$.

Λύση. Η παράγωγος της $f(x) = x^{-3}$ είναι

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{-3}\right) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}.$$

Το διαφορικό υπολογίζεται από τη σχέση

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Για $x_0 = 1$ έχουμε

$$\Delta x_1 = 0.2, \Delta x_2 = 0.1 \text{ και } \Delta x_3 = 0.01.$$

Επομένως

$$dy_1 = f'(1)\cdot \Delta x_1 = -3\cdot 0.2 = -0.6,\ dy_2 = f'(1)\cdot \Delta x_2 = -3\cdot 0.1 = -0.3 \text{ και}$$

$$dy_3 = f'(1)\cdot \Delta x_3 = -3\cdot 0.01 = -0.03.$$

Άρα

$$f(1.2) \approx f(1) + dy_1 = \frac{1}{1^3} - 0.6 = 1 - 0.6 = 0.4,$$

$$f(1.1) \approx f(1) + dy_2 = \frac{1}{1^3} - 0.3 = 1 - 0.3 = 0.7,$$

και

$$f(1.01) \approx f(1) + dy_3 = \frac{1}{1^3} - 0.03 = 1 - 0.03 = 0.97.$$

Οι ακριβείς τιμές της συνάρτησης $f(1.2)$, $f(1.1)$ και $f(1.001)$ της συνάρτησης υπολογίζονται ως εξής

$$f(1.2) = \tfrac{1}{(1.2)^3} \approx 0.5787,$$

$$f(1.1) = \tfrac{1}{(1.1)^3} \approx 0.7513,$$

και

$$f(1.01) = \tfrac{1}{(1.01)^3} \approx 0.9703.$$

Παρατηρούμε ότι οι προσεγγίσεις μέσω του διαφορικού dy είναι κοντά στις πραγματικές τιμές, ειδικά για μικρές τιμές του Δx.