

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

“Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ’αυτό μένειν”
Ηράκλειτος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Copyright © 2025 Αθανάσιος Ανδρικόπουλος

Το παρόν υλικό διατίθεται αποκλειστικά για τους φοιτητές του μαθήματος Γενικά Μαθηματικά Ι του Τμήματος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών..

Δεκέμβρης 2025



Περιεχόμενα

I	Η Κληρονομιά των Αρχαίων Ελλήνων στα Μαθηματικά	4
1	Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά	6
II	Διαφορικός Λογισμός Μίας Μεταβλητής	7
2	Διαφορικός Λογισμός Μίας Μεταβλητής	9
2.1	Εισαγωγή	9
2.2	Αντίστροφες συναρτήσεις	9
2.3	Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις	13
2.4	Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις	17
2.5	Κατασκευή νέων συναρτήσεων	23
2.5.1	Σύνθεση Συναρτήσεων	24
2.6	Όριο και Συνέχεια Συνάρτησης	26
2.6.1	Πλευρικά Όρια	30
2.7	Θεώρημα Παρεμβολής	34
2.8	Όρια και Πράξεις	40
2.9	Συνεχείς συναρτήσεις	41
2.10	Απροσδιόριστες μορφές	50
2.11	θεώρημα ενδιάμεσων τιμών	54
2.12	Παραγωγή	55
2.12.1	Ορισμός της παραγώγου	56
2.12.2	Ο συμβολισμός του Leibniz για την παράγωγο	60
2.12.3	Η παράγωγος ως συνάρτηση	61

I

1 Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά

6



1 Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά

Το φως αποτέλεσε για αιώνες ένα μυστήριο για τον άνθρωπο. Στα έργα των ανθρώπων, όπως στους μύθους, στις επιστήμες, ακόμη και στις θρησκείες, το φως έπαιζε πάντοτε ιδιαίτερο ρόλο. Οι πρώτες εικόνες που υπέπεσαν στην αντίληψη του ανθρώπου ήταν οι ευθύγραμμες ακτίνες του φωτός και ο κυκλικός δίσκος του Ήλιου και των πλανητών του. Ήταν φυσικό λοιπόν όταν η Γεωμετρία μπήκε στη ζωή των ανθρώπων με την εμπειρική της μορφή, τα πρώτα γεωμετρικά σχήματα που κατασκευάστηκαν να είναι η ευθεία και ο κύκλος. Έτσι φθάσαμε στο σημείο η ευθεία και ο κύκλος να αποκτήσουν ιδιαίτερη σημασία, ιδίως μετά την ανακάλυψη της απόδειξης όπου θεωρούνταν ανεπίτρεπτη η επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος χωρίς την χρήση του χάρακα και του διαβήτη. Η εισαγωγή της Γεωμετρίας άλλαξε την ποιότητα της ανθρώπινης σκέψης και την οδήγησε από την πρακτική στη θεωρητική αντιμετώπιση των πραγμάτων και στην παραγωγή της γνώσης. Η φύση λοιπόν σηματοδότησε την πρώτη μεγάλη ερευνητική διείσδυση της ανθρώπινης σκέψης για την ερμηνεία και την κατανόηση της φυσικής πραγματικότητας. Οι πραγμα- τείες του Αριστοτέλη και η θεμελίωση της Γεωμετρίας από τον Ευκλείδη δημιούργησαν το υπόβαθρο στο οποίο βασίστηκαν μετά απο πολλούς αιώνες ο Γαλιλαίος και ο Νεύτωνας, προκειμέ- νου να διαμορφώσουν τη σύγχρονη αντίληψη της Φυσικής δίνοντας με αυτό τον τρόπο το έναυσμα στην εξέλιξη της μαθηματικής Επιστήμης, η οποία με αυτόν τον τρόπο εξελίσσεται μέσα απο μια σειρά σκέψεων και πράξεων που κάθε μια οικοδομείται επάνω στις προηγούμενες. Πολλοί αρχαίοι λαοί όπως οι Σουμέριοι, οι Αιγύπτιοι, οι Κινέζοι και άλλοι χρησιμοποιούσαν άτυπες μαθηματικές πράξεις, όμως, τα μαθηματικά ως μια έννοια που δηλώνει επιστήμη εμφανίζονται για πρώτη φορά στην αρχαία Ελλάδα. Ο διακεκριμένος Γάλλος ιστορικός Αρνό Ρεϋμόν έγραψε: *«Σε σύγκριση με τις εμπειρικές και σκόρπιες γνώσεις που οι λαοί της Ανατολής συγκέντρωσαν με τη δουλειά τους στη διάρκεια πολλών αιώνων, η ελληνική επιστήμη είναι ένα θαύμα. Εδώ για πρώτη φορά η ανθρώπινη σκέψη κατανόησε ότι πρέπει να καθορίσει έναν αριθμό γενικών αρχών και να βγάλει απ' αυτές ορισμένες αλήθειες που είναι τ' αναγκαίο αποτέλεσμά τους»*. Δυο είναι τα στοιχεία που υπονοεί ο Ρεϋμόν και έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην πορεία της εξέλιξης των μαθηματικών, η έννοια απόδειξης, και η ιδέα της αξιωματικής θεμελίωσης. Η έννοια της απόδειξης ξεκίνησε από τον Θαλή, αναπτύχθηκε από τον Πυθαγόρα και συστηματοποιήθηκε και τελειοποιήθηκε από τον Πλάτωνα, τον Αριστοτέλη, τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη. Η σύλληψη της ιδέας της αξιωματικής θεμελίωσης οφείλεται στους αρχαίους Έλληνες. Κλασικό παράδειγμα είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία, η αρχιτεκτονική της αποδεικτικής διαδικασίας απο τον Αριστοτέλη και τον Πυθαγόρα και τους υποστηρικτές του που ονομάστηκαν Πυθαγόρειοι, κ.α.λ. Τα έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών έβαλαν τα θεμέλια και αποτέλεσαν την βάση για την πιά πέρα εξέλιξη των μαθηματικών επιστημών, όπως Θεωρίας Αριθμών, μαθηματικής Λογικής, Αλγεβρας και Απειροστικού Λογισμού. Στο πλαίσιο μιας σφαιρικής πραγμάτευσης των μαθηματικών και με κίνητρο την κατανόησή τους, δίνουμε μερικά στοιχεία της κατηγοριοποίησης των μαθηματικών απο το 3000 π.Χ μέχρι και τον Έκτο αιώνα μ.Χ, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν υπάρχουν αλληλε- πικαλύψεις μεταξύ διαφορετικών κατηγοριών.

II

2	Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής	9
2.1	Εισαγωγή	9
2.2	Αντίστροφες συναρτήσεις	9
2.3	Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις	13
2.4	Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις	17
2.5	Κατασκευή νέων συναρτήσεων	23
2.5.1	Σύνθεση Συναρτήσεων	24
2.6	Όριο και Συνέχεια Συνάρτησης	26
2.6.1	Πλευρικά Όρια	30
2.7	Θεώρημα Παρεμβολής	34
2.8	Όρια και Πράξεις	40
2.9	Συνεχείς συναρτήσεις	41
2.10	Απροσδιόριστες μορφές	50
2.11	θεώρημα ενδιάμεσων τιμών	54
2.12	Παραγωγή	55
2.12.1	Ορισμός της παραγώγου	56
2.12.2	Ο συμβολισμός του Leibniz για την παράγωγο	60
2.12.3	Η παράγωγος ως συνάρτηση	61



2 Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

2.1 Εισαγωγή

2.2 Αντίστροφες συναρτήσεις

Η ενότητα αφορά τις αντίστροφες συναρτήσεις, οι οποίες είναι συναρτήσεις που «αντιστρέφουν» τη δράση μιας άλλης συνάρτησης. Η ύπαρξη αντίστροφης συνάρτησης αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη θέματα στα μαθηματικά, ειδικά στον κλάδο της ανάλυσης και της άλγεβρας. Ουσιαστικά μια συνάρτηση f έχει αντίστροφη συνάρτηση αν μπορούμε να «αντιστρέψουμε» τη διαδικασία της, δηλαδή αν για κάθε τιμή εξόδου της συνάρτησης υπάρχει μία μοναδική τιμή εισόδου. Για το λόγο αυτό χρειαζόμαστε την έννοια που περιγράφεται στον παρακάτω ορισμό.

Θεώρημα 2.2.1 Νόμος της αντιθετοαντιστροφής Έστω p και q δύο λογικοί ισχυρισμοί. Ισχύει ότι

$$(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p).$$

Ορισμός 2.2.2 Συνάρτηση ένα-προς-ένα μια συνάρτηση f είναι ένα-προς-ένα σε ένα πεδίο ορισμού D αν, για κάθε τιμή του c , η εξίσωση $f(x) = c$ έχει το πολύ μία λύση για $x \in D$. Ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $a, b \in D$, αν $a \neq b$, τότε $f(a) \neq f(b)$.

Τα Σχήματα 2.2 και 2.3 δείχνουν ότι μια συνάρτηση f είναι ένα-προς-ένα αν και μόνο αν ισχύει:

$$\forall a, b \in D, \quad f(a) = f(b) \implies a = b,$$

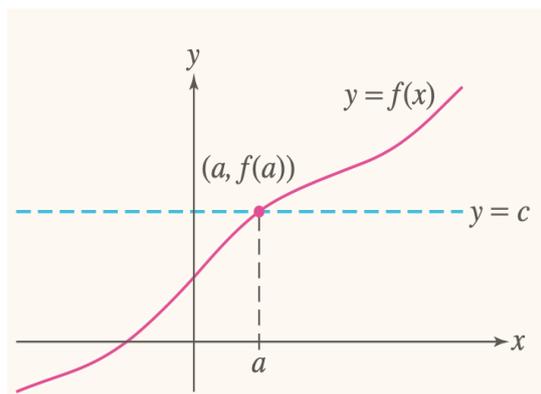
ή ισοδύναμα:

$$\forall a, b \in D, \quad a \neq b \implies f(a) \neq f(b).$$

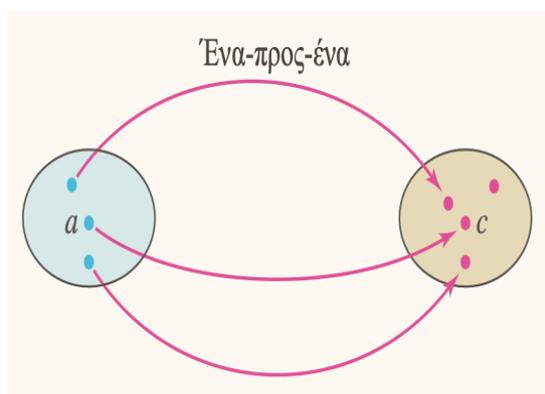
Αυτό σημαίνει ότι κάθε τιμή του $f(x)$ λαμβάνεται το πολύ μία φορά.

2.2 Αντίστροφες συναρτήσεις

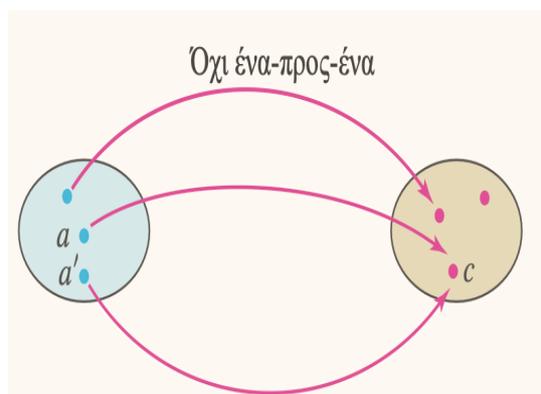
Κριτήριο οριζόντιας ευθείας Μια συνάρτηση του x λέγεται ένα-προς-ένα αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράστασή της το πολύ σε ένα σημείο. Αυτό σημαίνει ότι σε καμία περίπτωση δύο διαφορετικές τιμές του x δεν αντιστοιχίζονται στην ίδια τιμή του y . Με άλλα λόγια, η συνάρτηση δεν “επαναλαμβάνει” τιμές και επομένως μπορεί να έχει αντίστροφη συνάρτηση. Το κριτήριο της οριζόντιας ευθείας αποτελεί το γεωμετρικό εργαλείο για τον έλεγχο αυτής της ιδιότητας.



Σχήμα 2.1 Η ευθεία $y = c$ τέμνει τη γραφική παράσταση στα σημεία όπου $f(a) = c$



Σχήμα 2.2 Η $f(x) = c$ έχει το πολύ μία λύση για κάθε c



Σχήμα 2.3 Η $f(x) = c$ έχει δύο λύσεις: $x = a$ και $x = a'$

Ορισμός 2.2.3 Αντίστροφη Έστω ότι η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού D και σύνολο τιμών R . Αν υπάρχει συνάρτηση g με πεδίο ορισμού R έτσι ώστε $g(f(x)) = x$ για $x \in D$ και $f(g(x)) = x$ για $x \in R$ τότε η f ονομάζεται *αντιστρέψιμη*. Η συνάρτηση g ονομάζεται *αντίστροφη συνάρτηση* και συμβολίζεται με f^{-1} .

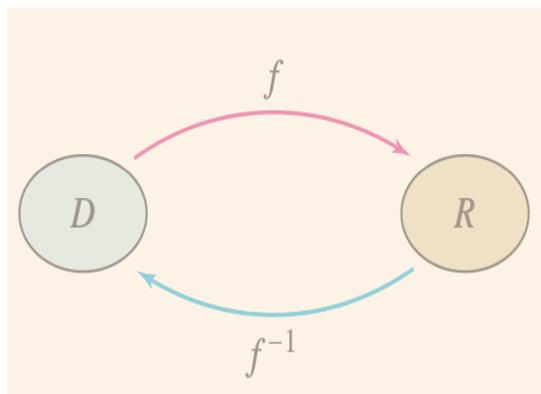
ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ Το «πεδίο ορισμού» είναι το σύνολο των αριθμών x έτσι ώστε να ορίζεται η f (το σύνολο των επιτρεπτών τιμών εισόδου) και το «σύνολο τιμών» είναι το σύνολο όλων των τιμών $f(x)$ (το σύνολο των εξαγομένων).

Ένα παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x) = x^3$, της οποίας η αντίστροφη είναι η κυβική ρίζα: $f^{-1}(x) = x^{1/3}$. Όταν έχουμε έναν πίνακα τιμών για μια συνάρτηση f , μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την αντίστροφη f^{-1} , αντιστρέφοντας τις στήλες x και y

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

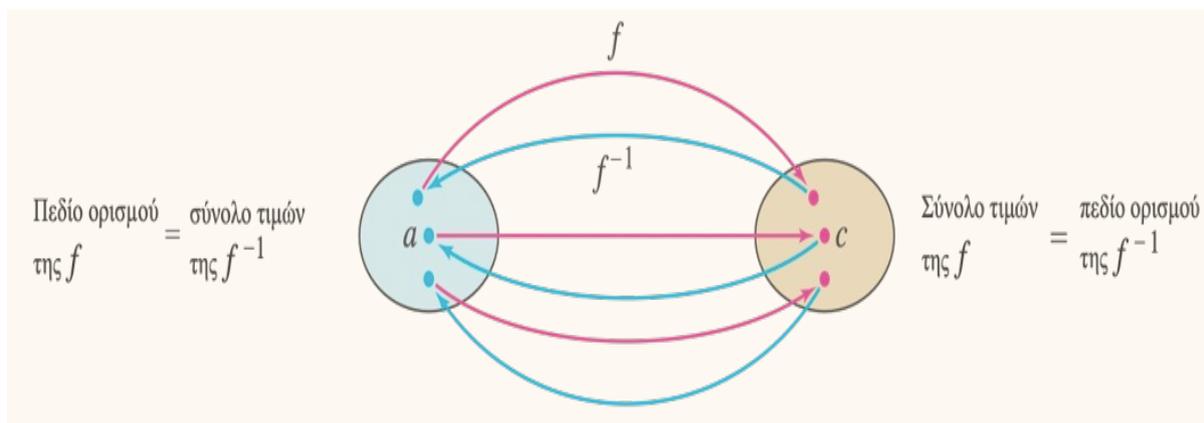
Έτσι, η ανάλυση των αντίστροφων συναρτήσεων μας επιτρέπει να εξετάσουμε τις ιδιότητές τους, όπως και τις γραφικές τους παραστάσεις.

Συνάρτηση		(εναλλαγή στηλών)	Αντίστροφη	
x	$f(x) = x^3$		x	$f^{-1}(x) = x^{1/3}$
-2	-8	-8	-2	
-1	-1	-1	-1	
0	0	0	0	
1	1	1	1	
2	8	8	2	
3	27	27	3	



Σχήμα 2.4 Μια συνάρτηση και η αντίστροφή της

Γενικά, $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$. Η έκφραση $f^{-1}(x)$ είναι απλώς ένας συμβολισμός για την αντίστροφη συνάρτηση και το -1 δεν αποτελεί εκθέτη.



Σχήμα 2.5 Καθώς περνάμε από την f στην f^{-1} το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών παραμένουν αμετάβλητα

Ορισμός 2.2.4 Έπαρξη της αντίστροφης

Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} υπάρχει αν και μόνο αν η f είναι ένα-προς-ένα στο πεδίο ορισμού της D . Επιπλέον:

- Πεδίο ορισμού της $f =$ σύνολο τιμών της f^{-1}
- Σύνολο τιμών της $f =$ πεδίο ορισμού της f^{-1}

Φανταστείτε μια λειτουργία f σαν ένα μηχάνημα που παίρνει μια είσοδο από ένα σύνολο και την μετατρέπει σε μια έξοδο. Όταν αυτή η διαδικασία είναι “ένα-προς-ένα”, τότε μπορούμε με σιγουριά να αναστρέψουμε το μηχάνημα: γνωρίζοντας την έξοδο, μπορούμε να ξαναβρούμε ακριβώς την είσοδο. Αυτή η αναστροφή είναι η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} . Δεν είναι όμως όλα τα μηχανήματα αναστρέψιμα, μόνο εκείνα που δεν μερδεύουν τις εισόδους τους. Γι’ αυτό η ύπαρξη της αντίστροφης εξαρτάται από την ιδιότητα του “ένα-προς-ένα”, όπως φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα.

2.2 Αντίστροφες συναρτήσεις

Παράδειγμα 2.2.5 Να δείξετε ότι η $f(x) = 2x - 18$ είναι αντιστρέψιμη. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f^{-1} ;

Βήμα 1 Επίλυση της εξίσωσης $y = f(x)$ εκφράζοντας το x ως συνάρτηση του y .

$$y = 2x - 18 \Leftrightarrow y + 18 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y + 9.$$

Αυτό μας δίνει την αντίστροφη ως συνάρτηση της μεταβλητής y

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + 9.$$

Βήμα 2 Εναλλαγή των μεταβλητών. Συνήθως προτιμάμε να γράφουμε την αντίστροφη

Η μεταβλητή y στην $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + 9$ ονομάζεται βουβή μεταβλητή. Είναι «τοπική» στην εξίσωση, που σημαίνει ότι η αλλαγή του y με κάποιο άλλο σύμβολο δεν αλλάζει το νόημα της σχέσης ούτε τα μαθηματικά που προηγούνται και έπονται της σχέσης. Θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$f^{-1}(A) = \frac{1}{2}A + 9$$

ή

$$f^{-1}(DOG) = \frac{1}{2}DOG + 9$$

χωρίς να επηρεάσουμε τα μαθηματικά στο Παράδειγμα 2.2.5. Γενικά, το x προτιμάται ως ανεξάρτητη μεταβλητή όταν γράφουμε εκφράσεις συναρτήσεων.

ως συνάρτηση του x , επομένως εναλλάσσουμε τους ρόλους των x και y

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 9.$$

Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} φαίνονται στο Σχήμα 2.6.

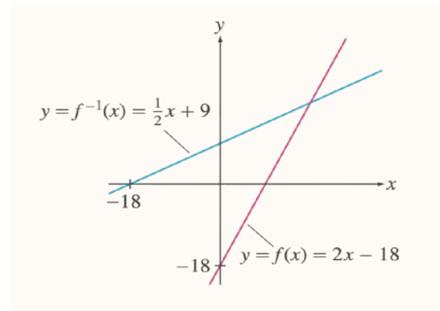
Για να ελέγξουμε τους υπολογισμούς μας, θα επιβεβαιώσουμε ότι

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(x)) = x.$$

Πράγματι

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x - 18) = \frac{1}{2}(2x - 18) + 9 = (x - 9) + 9 = x$$

και



Σχήμα 2.6 Μία συνάρτηση και η αντίστροφή της

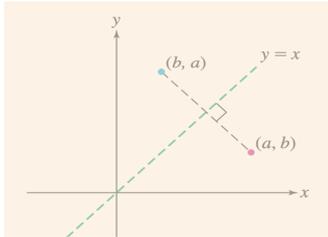
$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{2}x + 9\right) = 2\left(\frac{1}{2}x + 9\right) - 18 = (x + 18) - 18 = x.$$

Επειδή η f^{-1} είναι γραμμική συνάρτηση, το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της είναι το \mathbb{R} .

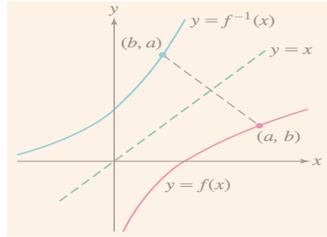
Στη συνέχεια, περιγράφουμε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης. Η ανάκλαση ενός σημείου (a, b) ως προς την ευθεία $y = x$ ορίζεται το σημείο (b, a) (Σχήμα 2.7). Παρατηρήστε ότι αν σχεδιάσουμε τους άξονες x και y στην ίδια κλίμακα, τότε τα (a, b) και (b, a) ισαπέχουν από την ευθεία $y = x$ και το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει είναι κάθετο στην $y = x$. Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η ανάκλαση της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία $y = x$ (Σχήμα 2.8). Για να το ελέγξετε δείξτε ότι το (a, b) ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν $f(a) = b$.

Αλλά $f(a) = b$ αν και μόνο αν $f^{-1}(b) = a$, οπότε το σημείο (b, a) ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1} .

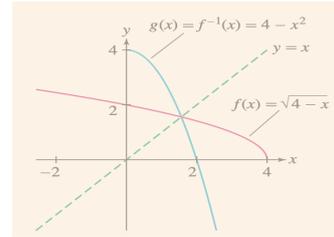
2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής



Σχήμα 2.7 Επίπεδες booleanικές τιμές



Σχήμα 2.8 Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η ανάκλαση της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία $y = x$



Σχήμα 2.9 Η γραφική παράσταση της αντίστροφης g της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{4-x}$

Παράδειγμα 2.2.6 Σχεδίαση της γραφικής παράστασης της αντίστροφης Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{4-x}$, αφού πρώτα τεκμηριώσετε ότι είναι αντιστρέψιμη (1-1).

Λύση. Έστω $g(x) = f^{-1}(x)$. Παρατηρήστε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι $\{x|x \leq 4\}$ και το σύνολο τιμών είναι $\{x|x \geq 0\}$. Δεν χρειαζόμαστε τον τύπο της $g(x)$ για να σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση. Απλώς ανακλούμε τη γραφική παράσταση της f ως προς την ευθεία $y = x$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.9. Αν το επιθυμούμε, μπορούμε εύκολα να λύσουμε την $y = \sqrt{4-x}$ ως προς x και να πάρουμε $x = 4 - y^2$, οπότε $g(x) = 4 - x^2$ με πεδίο ορισμού $\{x|x \geq 0\}$.

2.3 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

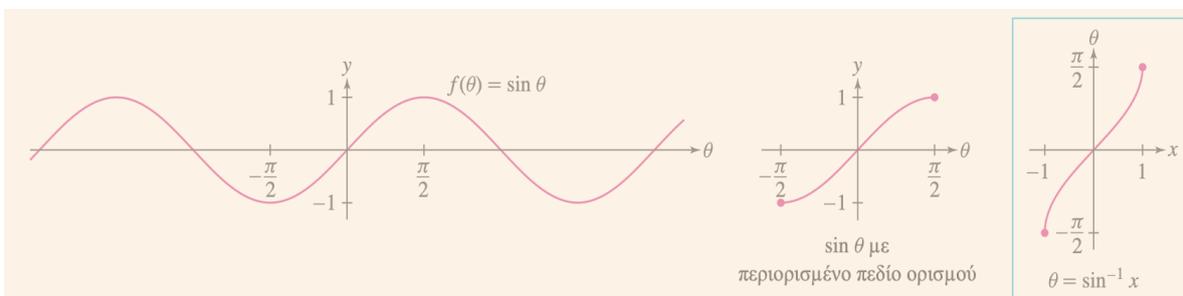
Έχουμε δει ότι η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} υπάρχει αν και μόνο αν η f είναι ένα-προς-ένα στο πεδίο ορισμού της. Επειδή οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν είναι ένα-προς-ένα, για να ορίσουμε τις αντίστροφές τους, πρέπει να περιορίσουμε το πεδίο ορισμού κάθε μίας.

Θεωρήστε τη συνάρτηση του ημιτόνου. Το Σχήμα 2.10 δείχνει ότι η $f(\theta) = \sin \theta$ είναι ένα-προς-ένα στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Με αυτό το διάστημα ως πεδίο ορισμού, η αντίστροφη ονομάζεται *συνάρτηση τόξου ημιτόνου* και συμβολίζεται με $\theta = \sin^{-1} x$ ή $\theta = \arcsin x$. Εξ ορισμού,

μη συγχέετε την αντίστροφη $\sin^{-1} x$ με το αντίστροφο

$$(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x} = \csc x$$

Οι αντίστροφες συναρτήσεις $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \dots$ συμβολίζονται συχνά ως $\arcsin x, \arccos x$ κτλ.



Σχήμα 2.10 Η γραφική παράσταση της αντίστροφης g της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{4-x}$

Το σύνολο τιμών της $f(x) = \sin x$ είναι το $[-1, 1]$, οπότε η $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$.

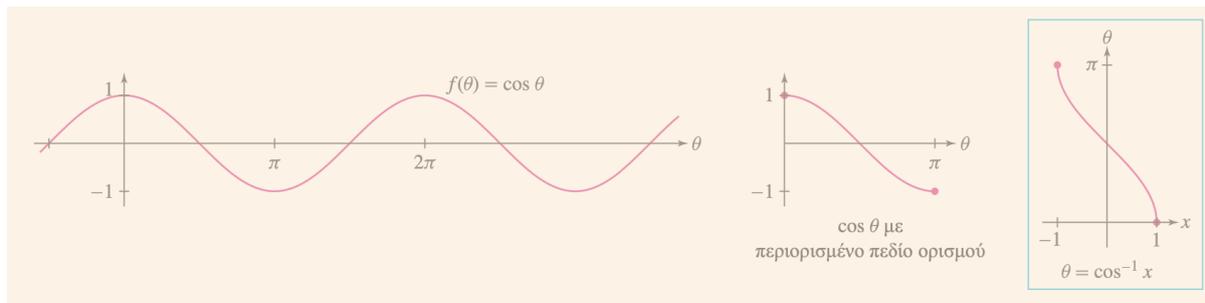
2.3 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι ένα-προς-ένα στο διάστημα $[0, \pi]$ παρά στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (Σχήμα 2.11). Με αυτό το πεδίο ορισμού η αντίστροφη ονομάζεται *συνάρτηση τόξου συνημιτόνου* και συμβολίζεται με $\theta = \cos^{-1} x$ ή $\theta = \arccos x$, με πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$. Εξ ορισμού,

Περίληψη των σχέσεων αντιστροφής ανάμεσα στις συναρτήσεις συνημιτόνου και τόξου συνημιτόνου:

$$\cos(\cos^{-1} x) = x \quad \text{για } -1 \leq x \leq 1$$

$$\cos^{-1}(\cos \theta) = \theta \quad \text{για } 0 \leq \theta \leq \pi$$

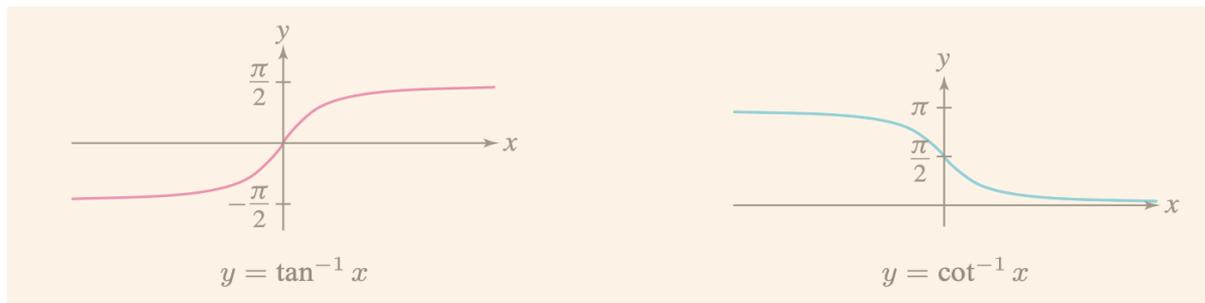


Σχήμα 2.11

Στη συνέχεια, μελετάμε τις υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Η συνάρτηση $f(\theta) = \tan \theta$ είναι ένα-προς-ένα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και η $f(\theta) = \cot \theta$ είναι ένα-προς-ένα στο διάστημα $(0, \pi)$.

Ορίζουμε τις αντιστροφές των $f(\theta) = \tan \theta$ και $f(\theta) = \cot \theta$ περιορίζοντάς τις σε αυτά τα πεδία ορισμού: $\theta = \tan^{-1} x$ είναι η μοναδική γωνία στο $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ τέτοια ώστε $\tan \theta = x$ και $\theta = \cot^{-1} x$ είναι η μοναδική γωνία στο $(0, \pi)$ τέτοια ώστε $\cot \theta = x$.

Το σύνολο τιμών των $f(\theta) = \tan \theta$ και $f(\theta) = \cot \theta$ είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί \mathbb{R} . Επομένως, οι $\theta = \tan^{-1} x$ και $\theta = \cot^{-1} x$ έχουν πεδίο ορισμού το \mathbb{R} (Σχήμα 2.12).



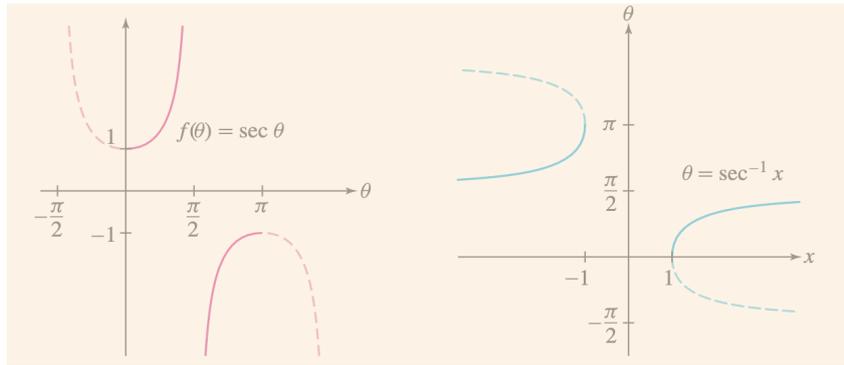
Σχήμα 2.12

Η συνάρτηση $f(\theta) = \sec \theta$ δεν ορίζεται στο $\theta = \frac{\pi}{2}$, αλλά βλέπουμε στο Σχήμα 2.13 ότι είναι ένα-προς-ένα στο $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Ομοίως, η $f(\theta) = \csc \theta$ δεν ορίζεται στο $\theta = 0$, αλλά είναι ένα-προς-ένα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ορίζουμε τις αντίστροφες συναρτήσεις ως εξής: $\theta = \sec^{-1} x$ είναι η μοναδική γωνία στο $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ τέτοια ώστε $\sec \theta = x$ και $\theta = \csc^{-1} x$ είναι η μοναδική γωνία στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοια ώστε $\csc \theta = x$.

Το Σχήμα 2.13 δείχνει ότι το σύνολο τιμών της $f(\theta) = \sec \theta$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $|x| \geq 1$. Το ίδιο ισχύει για την $f(\theta) = \csc \theta$. Προκύπτει ότι τόσο η $\theta = \sec^{-1} x$ όσο και η $\theta = \csc^{-1} x$ έχουν πεδίο ορισμού $\{x : |x| \geq 1\}$.

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής



Σχήμα 2.13 Η $f(\theta) = \sec \theta$ είναι ένα-προς-ένα στο διάστημα $[0, \pi]$ έχοντας αφαιρέσει την τιμή π .

Περίληψη 2.3.1 • Μια συνάρτηση f είναι ένα-προς-ένα σε ένα πεδίο ορισμού D αν για κάθε τιμή c η εξίσωση $f(x) = c$ έχει το πολύ μία λύση $x \in D$, ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $a, b \in D$, αν $a \neq b$, τότε $f(a) \neq f(b)$.

- Έστω ότι η f έχει πεδίο ορισμού D και σύνολο τιμών R . Η αντίστροφη f^{-1} (αν υπάρχει) είναι η μοναδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού R και σύνολο τιμών D που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{και} \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

- Η αντίστροφη της f υπάρχει αν και μόνο αν η f είναι ένα-προς-ένα στο πεδίο ορισμού της.

1.5 Αντίστροφες Συναρτήσεις

Για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση λύνουμε την $y = f(x)$ ως προς x συναρτήσει του y και παίρνουμε την $x = g(y)$. Η αντίστροφη είναι η συνάρτηση g .

- **Κριτήριο οριζόντιας ευθείας:** Η f είναι ένα-προς-ένα αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- Η γραφική παράσταση της f^{-1} προκύπτει από την αντανάκλαση της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία $y = x$.
- Το τόξο ημιτόνου και το τόξο συνημιτόνου ορίζονται για $-1 \leq x \leq 1$:

$$\theta = \sin^{-1} x \quad \text{είναι η μοναδική γωνία στο} \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{τέτοια ώστε} \quad \sin \theta = x$$

$$\theta = \cos^{-1} x \quad \text{είναι η μοναδική γωνία στο} \quad [0, \pi] \quad \text{τέτοια ώστε} \quad \cos \theta = x.$$

- Η $\tan^{-1} x$ και η $\cot^{-1} x$ ορίζονται για κάθε x :

$$\theta = \tan^{-1} x \quad \text{είναι η μοναδική γωνία στο} \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{τέτοια ώστε} \quad \tan \theta = x$$

$$\theta = \cot^{-1} x \quad \text{είναι η μοναδική γωνία στο} \quad (0, \pi) \quad \text{τέτοια ώστε} \quad \cot \theta = x.$$

- Η $\sec^{-1} x$ και η $\csc^{-1} x$ ορίζονται για $|x| \geq 1$:

$$\theta = \sec^{-1} x \quad \text{είναι η μοναδική γωνία στο} \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad \text{τέτοια ώστε} \quad \sec \theta = x$$

$$\theta = \csc^{-1} x \quad \text{είναι η μοναδική γωνία στο} \quad \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{τέτοια ώστε} \quad \csc \theta = x.$$

2.3 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ασκήσεις 2.3.2 1. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τη σχέση $f^{-1}(x) = f(x)$;

- (a) $f^{-1}(x) = x$, (b) $f(x) = 1$, (c) $f(x) = \sqrt{x}$,
(d) $f(x) = |x|$, (e) $f(x) = 1 - x$, $f(x) = x^{-1}$.

2. Γιατί η συνάρτηση f , που απεικονίζει εφήβους στις Ηνωμένες Πολιτείες στα επίθετά τους, δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ;

3. Δείξτε ότι η $f(x) = 7x - 4$ είναι αντιστρέψιμη και βρείτε την αντίστροφή της.

4. Είναι η $f(x) = x^2 + 2$ ένα-προς-ένα; Αν όχι, περιγράψτε ένα πεδίο ορισμού στο οποίο είναι ένα-προς-ένα.

5. Ποιο είναι το μεγαλύτερο διάστημα που περιέχει το μηδέν στο οποίο η $f(x) = \sin x$ είναι ένα-προς-ένα;

6. Δείξτε ότι η $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ είναι αντιστρέψιμη και βρείτε την αντίστροφή της.

- (a) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f και το σύνολο τιμών της f^{-1} ;
(b) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1} και το σύνολο τιμών της f ;

7. Επιβεβαιώστε ότι οι $f(x) = x^3 + 3$ και $g(x) = (x-3)^{1/3}$ είναι αντίστροφες δείχνοντας ότι $f(g(x)) = x$ και $g(f(x)) = x$.

8. Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση για $f(t) = \frac{t+1}{t-1}$ και $g(t) = \frac{t-1}{t+1}$.

9. Να βρείτε ένα πεδίο ορισμού στο οποίο η f είναι ένα-προς-ένα και έναν τύπο για την αντίστροφή της f περιορισμένης σε αυτό το πεδίο ορισμού. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} .

(a) $f(x) = 4 - x$ (b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ (c) $f(x) = \frac{1}{7x-3}$

(d) $f(s) = \frac{1}{s^2}$ (e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (f) $f(z) = z^3$

(g) $f(x) = \sqrt{x^3+9}$

10. Δείξτε ότι η $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$ είναι ένα-προς-ένα στο $(-\infty, 0]$ και βρείτε τον τύπο της f^{-1} για αυτό το πεδίο ορισμού της f .

11. Έστω $f(x) = x^2 - 2x$. Βρείτε ένα πεδίο ορισμού στο οποίο υπάρχει η f^{-1} και βρείτε τον τύπο της f^{-1} για αυτό το πεδίο ορισμού της f .

12. Δείξτε ότι η $f(x) = x + x^{-1}$ είναι ένα-προς-ένα στο $[1, \infty)$ και βρείτε την αντίστροφη f^{-1} . Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1} ;

13. Να ελέγξετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι ένα-προς-ένα και, αν είναι, να προσδιορίσετε τις αντίστροφες.

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

(b)

$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < -1 \\ x, & \text{αν } x \geq -1 \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

(d)

$$g(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{αν } x < 0 \\ x^2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

14. Δείξτε ότι αν η f είναι περιττή και υπάρχει η f^{-1} , τότε και η f^{-1} είναι περιττή. Δείξτε επίσης ότι μια άρτια συνάρτηση δεν έχει αντίστροφη.

2.4 Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις

μια εκθετική συνάρτηση είναι μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = b^x$, όπου $b > 0$ και $b \neq 1$. Ο αριθμός b ονομάζεται βάση. Για παράδειγμα:

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = (1.4)^x, \quad h(x) = 10^x.$$

Η περίπτωση $b = 1$ δεν θεωρείται εκθετική, επειδή τότε η συνάρτηση γίνεται σταθερή: $f(x) = 1^x = 1$.

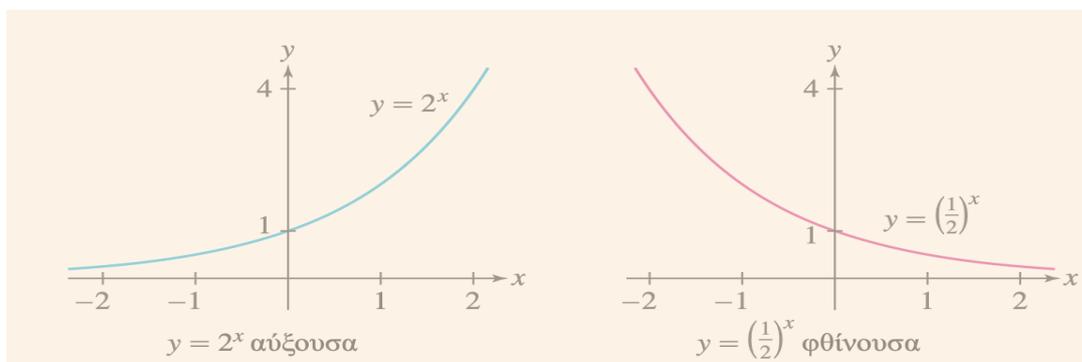
μερικές χαρακτηριστικές τιμές εκθετικών συναρτήσεων είναι:

$$2^4 = 16, \quad 2^{-3} = 0.125, \quad (1.4)^{0.8} \approx 1.309, \quad 10^{4.6} \approx 39,810.717.$$

Ιδιότητες των Εκθετικών Συναρτήσεων

Οι εκθετικές συναρτήσεις έχουν τρεις βασικές ιδιότητες:

- Είναι πάντα θετικές: Δηλαδή, $b^x > 0$ για κάθε x .
- Το σύνολο τιμών τους είναι το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών $(0, \infty)$.
- Είναι:
 - Αύξουσες, αν $b > 1$.
 - Φθίνουσες, αν $0 < b < 1$.



Σχήμα 2.14

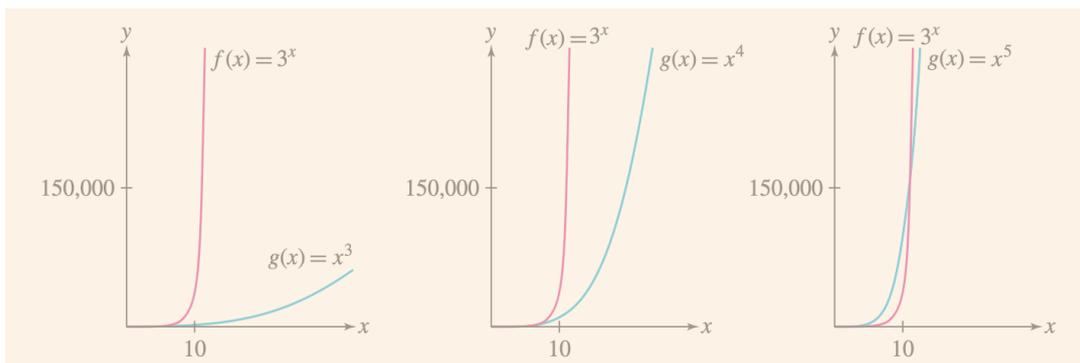
2.4 Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις

Ταχεία αύξηση των εκθετικών συναρτήσεων

Αν $b > 1$, η εκθετική συνάρτηση $f(x) = b^x$ δεν είναι απλώς αύξουσα αλλά, με κάποια έννοια, *ταχύτερα αύξουσα*. Αν και ο όρος «ταχύτερα αύξουσα» είναι ίσως υποκειμενικός, το παρακάτω ακριβές παράδειγμα είναι αληθές:

Για κάθε n , αν το x είναι θετικό και αρκετά μεγάλο, τότε η $f(x) = b^x$ αυξάνεται πιο γρήγορα από οποιαδήποτε συνάρτηση δύναμης $g(x) = x^n$ (θα το αποδείξουμε στην Ενότητα 4.5).

Για παράδειγμα, το Σχήμα 2 δείχνει ότι η $f(x) = 3^x$ τελικά ξεπερνά και αυξάνεται ταχύτερα από τις συναρτήσεις δύναμης $g(x) = x^3$, $g(x) = x^4$ και $g(x) = x^5$. Ο Πίνακας 1 συγκρίνει την $f(x) = 3^x$ με την $g(x) = x^5$.



Σχήμα 2.15 Σύγκριση της $f(x) = 3^x$ με συναρτήσεις δύναμης

Ο αριθμός e

Στην επόμενη παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε τον λογάριθμο για να μελετήσουμε τις εκθετικές συναρτήσεις. Μια ενδιαφέρουσα αποκάλυψη είναι ότι η πιο φυσική και βολική βάση για μια εκθετική συνάρτηση δεν είναι $b = 10$ ή $b = 2$, όπως θα περίμενε κανείς, αλλά ένας ειδικός άρρητος αριθμός, που συμβολίζεται με e . Η τιμή του e είναι προσεγγιστικά:

$$e \approx 2.718.$$

μια αριθμομηχανή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό συγκεκριμένων τιμών της συνάρτησης $f(x) = e^x$. Για παράδειγμα:

$$e^3 \approx 20.0855, \quad e^{-1/4} \approx 0.7788.$$

Στον λογισμό, όταν αναφερόμαστε σε εκθετική συνάρτηση, εννοούμε ότι η βάση είναι e . Ένας άλλος κοινός συμβολισμός για τη συνάρτηση e^x είναι:

$$\exp(x).$$

Ορισμός του αριθμού e

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να ορίσουμε τον αριθμό e , οι οποίοι βασίζονται στην έννοια του ορίου. Παρακάτω παρατίθενται τέσσερις χαρακτηριστικοί ορισμοί, δύο μέσω ορίων και δύο μέσω γεωμετρικών ιδιοτήτων.

- *Ορισμός μέσω ορίου:* Καθώς $x \rightarrow 0$, οι τιμές της παράστασης $(1+x)^{1/x}$ τείνουν στον αριθμό e . Εναλλακτικά, αν αντικαταστήσουμε $x = \frac{1}{t}$, τότε οι τιμές της έκφρασης $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ τείνουν στον e καθώς $t \rightarrow \infty$.

Αν και οι γραπτές αναφορές στον αριθμό π εμφανίζονται πριν από 4000 χρόνια, οι μαθηματικοί συνειδητοποίησαν τον σημαντικό ρόλο του αριθμού e πολύ αργότερα, τον 17ο αιώνα.

Ο συμβολισμός e εισήχθη από τον Leonhard Euler, ο οποίος ανακάλυψε πολλές θεμελιώδεις ιδιότητες αυτού του σημαντικού αριθμού.

Ο αριθμός e έχει υπολογιστεί με ακρίβεια που ξεπερνά τα 100 δισεκατομμύρια δεκαδικά ψηφία. Εδώ είναι τα πρώτα του ψηφία:

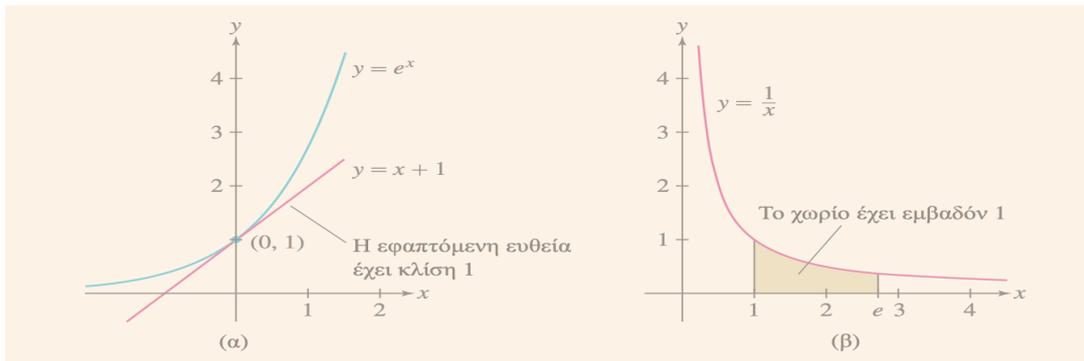
$$e = 2.71828182845904523536 \dots$$

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

- **Ορισμός μέσω άπειρης σειράς:** Ο αριθμός e προκύπτει προσθέτοντας διαδοχικά όρους στο άθροισμα:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

- **Γεωμετρικός ορισμός 1:** Από όλες τις εκθετικές συναρτήσεις $y = b^x$, η βάση $b = e$ είναι η μοναδική για την οποία η κλίση της εφαπτόμενης στο σημείο $(0, 1)$ είναι ίση με 1.
- **Γεωμετρικός ορισμός 2:** Ο αριθμός e είναι ο μοναδικός τέτοιος ώστε το εμβαδόν της περιοχής κάτω από την υπερβολή $y = \frac{1}{x}$ για $1 \leq x \leq e$ είναι ίσο με 1.



Σχήμα 2.16

Λογάριθμοι

Οι λογαριθμικές συναρτήσεις είναι οι αντίστροφες των εκθετικών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, αν $b > 0$ και $b \neq 1$, τότε ο λογάριθμος με βάση b , που συμβολίζεται ως $\log_b x$, είναι η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = b^x$.

Ορισμός 2.4.1 Ορίζουμε ότι:

$$y = \log_b x \iff b^y = x, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Άρα, οι βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων είναι:

$$b^{\log_b x} = x \quad \text{και} \quad \log_b(b^x) = x, \quad x > 0.$$

Ο $\log_b x$ είναι ο αριθμός στον οποίο πρέπει να υψώσουμε το b για να πάρουμε το x .

$$\log_2(8) = 3 \quad \text{επειδή} \quad 2^3 = 8,$$

$$\log_{10}(1) = 0 \quad \text{επειδή} \quad 10^0 = 1,$$

$$\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2 \quad \text{επειδή} \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Ο λογάριθμος με βάση το e (ο φυσικός αριθμός $e \approx 2.718$) ονομάζεται *φυσικός λογάριθμος* και συμβολίζεται ως $\ln x$:

$$\ln x = \log_e x, \quad x > 0.$$

2.4 Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις

Οι λογάριθμοι μπορούν να υπολογιστούν με αριθμομηχανή. Για παράδειγμα:

$$\ln 17 \approx 2.83321 \quad \text{επειδή} \quad e^{2.83321} \approx 17.$$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.17, οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^x$ είναι αντίστροφες, γεγονός που σημαίνει ότι ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$e^{\ln x} = x, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad \ln(e^x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Υπενθυμίζεται ότι για την εκθετική συνάρτηση $f(x) = b^x$:

- Το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} .
- Το σύνολο τιμών της είναι όλοι οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\{x : x > 0\}$.

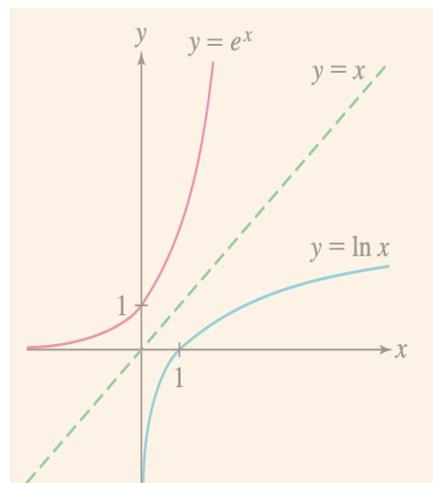
Αφού το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών αντιστρέφονται στην αντίστροφη συνάρτηση $\log_b x$:

- Το πεδίο ορισμού της $\log_b x$ είναι $\{x : x > 0\}$ (θετικοί πραγματικοί αριθμοί).
- Το σύνολο τιμών της $\log_b x$ είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} .

Αν $b > 1$, τότε ο $\log_b x$ έχει τις εξής ιδιότητες:

- Είναι θετικός όταν $x > 1$.
- Είναι αρνητικός όταν $0 < x < 1$.

Το Σχήμα 2.17 δείχνει αυτά τα χαρακτηριστικά για τη βάση $b = e$. Λάβετε υπόψη ότι ο λογάριθμος ενός αρνητικού αριθμού δεν ορίζεται. Για παράδειγμα, ο $\log_{10}(-2)$ δεν υπάρχει, διότι η εξίσωση $10^y = -2$ δεν έχει λύση. Για κάθε ιδιότητα των εκθετικών συναρτήσεων, υπάρχει αντίστοιχη ιδιότητα για τους λογαρίθμους. Αυτές οι ιδιότητες συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα 2.1.



Σχήμα 2.17

Ιδιότητες των λογαρίθμων

	Ιδιότητα	Παράδειγμα
Λογάριθμος του 1	$\log_b(1) = 0$	
Λογάριθμος του b	$\log_b(b) = 1$	
Γινόμενα	$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$	$\log_5(2 \cdot 3) = \log_5 2 + \log_5 3$
Πηλίκα	$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$	$\log_2\left(\frac{3}{7}\right) = \log_2 3 - \log_2 7$
Αντίστροφοι	$\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b x$	$\log_2\left(\frac{1}{7}\right) = -\log_2 7$
Δυνάμεις (οποιοδήποτε n)	$\log_b(x^n) = n \log_b x$	$\log_{10}(8^2) = 2 \cdot \log_{10} 8$

Πίνακας 2.1

Μπορούμε να αλλάξουμε τη βάση στις εκθετικές και τις λογαριθμικές συναρτήσεις χρησιμοποιώντας τους παρακάτω τύπους αλλαγής βάσης, οι οποίοι αποδεικνύονται μέσω των ιδιοτήτων των εκθετικών και των λογαρίθμων:

$$b^x = a^{x \cdot \log_a b}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad b^x = e^{x \ln b}, \quad b > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

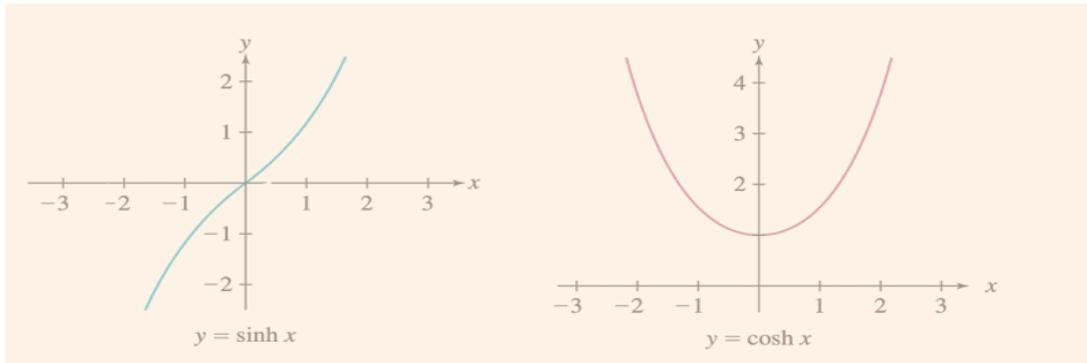
$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \quad b > 0, \quad a > 0, \quad x > 0, \quad \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}, \quad b > 0, \quad x > 0.$$

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

Οι υπερβολικές συναρτήσεις είναι συγκεκριμένοι συνδυασμοί των e^x και e^{-x} , που διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη μηχανική και στη φυσική.

Το υπερβολικό ημίτονο και συνημίτονο φαίνονται στο Σχήμα 2.18 και ορίζονται ως εξής:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$



Σχήμα 2.18 Οι συναρτήσεις υπερβολικού ημιτόνου και συνημιτόνου

Όπως υποδηλώνει η ορολογία, υπάρχουν ομοιότητες μεταξύ των υπερβολικών και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Παρακάτω παρατίθενται μερικά παραδείγματα:

- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστοιχες υπερβολικές έχουν την ίδια ισοτιμία. Έτσι:

$$f(x) = \sin x \text{ και } f(x) = \sinh x \text{ είναι περιττές, ενώ } f(x) = \cos x \text{ και } f(x) = \cosh x \text{ είναι άρτιες.}$$

- Η βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ έχει υπερβολικό ανάλογο:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

- Οι τύποι αθροίσματος για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις έχουν υπερβολικό ανάλογο:

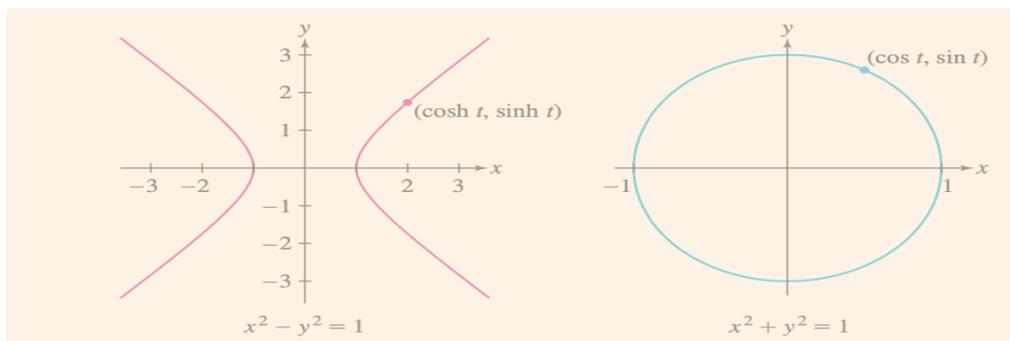
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

και

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

- Λόγω της ταυτότητας $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, το σημείο $(\cosh t, \sinh t)$ βρίσκεται πάνω στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$, όπως τα $(\cos t, \sin t)$ βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ (Σχήμα 2.19).

2.4 Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις



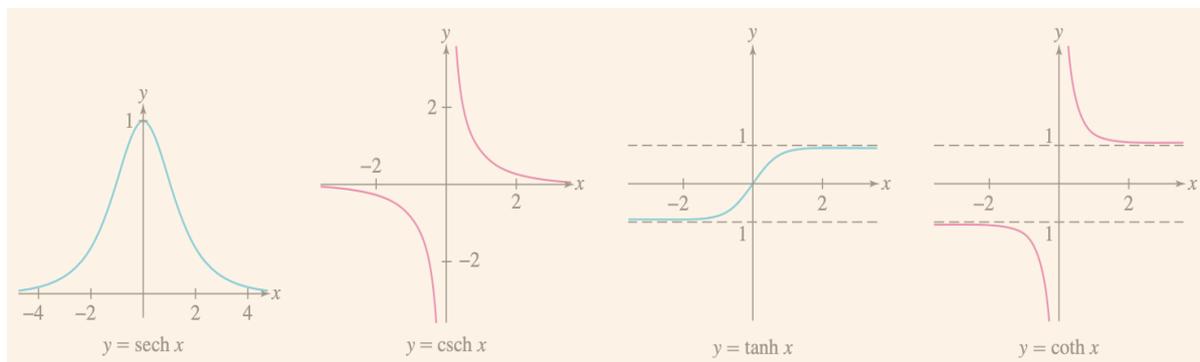
Σχήμα 2.19 υπερβολικής εφαπτομένη

- Οι συναρτήσεις της υπερβολικής εφαπτομένης, συνεφαπτομένης, τέμνουσας και συντέμνουσας (δείτε Σχήμα 2.20) ορίζονται όπως και οι αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

και

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$



Σχήμα 2.20

Περίληψη 2.4.2 • Η $f(x) = b^x$ είναι η εκθετική συνάρτηση με βάση b ($b > 0$ και $b \neq 1$).

- Η $f(x) = b^x$ είναι αύξουσα αν $b > 1$ και φθίνουσα αν $b < 1$.
- Ο αριθμός $e \approx 2.718$.
- Για $b > 0$ με $b \neq 1$, η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_b x$ είναι η αντίστροφη της $f(x) = b^x$:

$$y = \log_b x \iff x = b^y.$$
- Ο φυσικός λογάριθμος είναι ο λογάριθμος με βάση e και συμβολίζεται ως $\ln x$:

$$e^{\ln x} = x \quad \text{και} \quad \ln(e^x) = x \quad \text{για κάθε } x > 0.$$
- Σημαντικές λογαριθμικές ιδιότητες:
 - (i) $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

- (ii) $\log_b \left(\frac{x}{y} \right) = \log_b x - \log_b y$
- (iii) $\log_b (x^n) = n \log_b x$
- (iv) $\log_b 1 = 0$ και $\log_b b = 1$

• Τύποι αλλαγής βάσης:

$$b^x = a^{x \cdot \log_a b}, \quad b^x = e^{x \ln b}, \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \quad \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}.$$

• Το υπερβολικό ημίτονο και συνημίτονο:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{περιττή συνάρτηση}), \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{άρτια συνάρτηση}).$$

• Υπόλοιπες υπερβολικές συναρτήσεις:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}.$$

• Βασική ταυτότητα:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

• Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις και πεδίο ορισμού:

$$f(x) = \sinh^{-1} x \quad \text{για κάθε } x,$$

$$f(x) = \cosh^{-1} x \quad \text{για } x \geq 1,$$

$$f(x) = \tanh^{-1} x \quad \text{για } |x| < 1,$$

$$f(x) = \coth^{-1} x \quad \text{για } |x| > 1,$$

$$f(x) = \operatorname{sech}^{-1} x \quad \text{για } 0 < x \leq 1,$$

$$f(x) = \operatorname{csch}^{-1} x \quad \text{για } x \neq 0.$$

2.5 Κατασκευή νέων συναρτήσεων

Αν δίνονται οι συναρτήσεις f και g , μπορούμε να κατασκευάσουμε νέες συναρτήσεις παίρνοντας το άθροισμα, τη διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο των συναρτήσεων:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \quad \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{με } g(x) \neq 0).$$

Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sin x$, τότε:

$$(f + g)(x) = x^2 + \sin x, \quad (f - g)(x) = x^2 - \sin x,$$

$$(f \cdot g)(x) = x^2 \sin x, \quad \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{x^2}{\sin x}.$$

μπορούμε επίσης να πολλαπλασιάσουμε συναρτήσεις με σταθερές. Μία συνάρτηση της μορφής

$$h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x) \quad (c_1, c_2 \text{ σταθερές}),$$

ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός των f και g .

2.5.1 Σύνθεση Συναρτήσεων

Οι σύνθετες συναρτήσεις εμφανίστηκαν στις μελέτες της μηχανικής και της φυσικής, όπου συχνά μια φυσική ποσότητα εξαρτάται από άλλη μέσω ενδιάμεσων σχέσεων. Στον 18ο αιώνα, ο Euler συστηματοποίησε την έννοια της συνάρτησης με τη μορφή που την αναγνωρίζουμε σήμερα, χρησιμοποιώντας την ως μαθηματικό εργαλείο για την ανάλυση. Ο ίδιος επεξεργάστηκε τη σύνθεση συναρτήσεων ως διαδικασία που ενώνει δύο ή περισσότερες συναρτήσεις σε μία ενιαία. Εισήγαγε την αναπαράσταση $f(x)$, που διευκόλυνε τη σύνθεση με μία συνάρτηση $g(x)$ μέσω της αντικατάστασης $g(f(x))$. Στα έργα μεγάλων μαθηματικών όπως του Newton και του Lagrange, η σύνθεση συναρτήσεων χρησιμοποιήθηκε στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων και στην ανάλυση καμπυλών. Η σύνθεση συναρτήσεων χρησιμοποιήθηκε επίσης στη γεωμετρία και στους μετασχηματισμούς (π.χ. περιστροφές και κλίμακες), ειδικά στον καθορισμό συστημάτων συντεταγμένων. Με την έλευση της αλγεβρικής θεωρίας ομάδων τον 19ο αιώνα, μαθηματικοί όπως ο Galois έδειξαν ότι η σύνθεση συναρτήσεων συνδέεται άμεσα με τη συμμετρία και τις ομάδες μετασχηματισμών. Στον 20ό αιώνα, η σύνθεση συναρτήσεων έγινε κρίσιμο εργαλείο στη μαθηματική ανάλυση, τη θεωρία υπολογισμών και την πληροφορική. Η έννοια του συνδυασμού διαδικασιών και αλγορίθμων βασίζεται στην ίδια θεμελιώδη ιδέα: την εφαρμογή μιας λειτουργίας στο αποτέλεσμα μιας άλλης. Γενικά, η σύνθεση συναρτήσεων είναι ουσιαστικά μια αναπαράσταση της αλληλουχίας διαδικασιών. Είτε πρόκειται για μαθηματικά προβλήματα είτε για πραγματικές εφαρμογές (όπως στη φυσική, στην οικονομία ή στον προγραμματισμό), η ιδέα του να εφαρμόζουμε λειτουργίες σε στάδια είναι απαραίτητη για την κατανόηση σύνθετων συστημάτων. Η ιστορική εξέλιξη της σύνθεσης συναρτήσεων μάς δείχνει πώς μια ιδέα, που αρχικά δημιουργήθηκε για να περιγράψει γεωμετρικά φαινόμενα, εξελίχθηκε σε κεντρικό εργαλείο για την ανάλυση συστημάτων και τη λύση προβλημάτων σε κάθε επιστήμη.

Η σύνθεση είναι λοιπόν ένας άλλος σημαντικός τρόπος κατασκευής νέων συναρτήσεων. Η σύνθεση των συναρτήσεων f και g είναι η συνάρτηση $f \circ g$ που ορίζεται ως

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Η τιμή της h στο x μπορεί να οριστεί σε δύο φάσεις ως εξής:

- (a) Στο $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $y = x^2 - 1$ και στη συνέχεια
- (b) στο $y = x^2 - 1$ αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $\sqrt{y} = \sqrt{x^2 - 1}$, εφόσον $y = x^2 - 1 \geq 0$.

Στη διαδικασία αυτή εμφανίζονται δύο συναρτήσεις:

- (a) Η $g(x) = x^2 - 1$ που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}$ (α' φάση), και
- (b) Η $f(y) = \sqrt{y}$, που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $B = [0, +\infty)$ (β' φάση).

Έτσι, η τιμή της $h = f \circ g$ στο x γράφεται τελικά

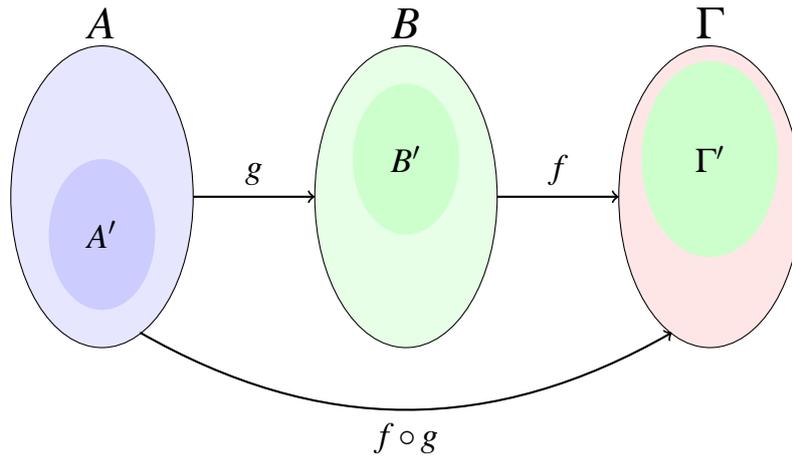
$$h(x) = f(g(x)).$$

Η συνάρτηση h λέγεται σύνθεση της g με την f και συμβολίζεται με $f \circ g$.

Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ δεν είναι ολόκληρο το πεδίο ορισμού A της g , αλλά περιορίζεται στα $x \in A$ για τα οποία η τιμή $g(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού B της f , δηλαδή είναι το σύνολο $A' = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Γενικά το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι:

$$\text{Πεδίο ορισμού } (f \circ g) = \{x \in A \mid g(x) \in B\}.$$

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής



Σχήμα 2.21 Διάγραμμα σύνθεσης συναρτήσεων f , g , και $f \circ g$

Ορισμός 2.5.1 Έστω δύο συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού D_f και D_g αντίστοιχα. Τότε ορίζω τη συνάρτηση

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

και διαβάζω “σύνθεση της f με τη g ”. Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι το

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}.$$

Παράδειγμα 2.5.2 Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις:

(a) $f \circ g$ και (b) $g \circ f$

Λύση: (a) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = (0, +\infty)$, ενώ η g το $D_g = [0, +\infty)$. Για να ορίζεται η παράσταση $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ πρέπει

$$x \in D_f \quad \text{και} \quad f(x) \in D_g$$

ή ισοδύναμα,

$$\{x > 0 \mid \ln x \geq 0\} \Rightarrow \ln x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1.$$

Δηλαδή, πρέπει $x \geq 1$. Επομένως η $f \circ g$ ορίζεται και είναι:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{\ln x}, \quad \text{για κάθε } x \in [1, +\infty).$$

(b) Για να ορίζεται η παράσταση $f(g(x))$ πρέπει

$$x \in D_g \quad \text{και} \quad g(x) \in D_f$$

ή ισοδύναμα

$$\{x \geq 0 \mid \sqrt{x} > 0\} \Rightarrow x > 0.$$

2.6 Όριο και Συνέχεια Συνάρτησης

Δηλαδή, πρέπει $x > 0$. Επομένως, ορίζεται η $f \circ g$ και είναι:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \ln \sqrt{x}, \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

2.6 Όριο και Συνέχεια Συνάρτησης

Η έννοια του ορίου, που έχει τις ρίζες της στη μαθηματική σκέψη της αρχαίας Ελλάδας, και ιδιαίτερα στη μέθοδο της εξάντλησης που ανέπτυξαν ο Εύδοξος και ο Ευκλείδης, αποτελεί θεμελιώδη λίθο της μαθηματικής ανάλυσης. Αυτή η μέθοδος, η οποία χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων μέσω προσεγγιστικών διαδικασιών, διαμόρφωσε το πρώτο παράδειγμα της ιδέας της σύγκλισης, προσφέροντας μια πρώιμη αλλά σαφή μορφή της έννοιας του ορίου. Η συμβολή του Αρχιμήδη στη μέθοδο της εξάντλησης, με τη χρήση διαισθητικών τεχνικών που προσεγγίζουν τον ολοκληρωτικό λογισμό, επεκτάθηκε περαιτέρω στον 17ο αιώνα από τους Newton και Leibniz. Αυτοί εισήγαγαν την έννοια της παραγώγου και του ολοκληρώματος, τοποθετώντας το όριο στο επίκεντρο του απειροστικού λογισμού. Η αυστηροποίηση της έννοιας του ορίου, όπως καθορίστηκε από τους Cauchy και Weierstrass τον 19ο αιώνα, μέσω του ε - δ -ορισμού, έθεσε τα θεμέλια για τη μαθηματική ανάλυση, επιτρέποντας την απόδειξη θεμελιωδών θεωρημάτων και τη μαθηματική αυστηρότητα. Η έννοια του ορίου γεφυρώνει τη διακριτή και τη συνεχή μαθηματική λογική, δίνοντας τη δυνατότητα περιγραφής και κατανόησης συνεχών φαινομένων και αλλαγών. Είναι κεντρική για τη μαθηματική ανάλυση, όχι μόνο ως θεωρητική έννοια, αλλά και ως πρακτικό εργαλείο για την κατανόηση φυσικών, οικονομικών, και τεχνολογικών συστημάτων. Η ιστορική εξέλιξη και η καθολική εφαρμογή της έννοιας του ορίου αποδεικνύει ότι αντιπροσωπεύει, πράγματι, την καρδιά της μαθηματικής ανάλυσης, γεφυρώνοντας την αρχαία σοφία με τη σύγχρονη μαθηματική σκέψη. Στην πραγματικότητα, η έννοια του ορίου στα μαθηματικά συνδέεται άμεσα με την έννοια του απείρου, καθώς περιγράφει τη συμπεριφορά μιας μεταβλητής ή μιας συνάρτησης όταν πλησιάζει, χωρίς ποτέ να φτάνει, μια συγκεκριμένη τιμή. Η λέξη «τείνει» υποδηλώνει την αέναη προσέγγιση, την αδυναμία επίτευξης του στόχου, όταν το πλήθος των τιμών μιας μεταβλητής είναι άπειρο. Σε ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών, θα μπορούσαμε να περάσουμε από όλες τις τιμές και να φτάσουμε σε οποιαδήποτε συγκεκριμένη τιμή. Όμως, στο πλαίσιο του απείρου, αυτό είναι αδύνατο, καθώς η διαδικασία δεν έχει τέλος. Σε αυτήν την περίπτωση, αναζητούμε αν η μεταβλητή εμφανίζει την τάση να πλησιάζει έναν συγκεκριμένο αριθμό και μόνο αυτόν. Όταν αυτό συμβαίνει, τότε λέμε ότι η μεταβλητή τείνει σε αυτόν τον αριθμό. Αυτή η περιγραφή της οριακής διαδικασίας ενσωματώνει την ουσία της έννοιας του ορίου. Ωστόσο, παραμένει ανεπαρκής για τη μαθηματική αυστηρότητα, καθώς δεν καθορίζει ποσοτικά τι σημαίνει «πλησιάζει». Για να δώσουμε έναν μαθηματικά αποδεκτό ορισμό, πρέπει να εισάγουμε την ιδέα της ακρίβειας που παρέχει η τεχνική ε - δ . Στην περίπτωση μιας ακολουθίας, όπως για παράδειγμα μιας ακολουθίας που έχει για όριο το μηδέν, απαιτείται να εξασφαλίζεται ότι όλοι οι όροι της, από κάποιο σημείο και μετά, βρίσκονται τόσο κοντά στο μηδέν όσο θέλουμε. Δηλαδή, για οποιοδήποτε προκαθορισμένο θετικό αριθμό ε , υπάρχει ένας όρος n_0 της ακολουθίας τέτοιος ώστε όλοι οι επόμενοι όροι της ακολουθίας να βρίσκονται εντός του διαστήματος $(-\varepsilon, +\varepsilon)$. Η απαίτηση αυτή δεν είναι απλώς μια μαθηματική σύμβαση, αλλά μια αναγκαία συνθήκη που διασφαλίζει την ακρίβεια και την αυστηρότητα στις μαθηματικές αποδείξεις. Μέσω αυτής της προσέγγισης, η έννοια του ορίου γίνεται ένα ισχυρό εργαλείο για την ανάλυση και την κατανόηση φαινομένων που σχετίζονται με τη συνέχεια, τη σύγκλιση και τη μεταβολή. Αυτός ο τυπικός ορισμός του ορίου, όπως αναπτύχθηκε από τους μαθηματικούς του 19ου αιώνα, όπως ο Cauchy και ο Weierstrass, γεφυρώνει τη διαισθητική κατανόηση του απείρου με την αυστηρότητα που απαιτείται για τη μαθηματική ανάλυση. Η έννοια του ορίου, αν και προέρχεται από τα καθαρά μαθηματικά, ξεπερνά τα όρια της θεωρίας και καθίσταται απαραίτητη για την εφαρμογή του Λογισμού σε ένα ευρύ φάσμα επιστημών και τεχνολογιών. Στη φυσική, το όριο χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της στιγμιαίας ταχύτητας, που αποτελεί τη βάση της μηχανικής και της κίνησης. Στην οικονομία, το όριο συμβάλλει στην ανάλυση τάσεων, στην κατανόηση μεταβολών και στη μοντελοποίηση πολύπλοκων συστημάτων που επηρεάζουν αγορές και κοινωνίες. Η ευρύτητα

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

εφαρμογής της έννοιας του ορίου εκτείνεται και σε άλλες επιστήμες, όπως η χημεία, όπου χρησιμοποιείται για την κατανόηση αντιδράσεων σε συνθήκες ισορροπίας, και η βιολογία, για τη μελέτη ρυθμών ανάπτυξης ή μεταβολών πληθυσμών. Στη μηχανική, επιτρέπει την ανάλυση κατανομών δυνάμεων και πιέσεων σε κατασκευές και συστήματα, ενώ στην πληροφορική βρίσκει εφαρμογή σε αλγόριθμους που βασίζονται στη σύγκλιση. Συνοψίζοντας, το όριο μέσω του Λογισμού αποτελεί ένα απαραίτητο εργαλείο για τη βαθύτερη κατανόηση και τη μελέτη φαινομένων που χαρακτηρίζονται από συνεχή εξέλιξη. Εξασφαλίζει την ακρίβεια στις μαθηματικές προσεγγίσεις, επιτρέποντας την ανάλυση, την πρόβλεψη και τη διαχείριση πολύπλοκων συστημάτων. Ως εκ τούτου, το όριο δεν είναι μόνο θεμέλιο της μαθηματικής ανάλυσης, αλλά και ένας από τους κύριους πυλώνες της σύγχρονης επιστήμης και τεχνολογίας, αποτελώντας οδηγό για την πρόοδο και την κατανόηση του φυσικού κόσμου.

Όταν θέλουμε να ορίσουμε το όριο μιας συνάρτησης στη μαθηματική ανάλυση, θεμελιώδης έννοια είναι αυτή του σημείου συσσώρευσης. Συγκεκριμένα, το όριο μιας συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0 έχει νόημα μόνο αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f . Αυτό συμβαίνει γιατί, για να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της $f(x)$ όσο το x προσεγγίζει το x_0 , πρέπει να υπάρχουν τιμές του x , διαφορετικές από το x_0 , στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που είναι "αρκετά κοντά" στο x_0 . Με βάση αυτό έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Θεώρημα 2.6.1 Σημείου Συσσώρευσης Έστω A ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών και έστω x_0 ένας πραγματικός αριθμός. Λέμε ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν:

$$(\forall \delta > 0) (\exists x \in A) \text{ με } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ και } x \neq x_0.$$

Ας περάσουμε τώρα στον ακριβή και τυπικό ορισμό του ορίου, ο οποίος αποτυπώνει με μαθηματική αυστηρότητα την έννοια της προσέγγισης ενός αριθμού από μια συνάρτηση.

Ορισμός 2.6.2 Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται για κάθε x σε ένα ανοιχτό διάστημα (a, b) που περιέχει το x_0 αλλά όχι απαραίτητα στο x_0 . Λέμε ότι

το όριο της $f(x)$ είναι ίσο με τον αριθμό L καθώς το x τείνει στο x_0 ,

αν η $|f(x) - L|$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή, παίρνοντας το x όσοδήποτε κοντά στο x_0 (αλλά όχι ίσο με το x_0). Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Ο τυπικός ορισμός του ορίου μιας συνάρτησης είναι ο εξής: Η συνάρτηση $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει όριο το $L \in \mathbb{R}$ στο $x = x_0$ ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$) αν και μόνο αν:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) : [\forall x \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon].$$

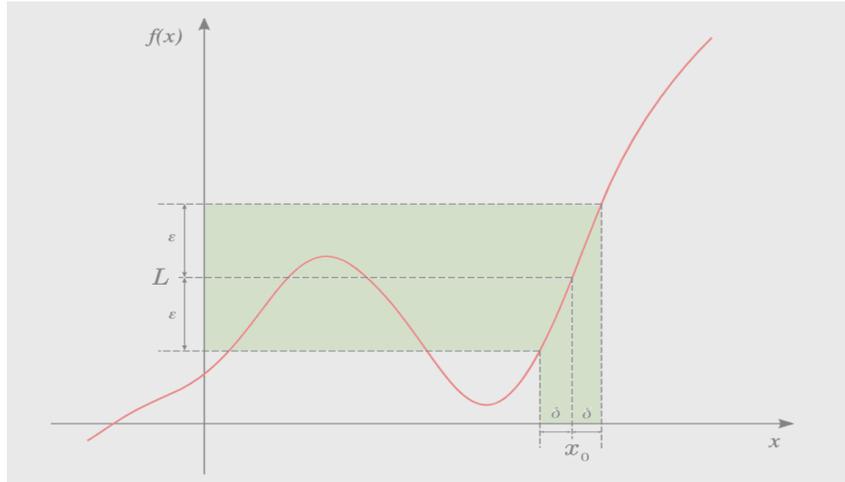
Σε μια πιο ακριβή εκδοχή του ορισμού του ορίου, η πρόταση «η $|f(x) - L|$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή» εκφράζεται ως:

«η $|f(x) - L|$ μπορεί να γίνει μικρότερη από ε για οποιονδήποτε μικρό αριθμό $\varepsilon > 0$ », και η πρόταση «παίρνοντας το x όσοδήποτε κοντά στο x_0 » εκφράζεται ως:

«βρίσκοντας έναν μικρό αριθμό $\delta > 0$ και παίρνοντας $|x - x_0| < \delta$ ».

Το Σχήμα 2.22 παρουσιάζει την εικόνα, την αναπαράσταση, και τη γεωμετρική προσέγγιση του ορισμού που συζητήσαμε. Ουσιαστικά, απεικονίζει πώς η θεωρητική έννοια που ορίσαμε συνδέεται με μια οπτική και γεωμετρική ερμηνεία, διευκολύνοντας την κατανόηση μέσα από μια πιο παραστατική προσέγγιση.

2.6 Όριο και Συνέχεια Συνάρτησης



Σχήμα 2.22

Θεώρημα 2.6.3 Μια συνάρτηση $f(x)$ συγκλίνει στο L όταν $x \rightarrow x_0$ αν, και μόνο αν, για κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ με $x_n \rightarrow x_0$ (και $x_n \neq x_0$), ισχύει:

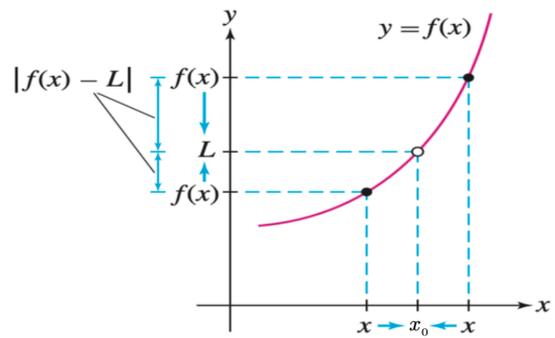
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

Άλλοι Τύποι Υπολογισμού του Ορίου

(a) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - L) = 0$

(b) Προσθετικός τύπος:
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = L$

(c) Πολλαπλασιαστικός τύπος:
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 \cdot h) = L$



Σχήμα 2.23 Καθώς το $x \rightarrow x_0$ η $f(x) \rightarrow L$.

Παράδειγμα 2.6.4 Έστω $f(x) = 5$ και $g(x) = 3x + 1$. Χρησιμοποιήστε τον παραπάνω ορισμό για να επαληθεύσετε τα ακόλουθα όρια:

(a) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 5$

(b) $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 13$

Λύση: (a) Για να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 5$, πρέπει να δείξουμε ότι η $|f(x) - 5|$ γίνεται αυθαίρετα μικρή όταν το x είναι όσοδήποτε κοντά (αλλά όχι ίσο) στο 7. Αλλά παρατηρούμε ότι $|f(x) - 5| = |5 - 5| = 0$ για κάθε x , άρα αυτό που έπρεπε να δείξουμε είναι προφανές.

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

(b) Για να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 13$, πρέπει να δείξουμε ότι η $|g(x) - 13|$ γίνεται αυθαίρετα μικρή όταν το x είναι όσοδήποτε κοντά (αλλά όχι ίσο) στο 4. Έχουμε:

$$|g(x) - 13| = |(3x + 1) - 13| = |3x - 12| = 3|x - 4|$$

Επειδή η $|g(x) - 13|$ είναι πολλαπλάσιο του $|x - 4|$, μπορούμε να κάνουμε την απόσταση $|g(x) - 13|$ αυθαίρετα μικρή θεωρώντας το x αρκετά κοντά στο 4, δηλαδή, $|x - 4| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Παράδειγμα 2.6.5 Στις παρακάτω συναρτήσεις να επιβεβαιώσετε κάθε όριο χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} (5x + 2) = 17$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} (4x^2 + 2x + 5) = 5$$

Λύση: (a) Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = 5x + 2$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι το όριο της $f(x)$ καθώς το $x \rightarrow 3$ είναι το 17. Δηλαδή, πρέπει να δείξουμε ότι η $|f(x) - 17|$ γίνεται αυθαίρετα μικρή όταν το x είναι όσοδήποτε κοντά (αλλά όχι ίσο) στο 3. Έχουμε

$$|f(x) - 17| = |(5x + 2) - 17| = |5x - 15| = 5|x - 3|$$

Επειδή η $|f(x) - 17|$ είναι πολλαπλάσιο του $|x - 3|$, μπορούμε να κάνουμε την απόσταση $|f(x) - 17|$ αυθαίρετα μικρή θεωρώντας το x αρκετά κοντά στο 3, δηλαδή, $|x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{5}$.

(b) Σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου, πρέπει να δείξουμε ότι:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε } 0 < |x - 0| < \delta \implies |(4x^2 + 2x + 5) - 5| < \varepsilon$$

Αρχικά, υπολογίζουμε:

$$|(4x^2 + 2x + 5) - 5| = |4x^2 + 2x| \leq |4x^2| + |2x| \quad (\text{λόγω της τριγωνικής ανισότητας}).$$

Επιλογή του δ : Θέλουμε:

$$4x^2 + 2|x| < \varepsilon.$$

Για να απλοποιήσουμε, επιλέγουμε δ μικρότερο του 1 ($\delta \leq 1$), ώστε $|x| < \delta$. Επομένως:

$$4\delta^2 + 2\delta \leq \varepsilon \rightarrow 4\delta^2 + 2\delta - \varepsilon < 0.$$

Επειδή η διακρίνουσα του τριωνύμου $\delta^2 + 2\delta - \varepsilon = 0$ είναι θετική και συνεπώς υπάρχουν δύο πραγματικές ρίζες με μία θετική $r = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{4}$ συμπαιρνουμε ότι υπάρχει $\delta^* > 0$ ώστε $(\delta^*)^2 + 2\delta^* < \varepsilon$ Άρα για

$$\delta = \min(1, \delta^*)$$

ικανοποιείται ο ορισμός.

2.6 Όριο και Συνέχεια Συνάρτησης

2.6.1 Πλευρικά Όρια

Τα όρια που μελετήθηκαν ως τώρα είναι αμφίπλευρα. Για να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, είναι απαραίτητο να ελέγξουμε ότι η $f(x)$ συγκλίνει στο L καθώς το x τείνει στο x_0 μέσω τιμών τόσο μεγαλύτερων όσο και μικρότερων από το x_0 . Σε κάποιες περιπτώσεις η $f(x)$ μπορεί να πλησιάζει την τιμή L από τη μία πλευρά του x_0 χωρίς απαραίτητα να το πλησιάζει και από την άλλη πλευρά, ή η $f(x)$ μπορεί να ορίζεται σε μία μόνο πλευρά του x_0 . Για παράδειγμα, αν ο τύπος της $f(x)$ αλλάζει εκατέρωθεν του x_0 όπως η

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x < x_0, \\ h(x), & x \geq x_0, \end{cases}$$

είναι σημαντικό να εργαστούμε με πλευρικά όρια.

Για αυτόν τον λόγο ορίζουμε τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad (\text{όριο από αριστερά}), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad (\text{όριο από δεξιά}).$$

Δηλαδή, γράφοντας $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ εννοούμε ότι $x < x_0$, ενώ γράφοντας $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ εννοούμε ότι $x > x_0$.

Ορισμός 2.6.6 Η συνάρτηση $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει:

(a) Δεξιό όριο το $L \in \mathbb{R}$ στο $x = x_0$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$) αν και μόνο αν:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : [\forall x \text{ με } x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon].$$

(b) Αριστερό όριο το $L \in \mathbb{R}$ στο $x = x_0$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$) αν και μόνο αν:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : [\forall x \text{ με } x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - L| < \varepsilon].$$

Το όριο υπάρχει αν και μόνο αν τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα. Διαφορετικά το όριο δεν υπάρχει.

Για να μην υπάρχει κάποιο όριο, αρκεί να μην υπάρχουν τα πλευρικά του ή να υπάρχουν τα πλευρικά όρια αλλά να είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_2,$$

με $\ell_1 \neq \ell_2$ και $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ δεν υπάρχει.

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

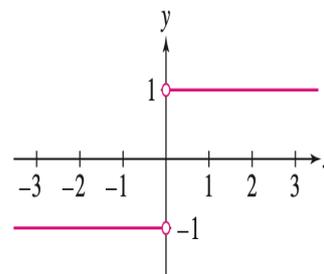
Παράδειγμα 2.6.7 Να διερευνήσετε τα πλευρικά όρια της $f(x) = \frac{x}{|x|}$ καθώς $x \rightarrow 0$. Υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$;

Λύση. Το Σχήμα 2.24 δείχνει τι συμβαίνει. Για $x < 0$:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1.$$

Ως εκ τούτου, το όριο από αριστερά είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1.$$



Σχήμα 2.24 Γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

Αλλά για $x > 0$:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1.$$

Επομένως, το όριο από δεξιά είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Αυτά τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, άρα το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 2.6.8 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} a^2x^4 + 1, & x \leq -1 \\ 2ax^3 + b^2x, & x > -1 \end{cases}.$$

Να βρείτε τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι ο τύπος της συνάρτησης f μεταβάλλεται καθώς $x \rightarrow -1$. Για να υπάρχει λοιπόν το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x).$$

Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (a^2x^4 + 1) = a^2 + 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2ax^3 + b^2x) = -2a - b^2.$$

Άρα:

2.6 Όριο και Συνέχεια Συνάρτησης

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \iff a^2 + 1 = -2a - b^2.$$

Επομένως, έχουμε:

$$a^2 + 2a + 1 + b^2 = 0 \iff (a + 1)^2 + b^2 = 0 \iff a = -1 \text{ και } b = 0.$$

Ορισμός 2.6.9 Η συνάρτηση $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει:

(a) Όριο το $+\infty$ στο $x = x_0$ ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$)

αν και μόνο αν:

$$(\forall M > 0)(\exists \delta > 0) : [\forall x \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M].$$

(b) Όριο το $-\infty$ στο $x = x_0$ ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$)

αν και μόνο αν:

$$(\forall M > 0)(\exists \delta > 0) : [\forall x \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -M].$$

(c) Όριο έναν πεπερασμένο αριθμό L όταν το x τείνει στο $+\infty$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$)

αν και μόνο αν:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0) : (\forall x > M \implies |f(x) - L| < \varepsilon).$$

(d) Όριο έναν πεπερασμένο αριθμό L όταν το x τείνει στο $-\infty$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$)

αν και μόνο αν:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0) : (\forall x < -M \implies |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Παράδειγμα 2.6.10 Να αποδείξετε ότι:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|x - 2|} = +\infty$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x^2 + 3}{(x - 2)(x + 1)} = -\infty$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Λύση: (a) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{|x - 2|}.$$

Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου στο $+\infty$, πρέπει να δείξουμε ότι:

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ ώστε } 0 < |x - 2| < \delta \implies f(x) > M.$$

Αντικαθιστούμε τη συνάρτηση $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{|x - 2|}.$$

Η συνθήκη $f(x) > M$ γίνεται:

$$\frac{1}{|x - 2|} > M \implies |x - 2| < \frac{1}{M}.$$

Επομένως, επιλέγουμε:

$$\delta = \frac{1}{M}.$$

Για κάθε $M > 0$ το $\delta = \frac{1}{M}$ ικανοποιεί τη συνθήκη $0 < |x - 2| < \delta \implies f(x) > M$.
Συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty.$$

(b) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 3}{(x - 2)(x + 1)}.$$

Ο αριθμητής γράφεται

$$-3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1) = -3(x - 1)(x + 1).$$

Επομένως, η συνάρτηση γίνεται

$$f(x) = \frac{-3(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x + 1)}.$$

Απλοποιώντας το $(x + 1)$, έχουμε

$$f(x) = \frac{-3(x - 1)}{(x - 2)}.$$

Υποθέτουμε ότι $f(x) < -M$, δηλαδή $\frac{-3(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x + 1)} < -M$. Τότε θα έχουμε

$$\left| \frac{3(x - 1)}{(x - 2)} \right| > M.$$

Αντιστρέφοντας την ανισότητα παίρνουμε

$$|x - 2| < \frac{3|x - 1|}{M}.$$

Όταν $x \rightarrow 2$, το $|x - 1|$ πλησιάζει την τιμή 1. Επομένως:

2.7 Θεώρημα Παρεμβολής

$$|x - 2| < \frac{3 \cdot 2}{M}.$$

Άρα:

$$|x - 2| < \frac{6}{M}.$$

Για να εξασφαλίσουμε ότι $|x - 2| < 1$, συνδυάζουμε:

$$|x - 2| < 1 \quad \text{και} \quad |x - 2| < \frac{6}{M}.$$

Επομένως

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{6}{M} \right\}.$$

Η επιλογή

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{6}{M} \right\}$$

εξασφαλίζει ότι η συνθήκη $f(x) < -M$ ικανοποιείται για κάθε $M > 0$. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x^2 + 3}{(x - 2)(x + 1)} = -\infty.$$

(c) Η συνάρτηση είναι $f(x) = \frac{1}{x}$. Υπολογίζουμε το $|f(x) - 0| = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x}$. Θέλουμε

$$\frac{1}{x} < \varepsilon \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Επομένως αν επιλέξουμε $M = \frac{1}{\varepsilon}$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, αν $x > M$ θα έχουμε

$$|f(x) - 0| = \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Συνεπώς η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ ικανοποιεί τον ορισμό του ορίου και ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2.7 Θεώρημα Παρεμβολής

Συχνά χρειάζεται να υπολογίσουμε συγκεκριμένα όρια που εμπλέκουν συναρτήσεις όπου οι αλγεβρικές τεχνικές είναι συχνά αναποτελεσματικές. Για τέτοιες συναρτήσεις απαιτούνται άλλα εργαλεία. Ένα τέτοιο εργαλείο είναι το κριτήριο παρεμβολής.

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

Θεώρημα 2.7.1 Έστω τρεις συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ και $h(x)$ που είναι ορισμένες σε ένα διάστημα I του \mathbb{R} τέτοιο ώστε για κάθε $x \in I$

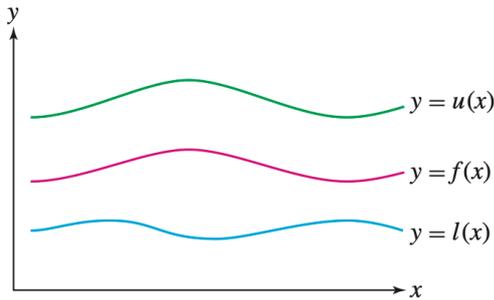
$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

και επιπλέον

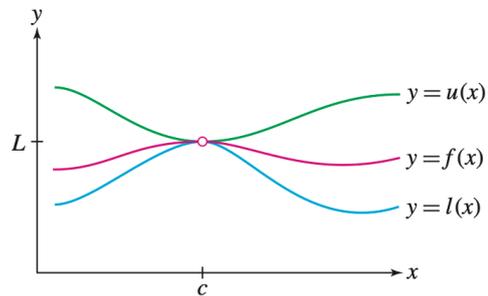
$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L.$$

Τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$



(a) Η f είναι φραγμένη από την l και την u .



(b) Η f εγκλωβίζεται από την l και την u στο $x = c$.

Σχήμα 2.25 Σχήματα που απεικονίζουν την εφαρμογή του Κριτηρίου Παρεμβολής.

Θεώρημα 2.7.2 Σημαντικά τριγωνομετρικά όρια. Δύο σημαντικά τριγωνομετρικά όρια:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = 0.$$

Θεώρημα 2.7.3 Για κάθε $n > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Αν το n είναι θετικός φυσικός αριθμός

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} \infty, & \text{αν το } n \text{ είναι άρτιος,} \\ -\infty, & \text{αν το } n \text{ είναι περιττός,} \end{cases} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

2.7 Θεώρημα Παρεμβολής

Παράδειγμα 2.7.4 Να βρείτε το όριο

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν $1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$.

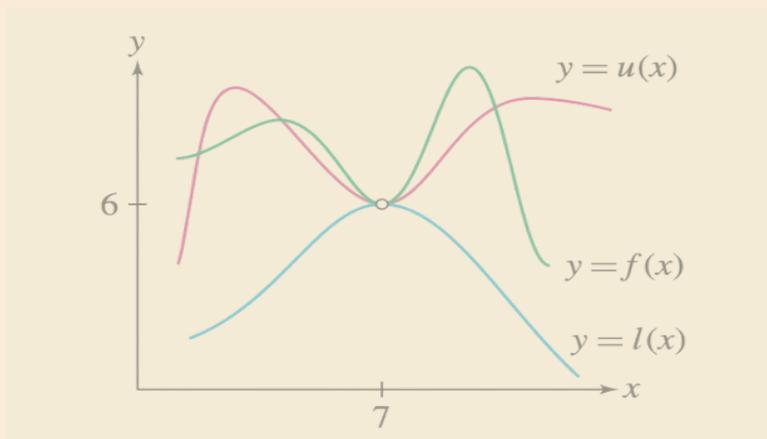
(b) Τι λέει το κριτήριο παρεμβολής για το

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$$

αν

$$\lim_{x \rightarrow 7} l(x) = \lim_{x \rightarrow 7} u(x) = 6$$

και οι f , u , και l σχετίζονται όπως στο Σχήμα 2.26; Η ανισότητα $f(x) \leq u(x)$ δεν ικανοποιείται για κάθε x . Επηρεάζει αυτό την εγκυρότητα του συμπεράσματός σας;



Σχήμα 2.26

(c) Να δείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

(d) Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{x} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}.$$

(e) Υπολογίστε το

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^2 - 3x}{3x^5 - 4x^2 + 5}.$$

Λύση: (a) Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2) = 1$, άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

(b) Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής αν $l(x) \leq f(x) \leq u(x)$ για κάθε x σε κάποιο ανοικτό διάστημα γύρω από το 7, και

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

$$\lim_{x \rightarrow 7} l(x) = \lim_{x \rightarrow 7} u(x) = 6$$

τότε

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 6.$$

Ωστόσο, στην περίπτωση που η ανισότητα $f(x) \leq u(x)$ δεν ικανοποιείται για όλα τα x το κριτήριο παρεμβολής δεν μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα. Η εγκυρότητα του συμπεράσματος εξαρτάται από το αν η ανισότητα ισχύει επαρκώς κοντά στο $x = 7$. Αν για κάθε x κοντά στο 7 (εκτός του ίδιου του 7) ισχύει η σχέση $l(x) \leq f(x) \leq u(x)$, τότε το όριο του $f(x)$ μπορεί ακόμα να υπολογιστεί ως 6. Αν όχι, το κριτήριο δεν ισχύει και δεν μπορούμε να εγγυηθούμε το όριο.

(c) Αν και η $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ είναι γινόμενο δύο συναρτήσεων, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του γινομένου, διότι το $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει. Ωστόσο, η συνάρτηση του ημίτονου παίρνει τιμές μεταξύ του -1 και του 1 και, επομένως:

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \quad \text{για κάθε } x \neq 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $|x|$, παίρνουμε:

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|,$$

και συνεπώς:

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|.$$

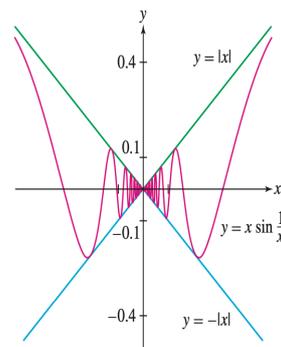
Επιπλέον, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0.$$

και συμπεραίνουμε ότι (Σχήμα 2.27)

Επομένως, προκύπτει ότι η $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ εγκλωβίζεται μεταξύ της $l(x) = -|x|$ και της $u(x) = |x|$ στο $x \rightarrow 0$. Εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$



Σχήμα 2.27

(d) (i) Για το πρώτο όριο έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{9x} \cdot 9.$$

Θέτουμε $y = 9x$, οπότε όταν $x \rightarrow 0$ τότε και $y \rightarrow 0$. Το όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{x} = 9 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot 9 = 9 \cdot 1 = 9.$$

Επομένως:

2.7 Θεώρημα Παρεμβολής

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 9h}{h} = 9.$$

(ii) Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x} \cdot 2.$$

Θέτουμε $y = 2x$, οπότε όταν $x \rightarrow 0$ τότε και $y \rightarrow 0$. Το όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y} \cdot 2 = 0.2 = 0.$$

(e) Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (20x^2 - 3x) = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^5 - 4x^2 + 5) = \infty$$

το όριό μας έχει την απροσδιόριστη μορφή ∞/∞ . Θα διαιρέσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με x^5 (τη μεγαλύτερη δύναμη του x στον παρονομαστή) και θα έχουμε

$$\frac{20x^2 - 3x}{3x^5 - 4x^2 + 5} = \frac{x^{-5}(20x^2 - 3x)}{x^{-5}(3x^5 - 4x^2 + 5)} = \frac{20x^{-3} - 3x^{-4}}{3 - 4x^{-3} + 5x^{-5}}.$$

Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πηλίκου, δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^2 - 3x}{3x^5 - 4x^2 + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (20x^{-3} - 3x^{-4})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (3 - 4x^{-3} + 5x^{-5})}.$$

Υπολογίζουμε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (20x^{-3} - 3x^{-4}) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (3 - 4x^{-3} + 5x^{-5}) = 3.$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^2 - 3x}{3x^5 - 4x^2 + 5} = \frac{0}{3} = 0.$$

Όρια στο άπειρο μιας ρητής συνάρτησης

Εάν γενικεύσουμε την τελευταία άσκηση του Παραδείγματος 2.7.4 θα έχουμε:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$$

όπου $a_n \neq 0$ και $b_m \neq 0$, διαιρούμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με x^m :

$$f(x) = \frac{\frac{a_n x^n}{x^m} + \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{x^m} + \dots + \frac{a_0}{x^m}}{\frac{b_m x^m}{x^m} + \frac{b_{m-1} x^{m-1}}{x^m} + \dots + \frac{b_0}{x^m}} = x^{n-m} \cdot \frac{a_n + a_{n-1} x^{-1} + \dots + a_0 x^{-n}}{b_m + b_{m-1} x^{-1} + \dots + b_0 x^{-m}}.$$

Το πηλίκο στις παρενθέσεις τείνει στο πεπερασμένο όριο $\frac{a_n}{b_m}$ επειδή:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n + a_{n-1} x^{-1} + \dots + a_0 x^{-n}) = a_n \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (b_m + b_{m-1} x^{-1} + \dots + b_0 x^{-m}) = b_m.$$

Αυτό ισχύει επίσης για $x \rightarrow -\infty$ και επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-m} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n + a_{n-1} x^{-1} + \dots + a_0 x^{-n}}{b_m + b_{m-1} x^{-1} + \dots + b_0 x^{-m}} = \frac{a_n}{b_m} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-m}.$$

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

Θεώρημα 2.7.5 Όρια στο άπειρο μιας ρητής συνάρτησης. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά μιας ρητής συνάρτησης εξαρτάται μόνο από τους μεγιστοβάθμιους όρους του αριθμητή και του παρονομαστή της. Αν $a_n, b_m \neq 0$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-m}.$$

Παράδειγμα 2.7.6 Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $n = m$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 7x + 9}{7x^4 - 4} = \frac{3}{7} \lim_{x \rightarrow \infty} x^0 = \frac{3}{7}.$$

- $n < m$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 7x + 9}{7x^4 - 4} = \frac{3}{7} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} = 0.$$

- $n > m$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 7x + 9}{7x^4 - 4} = \frac{1}{7} \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

- $n > m, n - m$ περιττός:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^8 - 7x + 9}{7x^3 - 4} = \frac{3}{7} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty.$$

- $n > m, n - m$ άρτιος:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^7 - 7x + 9}{7x^3 - 4} = \frac{3}{7} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = \infty.$$

Ασκήσεις 2.7.7

- (a)
- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$ | 4. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) \frac{x-3}{ x-3 }$ | 7. $\lim_{t \rightarrow 2} (t^2 - 4) \cos \frac{1}{t-2}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2}$ | 5. $\lim_{t \rightarrow 0} (2^t - 1) \cos \frac{1}{t}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \cos \left(\sin \frac{1}{x} \right)$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \sin \frac{\pi}{x-1}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} e^{\cos(\pi/x)}$ | 9. $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos \theta \cos(\tan \theta)$ |
| | | 10. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sin t \tan^{-1}(\ln t)$ |

- (b) Άλλη ενότητα: Δηλώστε αν η ανισότητα παρέχει επαρκή πληροφορία για τον υπολογισμό του $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και αν ναι βρείτε το όριο.

(1) $4x - 5 \leq f(x) \leq x^2$

(3) $4x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 2$

(2) $2x - 1 \leq f(x) \leq x^2$

2.8 Όρια και Πράξεις

(c) Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

για να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta - 2 \sin \theta}{\theta^2}.$$

(d) Να υπολογίσετε τα όρια χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.7.2, αν είναι απαραίτητο:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sec x}{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sec x}{x}$

4. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} e^{\cos(\pi/x)}$

7. $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos t}{t}$

8. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sec \theta - 1}{\theta}$

9. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sec \theta - 1}{\theta}$

10. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$

11. $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{t}$

12. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - \cos^2 t}{t}$

(e) Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+9}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 20x}{4x^2 + 9}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 20x}{2x^4 + 3x^3 - 29}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x+5}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x-9}{4x+3}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 2}{6 - 29x}$

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 - 9}{4x+3}$

8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-9}{4x^3 + 2x + 7}$

9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 10}{x+4}$

10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 + 3x^4 - 31x}{8x^4 - 31x^2 + 12}$

2.8 Όρια και Πράξεις

Θεώρημα 2.8.1 Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε:

1.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad \text{για κάθε σταθερά } \kappa \in \mathbb{R}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \text{εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}, \quad \text{εφόσον } f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

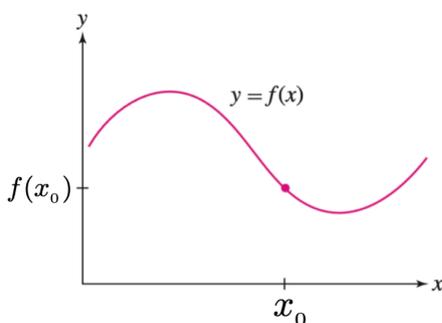
2.9 Συνεχείς συναρτήσεις

Πολλά φαινόμενα στη φύση μπορούν να περιγραφούν ως συνεχείς διαδικασίες. Για παράδειγμα, η θέση και η ταχύτητα αλλάζουν ομαλά με την πάροδο του χρόνου. Η βαρομετρική πίεση μεταβάλλεται σταδιακά καθώς αυξάνεται το ύψος από την επιφάνεια του εδάφους. Επίσης, το ρεύμα σε ένα απλό ηλεκτρικό κύκλωμα προσαρμόζεται συνεχώς ανάλογα με την τάση που εφαρμόζεται. Τελικά, όταν θέλουμε να μελετήσουμε τον ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, είναι απαραίτητο η συνάρτηση αυτή να είναι συνεχής, ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία. Οι μαθηματικές ιδιότητες της συνέχειας σχετίζονται με την ομαλή ροή, κάτι που, στην καθημερινή ζωή, μπορεί να ερμηνευτεί ως η αρμονική και αδιάλειπτη σύνδεση των ιδεών ή ενεργειών.

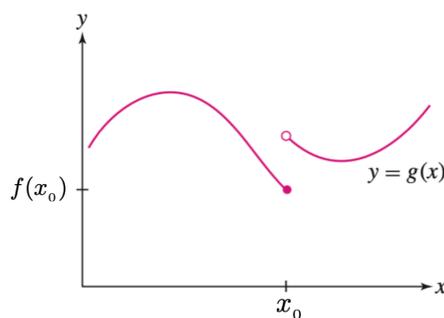
Μια διακοπή στη γραφική παράσταση της συνάρτησης στο Σχήμα 2.28(b) ονομάζεται *ασυνέχεια*. Παρατηρήστε ότι η διακοπή συμβαίνει επειδή τα πλευρικά όρια από αριστερά και από δεξιά καθώς το x τείνει στο c δεν είναι ίσα και, ως εκ τούτου, το $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ δεν υπάρχει. Αντίθετα,

στο Σχήμα 2.28(a) το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης $f(x_0)$.

Αυτό υποδηλώνει τον ακόλουθο ορισμό της συνέχειας σε σχέση με τα όρια.



(a) Η f είναι συνεχής στο $x = x_0$.



(b) Συνέχεια στο $x = x_0$: Τα πλευρικά όρια από αριστερά και από δεξιά καθώς $x \rightarrow x_0$ δεν είναι ίσα.

Σχήμα 2.28

Ορισμός 2.9.1 Συνέχεια σε σημείο. Έστω ότι η $f(x)$ ορίζεται σε ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το $x = x_0$. Τότε, η f είναι συνεχής στο $x = x_0$ αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Αν το όριο δεν υπάρχει ή αν υπάρχει αλλά δεν ισούται με $f(x_0)$, λέμε ότι η f έχει *ασυνέχεια* (ή ότι είναι *ασυνεχής*) στο $x = x_0$.

Παρατηρήστε ότι για να είναι η f συνεχής στο x_0 πρέπει να ισχύουν τρεις συνθήκες:

1. Να ορίζεται η $f(x_0)$.
2. Να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
3. Να είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2.9 Συνεχείς συναρτήσεις

Μία συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σε μερικά σημεία και ασυνεχής σε κάποια άλλα. Αν η f είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, τότε η f ονομάζεται απλά συνεχής.

Παράδειγμα 2.9.2 Δείξτε ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι συνεχείς:

1. $f(x) = k$ (k οποιαδήποτε σταθερά)
2. $g(x) = x^n$ (n φυσικός αριθμός)

Λύση (a) Η συνάρτηση $f(x) = k$ είναι συνεχής διότι για κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

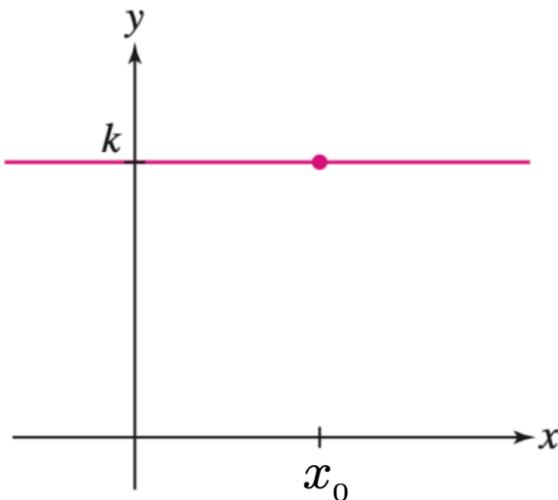
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} k = k = f(x_0).$$

Άρα, η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της.

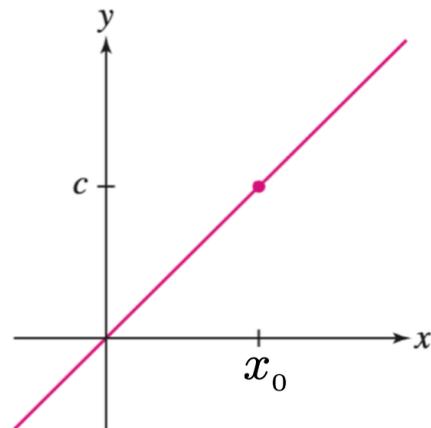
(b) Η συνάρτηση $g(x) = x^n$ είναι πολυωνυμική, και όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους. Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n = g(x_0).$$

Άρα, η $g(x) = x^n$ είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της.



(a) Η συνάρτηση $f(x) = k$ είναι συνεχής.



(b) Η συνάρτηση $g(x) = x$ είναι συνεχής.

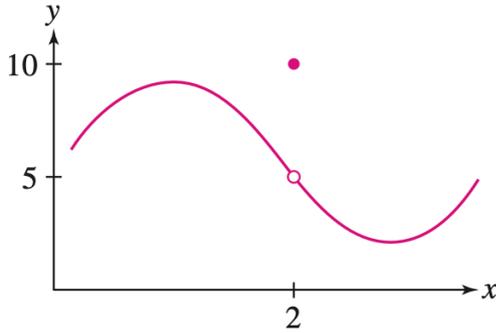
Σχήμα 2.29

Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει αλλά είτε το όριο δεν είναι ίσο με την τιμή $f(x_0)$, είτε το $f(x_0)$ δεν ορίζεται, τότε λέμε ότι η f έχει μία *αιρόμενη ασυνέχεια* στο $x = x_0$.

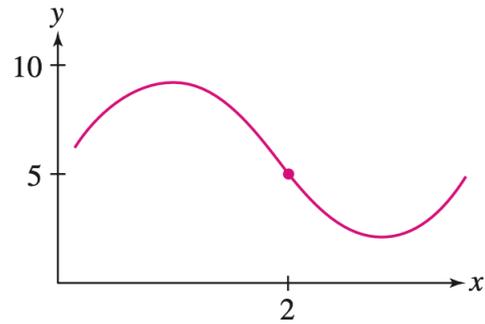
Η συνάρτηση στο Σχήμα 2.30(a) έχει μία αιρόμενη ασυνέχεια στο $x_0 = 2$ επειδή $f(2) = 10$ αλλά $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$. Δηλαδή, το όριο υπάρχει αλλά δεν είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης.

Στο Σχήμα 2.30(b) η συνάρτηση επαναορίζεται στο $x = 2$ ώστε $f(2) = 5$, και έτσι η ασυνέχεια αφαιρείται, καθιστώντας τη συνάρτηση συνεχής.

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής



(a) Αιρόμενη ασυνέχεια στο $x = 2$.



(b) Η συνάρτηση επαναορίζεται στο $x = 2$.

Σχήμα 2.30 Αιρόμενη ασυνέχεια: Η ασυνέχεια μπορεί να ανααιρεθεί με επαναορισμό της τιμής $f(2)$.

Οι αιρόμενες ασυνέχειες είναι ήπιες με το ακόλουθο σκεπτικό: μπορούμε να κάνουμε την f συνεχή στο $x = x_0$ επαναορίζοντας την τιμή $f(x_0)$ [στην περίπτωση που $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$] ή ορίζοντας την $f(x_0)$ [στην περίπτωση που η $f(x_0)$ δεν ορίζεται] έτσι ώστε $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

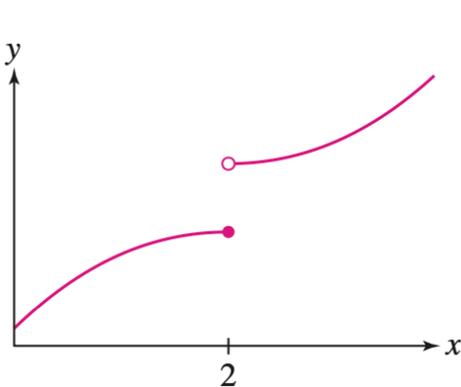
Στο Σχήμα 2.30(b) το $f(2)$ έχει επαναοριστεί ως $f(2) = 5$ και αυτό κάνει την f συνεχή στο $x = 2$.

Μία αιρόμενη ασυνέχεια στο $x = x_0$ που συμβαίνει επειδή η f δεν ορίζεται αναφέρεται μερικές φορές ως αιρόμενη ανομαλία.

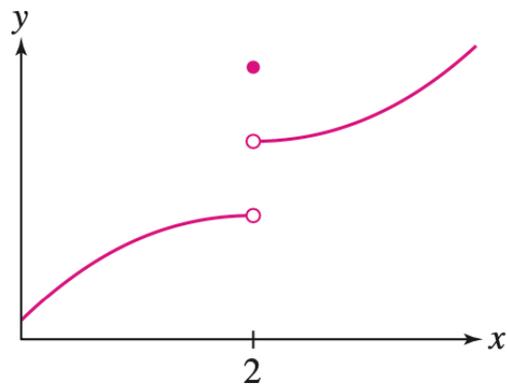
Ο χειρότερος τύπος ασυνέχειας είναι η *ασυνέχεια άλματος*, η οποία παρατηρείται αν τα πλευρικά όρια

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

υπάρχουν αλλά δεν είναι ίσα. Στην περίπτωση αυτή η f δεν είναι συνεχής στο x_0 επειδή το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ δεν υπάρχει. Το Σχήμα 2.31 δείχνει δύο συναρτήσεις με ασυνέχειες άλματος στο $x_0 = 2$. Αντίθετα με την περίπτωση της αιρόμενης ασυνέχειας, δεν μπορούμε να κάνουμε μια συνάρτηση f συνεχή απλά επαναορίζοντας την f σε ένα μόνο σημείο x_0 .



(a)



(b)

Σχήμα 2.31 Αυτές οι συναρτήσεις εμφανίζουν ασυνέχειες άλματος στο $x = 2$

2.9 Συνεχείς συναρτήσεις

Σε σχέση με τις ασυνέχειες άλματος, είναι χρήσιμο να ορίσουμε την *πλευρική συνέχεια*.

Ορισμός 2.9.3 Πλευρική συνέχεια. μια συνάρτηση f ονομάζεται

- Συνεχής από αριστερά στο $x = x_0$ αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
- Συνεχής από δεξιά στο $x = x_0$ αν $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Στο Σχήμα 2.31 η συνάρτηση στο (a) είναι συνεχής από αριστερά στο $x = 2$, ενώ η συνάρτηση στο (b) δεν είναι συνεχής στο $x = 2$ ούτε από αριστερά ούτε από δεξιά.

Πολλά θεωρήματα στον Λογισμό εφαρμόζονται στις συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε ένα διάστημα, μια έννοια που ορίζεται ως ακολούθως:

Ορισμός 2.9.4 Συνέχεια σε ένα διάστημα. Υποθέτουμε ότι I είναι ένα διάστημα της μορφής (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$ ή $[a, b]$. Τότε η f είναι συνεχής στο I αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, b) , συνεχής από δεξιά στο a (αν το a ανήκει στο I) και συνεχής από αριστερά στο b (αν το b ανήκει στο I).

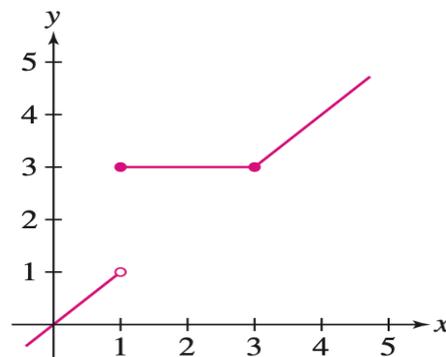
Παράδειγμα 2.9.5 Συνάρτηση οριζόμενη κατά τμήματα. Εξετάστε τη συνέχεια της

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{για } x < 1, \\ 3 & \text{για } 1 \leq x \leq 3, \\ x & \text{για } x > 3. \end{cases}$$

Λύση Οι συναρτήσεις $f(x) = x$ και $g(x) = 3$ είναι συνεχείς, άρα η F είναι επίσης συνεχής, εκτός ενδεχομένως από τα σημεία $x = 1$ και $x = 3$ όπου ο τύπος της $F(x)$ αλλάζει (Σχήμα 2.32).

- Στο $x = 1$ τα πλευρικά όρια υπάρχουν αλλά δεν είναι ίσα μεταξύ τους:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 = 3.$$



Σχήμα 2.32 Καθώς το $x \rightarrow x_0$ η $f(x) \rightarrow L$.

Επομένως, η F έχει ασυνέχεια άλματος στο $x = 1$. Όμως, το όριο από δεξιά είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης $F(1) = 3$, οπότε η F είναι συνεχής από δεξιά στο $x = 1$.

Προσοχή. Οι συναρτήσεις που ορίζονται κατά τμήματα μπορεί να είναι ή όχι συνεχείς στα σημεία ένωσης των τμημάτων.

- Στο $x = 3$ τα όρια από αριστερά και από δεξιά υπάρχουν και είναι και τα δύο ίσα με $F(3)$, οπότε η F είναι **συνεχής** στο $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 3 = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x = 3.$$

Κατασκευή συνεχών συναρτήσεων

Έχοντας μελετήσει μερικά παραδείγματα συνεχών, εστιάζουμε ξανά στις συνεχείς συναρτήσεις. Πώς μπορούμε να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής; Ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες της συνέχειας, οι οποίοι αναφέρουν ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής αν κατασκευάζεται από συναρτήσεις που είναι γνωστό ότι είναι συνεχείς.

Θεώρημα 2.9.6 Κατασκευή συνεχών συναρτήσεων. Έχοντας μελετήσει μερικά παραδείγματα συνεχών, εστιάζουμε ξανά στις συνεχείς συναρτήσεις. Πώς μπορούμε να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής; Ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες της συνέχειας, οι οποίοι αναφέρουν, περίπου, ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής αν κατασκευάζεται από συναρτήσεις που είναι γνωστό ότι είναι συνεχείς.

Στην ενότητα των ορίων σημειώσαμε ότι οι βασικοί κανόνες για τα αθροίσματα και τα γινόμενα ισχύουν για αυθαίρετο αριθμό συναρτήσεων. Το ίδιο ισχύει και για τη συνέχεια: δηλαδή, αν f_1, \dots, f_n είναι συνεχείς, τότε είναι συνεχείς και οι συναρτήσεις

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n, \quad f_1 f_2 \dots f_n$$

Τα επόμενα δύο θεωρήματα βεβαιώνουν ότι οι βασικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους. Θυμηθείτε (Ενότητα 1.3) ότι ο όρος «βασική συνάρτηση» αναφέρεται στα πολυώνυμα, τις ρητές συναρτήσεις, τις n -τάξιες ρίζες και τις αλγεβρικές συναρτήσεις, τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις αντίστροφές τους, καθώς και στις εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 2.9.7 Συνέχεια πολυώνυμων και ρητών συναρτήσεων.

Έστω P και Q δύο πολυώνυμα. Τότε:

(a) Τα P και Q είναι συνεχή στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

(b) Η $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της [σε όλες τις τιμές $x = x_0$ με $Q(x_0) \neq 0$].

Θεώρημα 2.9.8 Συνέχεια μερικών βασικών συναρτήσεων.

Η $y = x^{1/n}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της για n φυσικό αριθμό.

- Η $y = \sin x$ και η $y = \cos x$ είναι συνεχείς σε όλη την ευθεία των πραγματικών αριθμών.
- Η $y = b^x$ είναι συνεχής στην ευθεία των πραγματικών αριθμών (με $b > 0$, $b \neq 1$).
- Η $y = \log_b x$ είναι συνεχής για $x > 0$ (με $b > 0$, $b \neq 1$).

Θεώρημα 2.9.9 Συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης. Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα I με σύνολο τιμών R και αν η f^{-1} υπάρχει, τότε η f^{-1} είναι συνεχής με πεδίο ορισμού R .

2.9 Συνεχείς συναρτήσεις

Θεώρημα 2.9.10 Συνέχεια της σύνθετης συνάρτησης. Αν η g είναι συνεχής στο $x = x_0$ και η f είναι συνεχής στο $y = g(x_0)$, τότε η σύνθετη συνάρτηση $F(x) = f(g(x))$ είναι συνεχής στο $x = x_0$.

Γενικότερα, μια *στοιχειώδης συνάρτηση* είναι μια συνάρτηση που κατασκευάζεται από βασικές συναρτήσεις χρησιμοποιώντας τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης και της σύνθεσης. Εφόσον οι βασικές συναρτήσεις είναι συνεχείς (στο πεδίο ορισμού τους), μια στοιχειώδης συνάρτηση είναι επίσης συνεχής στο πεδίο ορισμού της από τους κανόνες της συνέχειας. Ένα παράδειγμα στοιχειώδους συνάρτησης είναι η

$$F(x) = \tan^{-1} \left(\frac{x^2 + \cos(2^x + 9)}{x - 8} \right)$$

Αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της το οποίο είναι $D_f = \{x : x \neq 8\}$.

Αντικατάσταση: υπολογισμός ορίων χρησιμοποιώντας τη συνέχεια

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε ένα όριο όταν η εμπλεκόμενη συνάρτηση είναι γνωστό ότι είναι συνεχής. Σε αυτή την περίπτωση το όριο εξ ορισμού είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ονομάζουμε αυτή τη διαδικασία *μέθοδο αντικατάστασης* επειδή το όριο υπολογίζεται αντικαθιστώντας το $x = x_0$ στην $f(x)$.

Παράδειγμα 2.9.11 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{a) } \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin y \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3^x}{\sqrt{x+5}}$$

Λύση. a) Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση επειδή η $f(y) = \sin y$ είναι συνεχής:

$$\lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin y = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{3^x}{\sqrt{x+5}}$ είναι συνεχής στο $x = -1$ επειδή ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι και οι δύο συνεχείς στο $x = -1$ και ο παρονομαστής $\sqrt{x+5}$ είναι μη μηδενικός στο $x = -1$. Ως εκ τούτου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3^x}{\sqrt{x+5}} = \frac{3^{-1}}{\sqrt{-1+5}} = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

- Περίληψη 2.9.12** • Ορισμός: Η f είναι *συνεχής* στο $x = x_0$ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Αυτό σημαίνει ότι το $f(x_0)$ υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσα.
- Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ δεν υπάρχει ή αν υπάρχει αλλά δεν είναι ίσο με $f(x_0)$, τότε η f είναι *ασυνεχής* στο $x = x_0$.
 - Αν η f είναι *συνεχής* σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, τότε η f λέγεται *απλά συνεχής*.
 - *Συνέχεια από δεξιά* στο $x = x_0$: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
 - *Συνέχεια από αριστερά* στο $x = x_0$: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
 - Τρεις συνηθισμένες μορφές ασυνεχειών:
 - *Αιρόμενη ασυνέχεια*: το όριο υπάρχει, αλλά είτε το όριο δεν είναι ίσο με την τιμή $f(x_0)$ ή η $f(x_0)$ δεν ορίζεται.
 - *Ασυνέχεια άλματος*: Τα πλευρικά όρια υπάρχουν αλλά δεν είναι ίσα.
 - *Άπειρη ασυνέχεια*: Το όριο είναι άπειρο καθώς το x τείνει στο x_0 από τη μία ή και από τις δύο πλευρές.
 - *Κανόνες συνέχειας*: Αθροίσματα, γινόμενα, πολλαπλάσια, αντίστροφες συναρτήσεις και συνθέσεις συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις. Τα ίδια ισχύουν για ένα πηλίκο f/g στα σημεία όπου $g(x) \neq 0$.
 - Οι βασικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους όπου οι βασικές συναρτήσεις είναι πολυώνυμα, ρητές συναρτήσεις, n -οστές ρίζες και αλγεβρικές συναρτήσεις, τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφες συναρτήσεις τους, εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις.
 - *Μέθοδος αντικατάστασης*: Αν η f είναι γνωστό ότι είναι συνεχής στο $x = x_0$, τότε η τιμή του ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι $f(x_0)$.

Λυμένες ασκήσεις 2.9.13 1. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις

$$(a) f(x) = x + \sin x$$

$$(b) f(x) = x \sin x$$

$$(c) f(x) = \frac{x^2 - \cos x}{3 + \cos x}$$

$$(d) f(x) = e^x \cos 3x.$$

είναι συνεχείς.

2. Να προσδιορίσετε τα σημεία ασυνέχειας των παρακάτω συναρτήσεων. Να αναφέρετε το είδος της ασυνέχειας (αιρόμενη, άλματος) και πότε η συνάρτηση είναι συνεχής από αριστερά ή από δεξιά.

2.9 Συνεχείς συναρτήσεις

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{|x-2|} & \text{αν } x \neq 2 \\ -1 & \text{αν } x = 2. \end{cases} \quad (b) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{e^x - e^{-x}}. \quad (d) f(x) = \ln|x-4|.$$

Λύση.

1. (a) Η συνάρτηση x είναι πολυωνυμική και άρα συνεχής σε όλο το \mathbb{R} . Το ίδιο ισχύει και για την συνάρτηση $\sin x$ που είναι επίσης συνεχής σε όλο το \mathbb{R} . Επίσης το άθροισμα δύο συνεχών συναρτήσεων είναι επίσης συνεχής. Συνεπώς η $f(x) = x + \sin x$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

(b) Οι συναρτήσεις x και $\sin x$ είναι συνεχείς σε όλο το \mathbb{R} . Συνεπώς, το γινόμενο δύο συνεχών συναρτήσεων είναι επίσης μια συνεχής συνάρτηση.

(c) Η συνάρτηση $f(x)$ έχει παρονομαστή $3 + \cos x$. Επειδή $3 + \cos x \neq 0$ η συνάρτηση είναι ορισμένη για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ο αριθμητής $x^2 - \cos x$ είναι διαφορά συνεχών συναρτήσεων και συνεπώς είναι συνεχής συνάρτηση. Ο παρονομαστής είναι επίσης συνεχής στο \mathbb{R} και δεν μηδενίζεται πουθενά. Αφού ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι συνεχείς στο \mathbb{R} και ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται η συνάρτηση $f(x)$ είναι πηλίκο συνεχών συναρτήσεων με μη μηδενικό παρονομαστή. Συνεπώς η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - \cos x}{3 + \cos x}$$

είναι συνεχής σε όλο το \mathbb{R} .

(d) Η συνάρτηση e^x είναι η εκθετική συνάρτηση και είναι συνεχής στο \mathbb{R} . Η συνάρτηση $\cos 3x$ είναι η σύνθεση της συνεχούς συνάρτησης $\cos x$ και της πολυωνυμικής συνάρτησης $3x$ που είναι συνεχής. Άρα το $\cos 3x$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} . Το γινόμενο δύο συνεχών συναρτήσεων είναι επίσης συνεχής συνάρτηση. Επομένως, η συνάρτηση $f(x) = e^x \cos 3x$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

2. (a) Θα υπολογίσουμε πρώτα το όριο από αριστερά στο σημείο $x = 2$: Για $x < 2$ το $|x-2| = -(x-2)$ και επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{-(x-2)} = -1.$$

Για $x > 2$ το $|x-2| = x-2$, άρα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1.$$

Τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, επομένως υπάρχει ασυνέχεια άλματος στο $x = 2$.

(b) Η συνάρτηση $\cos \frac{1}{x}$ είναι ορισμένη για όλα τα $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \quad \text{και} \quad y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{3\pi}{2}}, \quad \text{όπου } n \in \mathbb{Z}.$$

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

Παρατηρούμε ότι:

$$\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ και } \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -1.$$

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 2.6.3 η συνάρτηση f δεν συγκλίνει.

(c) Για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^x - e^{-x}}$ πρέπει ο παρονομαστής $e^x - e^{-x}$ να είναι διάφορος του μηδενός, δηλαδή $e^x - e^{-x} \neq 0$. Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση έχουμε $e^x = e^{-x} \implies e^{2x} = 1 \implies 2x = 0 \implies x = 0$. Άρα η συνάρτηση $f(x)$ δεν είναι ορισμένη στο $x = 0$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Για να εξετάσουμε το όριο καθώς $x \rightarrow 0$, υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια. Όταν $x \rightarrow 0^-$ τότε το $e^x - e^{-x}$ είναι αρνητικό. Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x - e^{-x}} = -\infty.$$

Όταν $x \rightarrow 0^+$ τότε το $e^x - e^{-x}$ είναι θετικό. Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - e^{-x}} = +\infty.$$

Άρα η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^x - e^{-x}}$ παρουσιάζει άπειρη ασυνέχεια στο $x = 0$.

(d) Η λογαριθμική συνάρτηση $\ln x$ είναι ορισμένη για $x > 0$. Επομένως η $\ln|x - 4|$ είναι ορισμένη όταν:

$$|x - 4| > 0 \implies x \neq 4.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Το όριο της f από δεξιά είναι

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \ln|x - 4| = \ln(x - 4) \rightarrow -\infty.$$

Το όριο της f από αριστερά είναι

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \ln|x - 4| = \ln(4 - x) \rightarrow -\infty.$$

Το όριο της συνάρτησης καθώς $x \rightarrow 4$ δεν είναι πεπερασμένο αλλά τείνει στο $-\infty$. Άρα, η συνάρτηση παρουσιάζει *άπειρη ασυνέχεια* στο $x = 4$.

Σημείωση 2.9.14 Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει μια *άπειρη ασυνέχεια* στο $x = x_0$ αν ένα ή και τα δύο πλευρικά όρια είναι άπειρα (ακόμα και αν η $f(x)$ δεν ορίζεται στο $x = x_0$). Όπως στην ασυνέχεια άλματος, σε αυτή την περίπτωση η f δεν είναι συνεχής στο $x = x_0$ επειδή το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

δεν υπάρχει.

Ασκήσεις 2.9.15

3. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς (a, b ή c) ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι συνεχείς.

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2 - c, & x < 5 \\ 4x + 2c, & x \geq 5 \end{cases} \quad (c) f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & x < -1 \\ ax + b, & -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x^{-1}, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 2x + 9x^{-1}, & x \leq 3 \\ -4x + c, & x > 3 \end{cases}$$

4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4}, & \text{αν } x \neq 4, \\ 10, & \text{αν } x = 4 \end{cases}$ έχει μία αιρόμενη ασυνέχεια στο $x = 4$.

5. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{για } x < -1, \\ cx, & \text{για } -1 \leq x \leq 2, \\ x + 2, & \text{για } x > 2. \end{cases}$ Να βρεθεί η τιμή του c ώστε η g

να είναι

- (a) συνεχής από αριστερά,
- (b) συνεχής από δεξιά.

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g .

6. Να υπολογίσετε τα όρια χρησιμοποιώντας αντικατάσταση:

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - 4)$

(d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$

(g) $\lim_{x \rightarrow 4} x^{-5/2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 12x^{-2})$

(e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan(3x)$

(h) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^3 + 4x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 2}{x^2 + 2x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\cos x}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 3} 10^{x^2 - 2x}$

2.10 Απροσδιόριστες μορφές

Η αντικατάσταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε όρια όταν η υπό μελέτη συνάρτηση είναι γνωστό ότι είναι συνεχής. Όταν θα μελετήσουμε τις παραγώγους θα αντιμετωπίσουμε όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ όπου η τιμή $f(x_0)$ δεν ορίζεται. Σε τέτοιες περιπτώσεις η αντικατάσταση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας. Ωστόσο, πολλά από αυτά τα όρια μπορούν να υπολογιστούν αν χρησιμοποιήσουμε την άλγεβρα για να ξαναγράψουμε τον τύπο της $f(x)$.

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

Ορισμός 2.10.1 Αν δίνεται μια συνάρτηση f της οποίας ο τύπος παράγει μια απροσδιόριστη έκφραση για το $f(x)$ σε μία από τις μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$ ή $\infty - \infty$, τότε λέμε ότι η $f(x)$ έχει απροσδιόριστη μορφή (ή είναι απροσδιόριστη) στο $x = x_0$.

Μία απροσδιόριστη μορφή, όπως υποδηλώνει και το όνομά της, δείχνει ότι το όριο δεν μπορεί να προσδιοριστεί από τη μορφή της συνάρτησης. Αυτό δεν σημαίνει ότι το όριο δεν υπάρχει. Όταν η $f(x)$ έχει μια απροσδιόριστη μορφή στο $x = x_0$ μία στρατηγική είναι να μετασχηματίσουμε αλγεβρικά την $f(x)$, αν είναι δυνατόν, σε μία νέα έκφραση που ορίζεται και είναι συνεχής στο $x = x_0$ και έπειτα να υπολογίσουμε το όριο με αντικατάσταση. Το κρίσιμο βήμα στα περισσότερα παραδείγματα είναι η απλοποίηση ενός κοινού παράγοντα από τον αριθμητή και τον παρονομαστή την κατάλληλη στιγμή, το οποίο αίρει την απροσδιοριστία.

Περίληψη 2.10.2

- Όταν η f είναι γνωστό ότι είναι συνεχής στο $x = x_0$, τότε το όριο μπορεί να υπολογιστεί με αντικατάσταση

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

- Αν ο τύπος για το $f(x_0)$ οδηγεί σε μια απροσδιόριστη έκφραση της μορφής

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty \cdot 0, \quad \infty - \infty$$

τότε λέμε ότι η $f(x)$ είναι απροσδιόριστη ή έχει απροσδιόριστη μορφή στο $x = x_0$.

- Αν η $f(x)$ είναι απροσδιόριστη στο $x = x_0$ δοκιμάζουμε να την μετασχηματίσουμε αλγεβρικά σε μια νέα έκφραση όπου ορίζεται και είναι συνεχής στο $x = x_0$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το όριο με αντικατάσταση.

Παράδειγμα 2.10.3 *Απλοποίηση κλάσματος με παραγοντοποίηση* Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 12}.$$

Λύση. Η συνάρτηση έχει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ στο $x = 3$. Έχουμε

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 12} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+4)} = \frac{x-1}{x+4}, \quad \text{για } x \neq 3.$$

Επειδή η έκφραση στο δεξιό μέλος της εξίσωσης είναι συνεχής στο $x = 3$, υπολογίζουμε το όριο ως ακολούθως:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+4} = \frac{3-1}{3+4} = \frac{2}{7}$$

2.10 Απροσδιόριστες μορφές

Παράδειγμα 2.10.4 Πολλαπλασιασμός με τον συζυγή Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$.

Λύση. Το όριο έχει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, αφού $x-9 \rightarrow 0$ και $\sqrt{x}-3 \rightarrow 0$ όταν $x \rightarrow 9$.

Για να απλοποιήσουμε την έκφραση, πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με το συζυγές του παρονομαστή:

$$\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9}$$

Απλοποιώντας τον κοινό παράγοντα $x-9$ (για $x \neq 9$) έχουμε

$$\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \sqrt{x}+3.$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \sqrt{9}+3 = 3+3 = 6.$$

Ασκήσεις 2.10.5 1. Να δείξετε ότι το όριο οδηγεί σε μία απροσδιόριστη μορφή. Έπειτα να ακολουθήσετε τη διαδικασία δύο βημάτων. Μετασχηματίστε αλγεβρικά τη συνάρτηση και υπολογίστε χρησιμοποιώντας τη συνέχεια.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2-36}{x-6} \quad (b) \lim_{h \rightarrow 3} \frac{9-h^2}{h-3} \quad (c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1}$$

$$(d) \lim_{t \rightarrow 9} \frac{2t-18}{5t-45}$$

2. Να υπολογίσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια. Αν δεν υπάρχουν, να προσδιορίσετε αν υπάρχουν πλευρικά όρια (πεπερασμένα ή άπειρα).

$$(a) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{x^2-49}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^3-64x}{x-8}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} \right)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2-64}{x-9}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x-4}-2}{x-8}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2-9x-5}{x^2-25}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+3x+2}{x+2}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5-x}-1}{2-\sqrt{x}}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x+1}{2x^2+3x+1}$$

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

3. Τα ακόλουθα όρια έχουν όλα την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Ένα από τα όρια δεν υπάρχει, ένα είναι ίσο με 0 και ένα είναι μη μηδενικό. Να υπολογίσετε κάθε όριο αλγεβρικά, αν είναι εφικτό.

$$(a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^{-1}}{x - 2 + x^{-1}} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - e^x}$$

4. Τα ακόλουθα όρια έχουν όλα την απροσδιόριστη μορφή ∞/∞ . Ένα από τα όρια δεν υπάρχει, ένα είναι ίσο με 0 και ένα είναι μη μηδενικό. Να υπολογίσετε κάθε όριο αλγεβρικά, αν είναι εφικτό, ή αλλιώς να το διερευνήσετε αριθμητικά.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-4}}{4 + x^{-1}} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cot x}{\csc x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^4}}$$

5. Να υπολογίσετε τα όρια χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 1} \quad (e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} \quad (d) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 6x + 8} \quad (f) \lim_{x \rightarrow 27} \frac{x - 27}{x^{1/3} - 3}$$

6. Να υπολογίσετε τα όρια συναρτήσεων της σταθεράς a .

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} (2a + x) \quad (d) \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)^2 - 4x^2}{x - a} \quad (g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + a)^3 - a^3}{x}$$

$$(b) \lim_{h \rightarrow -2} (4ah + 7a) \quad (e) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \quad (h) \lim_{h \rightarrow a} \frac{\frac{1}{h} - \frac{1}{a}}{h - a}$$

$$(c) \lim_{t \rightarrow -1} (4t - 2at + 3a) \quad (f) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a + 2h} - \sqrt{a}}{h}$$

7. Να βρείτε όλες τις τιμές του c για τις οποίες υπάρχει το όριο.

$$(a) \lim_{x \rightarrow c} \frac{x^2 - 5x - 6}{x - c} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{c}{x^3 - 1} \right) \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + cx^2 - \sqrt{1 + x^2}}{x^4}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + c}{x - 1}$$

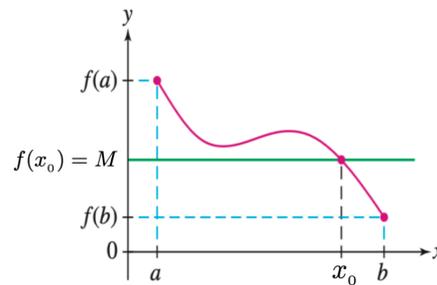
2.11 Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών (ΘΕΤ) αναφέρει ότι αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα, τότε παίρνει όλες τις τιμές ανάμεσα στις τιμές που παίρνει στα άκρα του διαστήματος. Για παράδειγμα, αν μια συνάρτηση περιγράφει το ύψος ενός αεροπλάνου από τη στιγμή της απογείωσης μέχρι να φτάσει σε ένα μέγιστο ύψος, τότε το αεροπλάνο πρέπει να περάσει από κάθε ύψος μεταξύ του ελάχιστου και του μέγιστου ύψους, χωρίς να παραλείψει καμία τιμή.

Με απλά λόγια, αν ξεκινήσεις από ένα σημείο και φτάσεις σε ένα άλλο, τότε πρέπει να έχεις περάσει από όλα τα ενδιάμεσα σημεία, αρκεί η διαδρομή σου να είναι συνεχής και χωρίς “άλματα”.

Θεώρημα 2.11.1 Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε για κάθε τιμή M , αυστηρά μεταξύ του $f(a)$ και του $f(b)$, υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή $x_0 \in (a, b)$ τέτοια ώστε $f(x_0) = M$.

Γραφικά, όπως στο Σχήμα 2.33, το αποτέλεσμα φαίνεται προφανές. Για μια συνεχή συνάρτηση κάθε οριζόντια ευθεία σε ύψος M μεταξύ του $f(a)$ και του $f(b)$ είναι υποχρεωμένη να συναντήσει τη γραφική παράσταση και επομένως πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή x_0 στο (a, b) τέτοια ώστε $f(x_0) = M$.



Σχήμα 2.33 Για κάθε M μεταξύ του $f(a)$ και του $f(b)$ υπάρχει κάποιο x_0 μεταξύ του a και του b τέτοιο ώστε $f(x_0) = M$.

Πόρισμα 2.11.2 Ύπαρξη ριζών (Bolzano) Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. Αν

f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και, επιπλέον, ισχύει

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Δηλαδή, υπάρχει μία, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοιχτό διάστημα (a, b) .

Παράδειγμα 2.11.3 Να δείξετε ότι η $f(x) = \frac{x^2}{x^7 + 1}$ παίρνει την τιμή 0.4.

Λύση. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) = 0.4$. Δηλαδή,

$$\frac{x^2}{x^7 + 1} = 0.4.$$

Πολλαπλασιάζουμε και τις δύο πλευρές με τον παρονομαστή $x^7 + 1$ (υποθέτοντας $x^7 + 1 \neq 0$)

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

θα έχουμε

$$x^2 = 0.4(x^7 + 1) \Rightarrow x^2 - 0.4x^7 - 0.4 = 0.$$

Η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 0.4x^7 - 0.4$ είναι συνεχής, επειδή είναι πολυωνυμική. Εξετάζουμε αν το $g(x)$ αλλάζει πρόσημο σε ένα διάστημα. Έχουμε

• Για $x = 0$: $g(0) = 0^2 - 0.4(0)^7 - 0.4 = -0.4$ (αρνητικό).

• Για $x = 1$: $g(1) = 1^2 - 0.4(1)^7 - 0.4 = 1 - 0.4 - 0.4 = 0.2$ (θετικό).

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή $x \in (0, 1)$ για την οποία $g(x) = 0$. Επομένως, η $f(x)$ παίρνει την τιμή 0.4.

Παράδειγμα 2.11.4 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, 1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 3)$.

Λύση. Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται

$$f(x) = x \iff f(x) - x = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή η f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, 1)$, ισχύει ότι

$$f(1) = 2 \quad \text{και} \quad f(3) = 1.$$

Η f είναι συνεχής στο $[1, 3] \subseteq \mathbb{R}$ από υπόθεση. Άρα, και η $g(x) = f(x) - x$ είναι συνεχής, καθώς είναι πράξη συνεχών συναρτήσεων. Επίσης, έχουμε

$$g(1) = f(1) - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \text{και} \quad g(3) = f(3) - 3 = 1 - 3 = -2.$$

Άρα, ισχύει ότι:

$$g(1) \cdot g(3) = 1 \cdot (-2) = -2 < 0.$$

Από το Θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \iff f(x_0) - x_0 = 0 \iff f(x_0) = x_0.$$

2.12 Παραγωγή

Η *παράγωγος* αποτελεί θεμελιώδη έννοια στον διαφορικό λογισμό και στα μαθηματικά γενικότερα. Η μελέτη της παραγωγού επικεντρώνεται στον *ρυθμό μεταβολής* μιας ποσότητας καθώς και στην κλίση μιας εφαπτόμενης ευθείας σε ένα σημείο της συνάρτησης. Η παράγωγος είναι το όριο του πηλίκου των διαφορών τιμών που προκύπτουν σε πολύ μικρές μεταβολές και εκφράζει πόσο γρήγορα αλλάζει μία συνάρτηση. Η έννοια της παραγωγού αναπτύχθηκε ανεξάρτητα από δύο κορυφαίους μαθηματικούς του 17ου αιώνα: τον Ισαάκ Νεύτωνα και τον Gottfried Wilhelm Leibniz. Ο Νεύτωνας (1642-1727), Άγγλος μαθηματικός και φυσικός, ανέπτυξε την έννοια της παραγωγού στο πλαίσιο της θεωρίας των ροών εστιάζοντας στην έννοια της κίνησης και του ρυθμού. Από την άλλη ο Leibniz (1646-1716), Γερμανός μαθηματικός και φιλόσοφος, διατύπωσε τις θεμελιώδεις αρχές του διαφορικού λογισμού εισάγοντας την έννοια των απείρως μικρών μεταβολών. Παρά τη διαμάχη για την πατρότητα της θεωρίας και οι δύο αναγνωρίζονται σήμερα ως συνδημιουργοί του διαφορικού λογισμού. Σήμερα η παράγωγος αποτελεί ένα εργαλείο που μας επιτρέπει να αναλύουμε και να κατανοούμε την κίνηση και τον ρυθμό μεταβολής σε φυσικά και κοινωνικά φαινόμενα και χρησιμοποιείται είτε για την κατανόηση φυσικών διεργασιών είτε για

2.12 Παραγωγή

τη μοντελοποίηση οικονομικών και βιολογικών προβλημάτων, και γενικότερα, μας επιτρέπει να μελετήσουμε τον ρυθμό με τον οποίο αλλάζουν τα πράγματα γύρω μας. Στη φύση η παράγωγος εμφανίζεται σε πολλές διαδικασίες. Για παράδειγμα, όταν ένα σώμα κινείται η ταχύτητά του υπολογίζεται ως η παράγωγος της θέσης του ως προς τον χρόνο. Αν ρίξουμε μια πέτρα από ένα ύψος, η ταχύτητά της αυξάνεται σταδιακά καθώς πέφτει ενώ η επιτάχυνση της πτώσης εκφράζεται επίσης μέσω παραγώγων. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η ροή του νερού σε ένα ποτάμι. Όταν η στάθμη του νερού ανεβαίνει η ταχύτητα της ροής αυξάνεται και αυτό περιγράφεται με την παράγωγο. Αντίστοιχα, στα φυτά η παράγωγος δείχνει τον ρυθμό με τον οποίο απορροφούν διοξείδιο του άνθρακα ανάλογα με την ένταση του φωτός που δέχονται. Περνώντας στην πραγματική ζωή η έννοια της παραγώγου είναι εξίσου σημαντική. Στην οικονομία, η παράγωγος χρησιμοποιείται για να μετρήσει τον ρυθμό αύξησης των τιμών ενός προϊόντος ή τον πληθωρισμό. Όταν οι τιμές αυξάνονται γρήγορα μπορούμε να κατανοήσουμε πόσο απότομα μεταβάλλεται η οικονομία. Στην υγεία ο καρδιακός ρυθμός, δηλαδή ο αριθμός των παλμών ανά λεπτό, εκφράζεται με την παράγωγο και μπορεί να αποκαλύψει πότε το σώμα βρίσκεται υπό έντονη δραστηριότητα ή άγχος. Ακόμη και η κίνηση στον δρόμο περιγράφεται μέσω παραγώγων. Η κυκλοφοριακή ροή, δηλαδή η ταχύτητα με την οποία κινούνται τα οχήματα σε έναν αυτοκινητόδρομο, αλλάζει όταν αυξάνεται ο αριθμός των αυτοκινήτων ή υπάρχει συμφόρηση. Τέλος, στην καθημερινότητα, η παράγωγος χρησιμοποιείται για να μελετήσει τον ρυθμό με τον οποίο αλλάζει ο πληθυσμός μιας πόλης, πόσο γρήγορα αναπτύσσεται μία καλλιέργεια ή ακόμη και τον ρυθμό αναγέννησης των κυττάρων του ανθρώπινου δέρματος. Η παράγωγος είναι λοιπόν ένα πολύτιμο εργαλείο που μας βοηθά να κατανοούμε τις μεταβολές που συμβαίνουν γύρω μας. Επομένως η παράγωγος μας επιτρέπει να περιγράψουμε με ακρίβεια τον κόσμο και να προβλέπουμε τις αλλαγές που συμβαίνουν σε αυτόν.

2.12.1 Ορισμός της παραγώγου

Στη μελέτη των συναρτήσεων και της μεταβολής τους υπάρχει μια βασική ερώτηση: Πώς μπορούμε να μετρήσουμε τον ρυθμό με τον οποίο αλλάζει μια συνάρτηση; Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, ας ξεκινήσουμε με την έννοια της *τέμνουσας ευθείας της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης* f . Όταν έχουμε δύο σημεία $P = (x_0, f(x_0))$ και $Q = (x, f(x))$ σε μια καμπύλη, μπορούμε να ενώσουμε τα σημεία αυτά με μια ευθεία. Η κλίση της τέμνουσας ευθείας που δίνεται από τον λόγο των μεταβολών

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

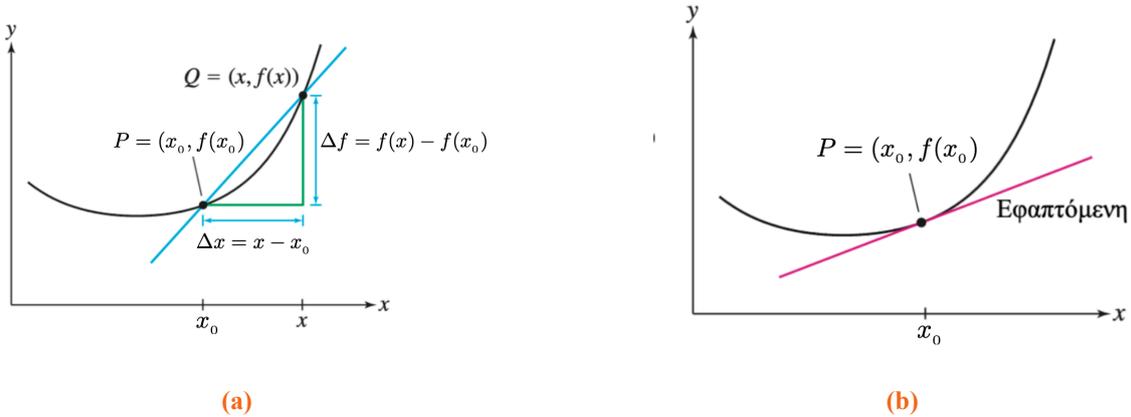
μας δείχνει πόσο αυξάνεται ή μειώνεται η τιμή της συνάρτησης καθώς το x αλλάζει. Η παραπάνω έκφραση ονομάζεται *πηλίκιο διαφορών*. Το $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ εκφράζει τη μεταβολή της τιμής της συνάρτησης, ενώ το $\Delta x = x - x_0$ εκφράζει τη μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Η τέμνουσα ευθεία είναι μια *πρόχειρη προσέγγιση* της κλίσης της καμπύλης (Σχήμα 2.35(a)). Όμως, τι συμβαίνει αν φέρουμε το σημείο Q όλο και πιο κοντά στο σημείο P ; Όσο το x πλησιάζει το x_0 , η τέμνουσα ευθεία μετατρέπεται σε *εφαπτόμενη ευθεία*, η οποία είναι μια ακριβής προσέγγιση της κλίσης της καμπύλης στο σημείο P . Η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας ορίζεται ως το όριο του πηλίκου διαφορών όταν το x τείνει στο x_0 :

$$\text{Κλίση} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Αυτή η κλίση αποτελεί τον *ρυθμό μεταβολής* της συνάρτησης στο σημείο P και είναι γνωστή ως *παράγωγος* της συνάρτησης (Σχήμα 2.35(b)). Η παράγωγος είναι ένα πανίσχυρο εργαλείο που

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

χρησιμοποιείται για να περιγράψει πόσο γρήγορα αλλάζουν οι τιμές μιας συνάρτησης είτε αυτή αναφέρεται στη θέση ενός κινούμενου σώματος είτε στην ανάπτυξη ενός φυτού ή ακόμα και στις τιμές των μετοχών σε μια οικονομία.



Σχήμα 2.34 Η τέμνουσα ευθεία έχει κλίση $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο $(x_0, f(x_0))$.

Ορισμός 2.12.1 Η παράγωγος Η παράγωγος της f σε ένα σημείο x_0 είναι το όριο του πηλίκου διαφορών (αν υπάρχει):

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ή ισοδύναμα

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Όταν το όριο υπάρχει, λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Ορισμός 2.12.2 Η πλευρική παράγωγος Έστω μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$.

(1) Η f ονομάζεται παραγωγίσιμη από αριστερά στο x_0 αν υπάρχει το πλευρικό όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Σε αυτή την περίπτωση το όριο λέγεται παράγωγος της f από αριστερά στο x_0 και συμβολίζεται με $f'_-(x_0)$.

(2) Η f ονομάζεται παραγωγίσιμη από δεξιά στο x_0 αν υπάρχει το πλευρικό όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

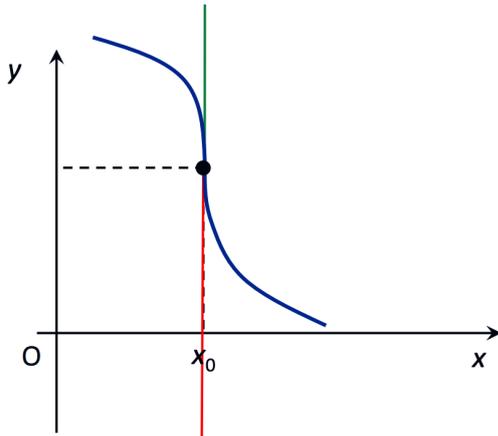
Σε αυτή την περίπτωση το όριο λέγεται παράγωγος της f από δεξιά στο x_0 και συμβολί-

2.12 Παραγώγιση

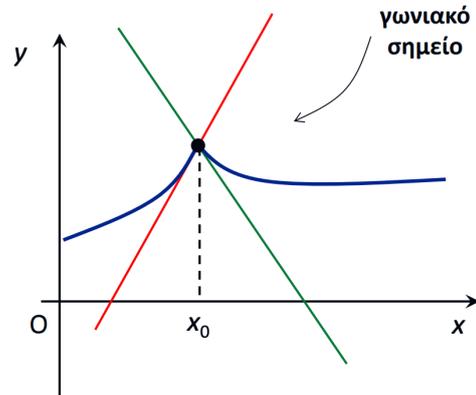
ζεται με $f'_+(x_0)$.

Αν συμβολίσουμε με h την διαφορά $x - x_0$ τότε θα έχουμε

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{h} \quad \text{και} \quad f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



(a) $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = -\infty$



(b) $f'_-(x_0) = a \neq f'_+(x_0) = b, a, b \in \mathbb{R}$

Σχήμα 2.35 Πλευρικές παράγωγοι.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε την εφαπτόμενη ευθεία με πιο αυστηρό τρόπο ως την ευθεία με κλίση $f'(x_0)$ που διέρχεται από το σημείο $P = (x_0, f(x_0))$.

Ορισμός 2.12.3 **Εφαπτόμενη ευθεία** Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο a . Η εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $P = (x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ είναι η ευθεία που διέρχεται από το P και έχει κλίση $f'(x_0)$. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας σε μορφή σημείου-κλίσης δίνεται από τον τύπο:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $P = (a, b)$ με κλίση λ σε μορφή σημείου-κλίσης είναι:

$$y - b = \lambda(x - a)$$

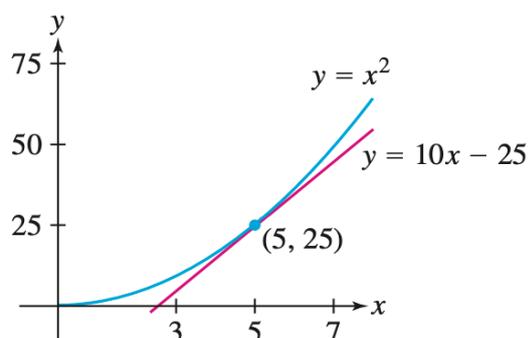
Παράδειγμα 2.12.4 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 \text{ στο } x = 5.$$

Λύση. Αρχικά, πρέπει να υπολογίσουμε το $f'(5)$. Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε:

$$f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

Αυτό το όριο είναι στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Μπορούμε να απλοποιήσουμε και μετά να υπολογίσουμε με αντικατάσταση:



Σχήμα 2.36 Εφαπτόμενη ευθεία της $y = x^2$ στο $x = 5$.

2. Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

$$f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x+5) = 10.$$

Η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας είναι $\lambda = f'(5) = 10$. Χρησιμοποιούμε τον τύπο της ευθείας σημείου-κλίσης $y - b = \lambda(x - a)$, όπου $P = (5, 25)$, $\lambda = 10$ και έχουμε

$$y - 25 = 10(x - 5) \quad \text{ή} \quad y = 10x - 25.$$

Στο επόμενο παράδειγμα θα κάνουμε την παραγωγή χρησιμοποιώντας την δεύτερη εξίσωση του ορισμού της παραγώγου.

Παράδειγμα 2.12.5 Να υπολογίσετε την $f'(3)$, όπου $f(x) = x^2 - 8x$.

Λύση. Χρησιμοποιώντας την δεύτερη εξίσωση του ορισμού της παραγώγου στο σημείο $x_0 = 3$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(3+h)^2 - 8(3+h)] - (3^2 - 8 \cdot 3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(9 + h^2 + 6h - 24 - 8h - 9 + 24)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 2) = -2. \end{aligned}$$

Επομένως $f'(3) = -2$.

Θεώρημα 2.12.6 Η παραγωγισιμότητα συνεπάγεται τη συνέχεια. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$, τότε η f είναι συνεχής στο $x = x_0$.

Απόδειξη. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$, τότε υπάρχει το παρακάτω όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, επειδή αυτός είναι ο ορισμός της συνέχειας στο $x = x_0$.

Για να συνδέσουμε τα δύο όρια θεωρήστε την εξίσωση (ισχύει για $x \neq x_0$)

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Και οι δύο όροι στο δεξί μέλος τείνουν σε ένα όριο καθώς $x \rightarrow x_0$, επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left((x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right).$$

Αυτό οδηγεί στο:

2.12 Παραγωγή

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = 0 \cdot f'(x_0) = 0.$$

Τέλος, από τον κανόνα του αθροίσματος για τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

□

2.12.2 Ο συμβολισμός του Leibniz για την παράγωγο

Ο συμβολισμός του Leibniz για την παράγωγο, δηλαδή το $\frac{dy}{dx}$ αποτελεί μία από τις πιο σημαντικές και χρήσιμες σημειολογικές αναπαραστάσεις στα μαθηματικά και τη φυσική. Ο συμβολισμός αυτός εισήχθη από τον Gottfried Wilhelm Leibniz και παρέμεινε διαχρονικός χάρη στην ευελιξία και τη σαφήνεια που προσφέρει.

Ορισμός 2.12.7 Η παράγωγος σύμφωνα με τον ορισμό του Leibniz γράφεται ως

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{ή} \quad \frac{d}{dx}f(x)$$

και διαβάζεται ως «η παράγωγος του y ως προς το x ».

Αν έχουμε τη συνάρτηση: $y = x^{-2}$ τότε η παράγωγος είναι $\frac{dy}{dx} = -2x^{-3}$.

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Leibniz, για συγκεκριμένη τιμή $x = x_0$ γράφουμε:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \quad \text{ή} \quad \left. \frac{d}{dx}f(x) \right|_{x=x_0}.$$

Σημείωση 2.12.8 Δεν πρέπει να θεωρούμε το $\frac{dy}{dx}$ ως πηλίκο. Οι όροι dy και dx ονομάζονται *διαφορικά* και παίζουν σημαντικό ρόλο σε πολλές εφαρμογές, όπως τη γραμμική προσέγγιση και τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

Ο συμβολισμός του Leibniz χρησιμοποιείται ευρέως για διάφορους λόγους:

1. Υπενθυμίζει ότι η παράγωγος $\frac{df}{dx}$ είναι το όριο του λόγου $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.
2. Επιτρέπει τον διαχωρισμό των μεταβλητών όταν μελετάμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.
3. Θεωρείται χρήσιμος όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή αλλάζει, π.χ., αν αντί για x έχουμε t τότε γράφουμε:

$$\frac{df}{dt}.$$

4. Επιτρέπει την ευκολότερη εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας στη μελέτη παραγώγων.

Ο συμβολισμός του Leibniz λοιπόν παρέχει ένα πολύτιμο εργαλείο για την ανάλυση και τη μελέτη αλλαγών σε συναρτήσεις.

2.12.3 Η παράγωγος ως συνάρτηση

Στην προηγούμενη ενότητα υπολογίσαμε την παράγωγο $f'(x_0)$ για συγκεκριμένες τιμές του x_0 . Είναι χρήσιμο επίσης να δούμε την παράγωγο ως μία συνάρτηση f' , της οποίας οι τιμές $f'(x)$ ορίζονται από τον ορισμό της παραγώγου με βάση το όριο

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Αν $y = f(x)$, γράφουμε επίσης y' ή $y'(x)$ για την $f'(x)$.

Το πεδίο ορισμού της f' αποτελείται από όλες τις τιμές του x στο πεδίο ορισμού της f για τις οποίες υπάρχει το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) αν υπάρχει η $f'(x)$ για κάθε x στο (a, b) . Όταν η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε x στο διάστημα ή στα διαστήματα στα οποία ορίζεται η f , τότε λέμε απλά ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

Παράδειγμα 2.12.9 Να αποδείξετε ότι η $f(x) = x^{-2}$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογίσετε την f' .

Λύση. Το πεδίο ορισμού της $f(x) = x^{-2}$ είναι το $\{x : x \neq 0\}$, οπότε υποθέτουμε ότι $x \neq 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{-h(2x+h)}{x^2(x+h)^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2} \quad (\text{Απαλοιφή του } h) \\ &= -\frac{2x+0}{x^2(x+0)^2} = -\frac{2x}{x^4} = -2x^{-3}. \end{aligned}$$

Το όριο υπάρχει για κάθε $x \neq 0$, οπότε η $y = x^{-2}$ είναι παραγωγίσιμη και $y' = -2x^{-3}$.