ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

“Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ’αυτό μένειν”
Ηράκλειτος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Το παρόν υλικό διατίθεται αποκλειστικά για τους φοιτητές του μαθήματος Γενικά Μαθηματικά Ι του Τμήματος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών..

Δεκέμβρης 2025

Περιεχόμενα

I

1 Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά

Το φως αποτέλεσε για αιώνες ένα μυστήριο για τον άνθρωπο. Στα έργα των ανθρώπων, όπως στους μύθους, στις επιστήμες, ακόμη και στις θρησκείες, το φως έπαιζε πάντοτε ιδιαίτερο ρόλο. Οι πρώτες εικόνες που υπέπεσαν στην αντίληψη του ανθρώπου ήταν οι ευθύγραμμες ακτίνες του φωτός και ο κυκλικός δίσκος του Ήλιου και των πλανητών του. ’Ηταν φυσικό λοιπόν όταν η Γεωμετρία μπήκε στη ζωή των ανθρώπων με την εμπειρική της μορφή, τα πρώτα γεωμετρικά σχήματα που κατασκευάστηκαν να είναι η ευθεία και ο κύκλος. Έτσι φθάσαμε στο σημείο η ευθεία και ο κύκλος να αποκτήσουν ιδιαίτερη σημασία, ιδίως μετά την ανακάλυψη της απόδειξης όπου θεωρούνταν ανεπίτρεπτη η επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος χωρίς την χρήση του χάρακα και του διαβήτη. Η εισαγωγή της Γεωμετρίας άλλαξε την ποιότητα της ανθρώπινης σκέψης και την οδήγησε από την πρακτική στη θεωρητική αντιμετώπιση των πραγμάτων και στην παραγωγή της γνώσης. Η φύση λοιπόν σηματοδότησε την πρώτη μεγάλη ερευνητική διείσδυση της ανθρώπινης σκέψης για την ερμηνεία και την κατανόηση της φυσικής πραγματικότητας. Οι πραγματείες του Αριστοτέλη και η θεμελίωση της Γεωμετρίας από τον Ευκλείδη δημιούργη- σαν το υπόβαθρο στο οποίο βασίστηκαν μετά απο πολλούς αιώνες ο Γαλιλαίος και ο Νεύτωνας, προκειμένου να διαμορφώσουν τη σύγχρονη αντίληψη της Φυσικής δίνοντας με αυτό τον τρόπο το έναυσμα στην εξέλιξη της μαθηματικής Επιστήμης, η οποία με αυτόν τον τρόπο εξελίσσεται μέσα απο μια σειρά σκέψεων και πράξεων που κάθε μια οικοδομείται επάνω στις προηγούμενες. Πολλοί αρχαίοι λαοί όπως οι Σουμέριοι, οι Αιγύπτιοι, οι Κινέζοι και άλλοι χρησιμοποιούσαν άτυπες μαθηματικές πράξεις, όμως, τα μαθηματικά ως μια έννοια που δηλώνει επιστήμη εμφανίζονται για πρώτη φορά στην αρχαία ελλάδα. Ο διακεκριμένος Γάλλος ιστορικός Αρνό Ρεϋμόν έγραψε: «*Σε σύγκριση με τις εμπειρικές και σκόρπιες γνώσεις που οι λαοί της Ανατολής συγκέντρωσαν με τη δουλειά τους στη διάρκεια πολλών αιώνων, η ελληνική επιστήμη είναι ένα θαύμα. Εδώ για πρώτη φορά η ανθρώπινη σκέψη κατανόησε ότι πρέπει να καθορίσει έναν αριθμό γενικών αρχών και να βγάλει απ’ αυτές ορισμένες αλήθειες που είναι τ’ αναγκαίο αποτέλεσμά τους*». Δυο είναι τα στοιχεία που υποννοεί ο Ρεϋμόν και έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην πορεία της εξέλιξης των μαθηματικών, η έννοια απόδειξης, και η ιδέα της αξιωματικής θεμελίωσης. Η έννοια της απόδειξης ξεκίνησε από τον Θαλή, αναπτύχθηκε από τον Πυθαγόρα και συστηματοποιήθηκε και τελειοποιήθηκε από τον Πλάτωνα, τον Αριστοτέλη, τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη. Η σύλληψη της ιδέας της αξιωματικής θεμελίωσης οφείλεται στους αρχαίους Έλληνες. Κλασικό παράδειγμα είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία, η αρχιτεκτονική της αποδεικτικής διαδικασίας απο τον Αριστοτέλη και τον Πυθαγόρα και τους υποστηρικτές του που ονομάστηκαν Πυθαγόρειοι, κ.α.λ. Τα έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών έβαλαν τα θεμέλια και αποτέλεσαν την βάση για την πιό πέρα εξέλιξη των μαθηματικών επιστημών, όπως Θεωρίας Αριθμών, μαθηματικής Λογικής, Αλγεβρας και Απειροστικού Λογισμού. Στο πλαίσιο μιας σφαιρικής πραγμάτευσης των μαθηματικών και με κίνητρο την καταννόησή τους, δίνουμε μερικά στοιχεία της κατηγοριοποίησης των μαθηματικών απο το 3000 π.Χ μέχρι και τον Έκτο αιώνα μ.Χ, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν υπάρχουν αλληλεπικαλύψεις μεταξύ διαφορετικών κατηγοριών.

II

2 Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

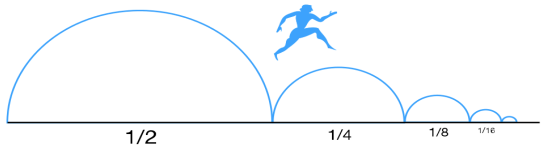
2.1 Εισαγωγή

2.2 Σειρές

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε μια διαφορετική έννοια ορίου που σχετίζεται με την άθροιση άπειρων όρων. Αυτή η διαδικασία γνωστή ως *σύγκλιση σειράς* διαφοροποιείται από την έννοια του ορίου στις ακολουθίες, όπου το αποτέλεσμα εξαρτάται αποκλειστικά από την ουρά της ακολουθίας αγνοώντας πλήρως τους πρώτους όρους της. Στις ακολουθίες καθώς ο δείκτης n αυξάνεται, η πληροφορία από τους αρχικούς όρους «χάνεται» και το όριο καθορίζεται μόνο από την συμπεριφορά των όρων στην ουρά. Αν αλλάξουμε μερικούς από τους πρώτους όρους, το όριο δεν επηρεάζεται. Αυτή η ιδιότητα είναι χρήσιμη για τον ορισμό και τη μελέτη των ακολουθιών επειδή μας επιτρέπει να αγνοούμε την αρχική συμπεριφορά και να επικεντρωνόμαστε στην ασυμπτωτική συμπεριφορά της ακολουθίας. Έτσι για παράδειγμα σε μια ακολουθία όπως $a_n = \frac{1}{n}$ δεν έχει σημασία τι συμβαίνει για τα πρώτα, μικρά n, αφού όσο $n \to \infty$ η ακολουθία τείνει στο 0. Ωστόσο σε άλλες μαθηματικές διαδικασίες όπως στις σειρές (άπειρα αθροίσματα) η συμπεριφορά όλων των όρων της ακολουθίας είναι κρίσιμη. Σε αυτές τις περιπτώσεις, δεν μπορούμε να αγνοήσουμε κανέναν όρο, γιατί κάθε όρος επηρεάζει το αποτέλεσμα της συνολικής άθροισης. Για παράδειγμα, αν αλλάξουμε ακόμα και έναν όρο σε μια σειρά, αυτό μπορεί να αλλάξει εντελώς το αποτέλεσμα ή ακόμα και τη σύγκλιση της σειράς. Αυτή η διαφορά έγκειται στην έννοια της τοπικότητας (locality) για τις ακολουθίες, σε αντίθεση με την ολικότητα (globality) που απαιτείται στις σειρές όπου η συνεισφορά όλων των όρων είναι σημαντική. Στις εφαρμογές, αυτό σημαίνει ότι για κάποιες μαθηματικές ποσότητες, όπως για παράδειγμα η έκφραση του e μέσω μιας σειράς χρειάζεται να λαμβάνουμε υπόψη όλους τους όρους για να προσεγγίσουμε το τελικό αποτέλεσμα.

Παράδοξο του Ζήνωνα - ’Εννοια της συγκλίνουσας άπειρης σειράς

Ο Ζήνων ο Ελεάτης, ένας σημαντικός προσωκρατικός φιλόσοφος τον οποίο ο Αριστοτέλης αποκαλούσε εφευρέτη της διαλεκτικής μεθόδου, με τα περίφημα παράδοξα της Διχοτομίας, του Αχιλλέα με τη χελώνα, του Βέλους και του Σταδίου αποκάλυψε το χάσμα ανάμεσα στο συνεχές και το διακριτό, κάτι που θα γίνει κατανοητό και θα μελετηθεί απο τον Cantor πολλούς αιώνες αργότερα με την αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Συνόλων.



Σχήμα 2.1 *Το παράδοξο της διχοτόμησης του Ζήνωνα .*

Αυτό οδηγεί σε μια πιο “ολιστική” θεώρηση της ακολουθίας, όπου κάθε όρος συνεισφέρει στο συνολικό αποτέλεσμα. Στην ουσία η θεωρία των απειροσειρών είναι ένας τρίτος κλάδος του Λογισμού πέραν του διαφορικού και ολοκληρωτικού Λογισμού που μας παρέχει βολικούς και χρήσιμους τρόπους για να εκφράσουμε συναρτήσεις ως άπειρα αθροίσματα απλών συναρτήσεων. Για παράδειγμα, θα δούμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε την εκθετική συνάρτηση ως

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Πολλές ποσότητες που προκύπτουν στα μαθηματικά και στις εφαρμογές τους δεν μπορούν να υπολογιστούν ακριβώς. Δεν μπορούμε να γράψουμε για παράδειγμα μια ακριβή δεκαδική έκφραση για τον αριθμό π ή για τις τιμές της συνάρτησης του ημιτόνου. Ωστόσο, μερικές φορές αυτές οι ποσότητες μπορούν να αναπαρασταθούν ως άπειρα αθροίσματα όπως θα δούμε χρησιμοποιώντας τη σειρά Taylor. Τα άπειρα αθροίσματα αυτού του τύπου ονομάζονται *απειροσειρές*.

Παράδοξο του Ζήνωνα - 'Εννοια της συγκλίνουσας άπειρης σειράς

Ο Μπέρτραντ Ράσελ πολλούς αιώνες αργότερα περιέγραψε τα τέσσερα παράδοξά του Ζήνωνα ως ασύγκριτα διακριτικά και βαθιά. Για παράδειγμα, το *παράδοξο της διχοτόμησης του Ζήνωνα* αναφέρεται σε ενα δρομέα που ξεκινά με σκοπό να φτάσει στο τέρμα του στίβου. Όμως για να φτάσει στο τέρμα θα πρέπει να τρέξει άπειρο αριθμό από διαδρομές που προστίθενται η μία στην άλλη, και κάθε μια είναι το μισό της προηγούμενης. Και βάσει αυτού του παραδείγματος συμπέρανε ότι το άθροισμα ενός απείρου αριθμού ορισμένων χρονικών διαστημάτων οφείλει να είναι άπειρο. Αυτή η πρόταση βέβαια ισχύει σε πολλές περιπτώσεις, αλλά όχι πάντα. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα στο Σχήμα 2.1 ότι η απόσταση που πρέπει να διανύσει ο δρομέας είναι δύο μονάδες μήκους και η ταχύτητά του είναι 1 μονάδα μήκους ανα λεπτό. Τότε το μισό της απόστασης θα διανυθεί σε χρόνο $t_1 = 1$ μονάδα μήκους, το μισό της υπόλοιπης απόστασης σε χρόνο $t_2 = \frac{1}{2}$ μονάδες μήκους, κ.τ.λ. 'Ετσι ο χρόνος T που απαιτείται να διανυθεί η συγκεκριμένη απόσταση απο τον δρομέα δίνεται απο την σειρά $T = t_1 + t_2 + \ldots t_n + \ldots$ δηλαδή $T = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$. Ετσι παίρνουμε μια απλή γεωμετρική πρόοδο η οποία αθροίζοντας τους όρους δίνει άθροισμα 2. Με αυτήν την έννοια ο δρομέας θα διανύσει ακριβώς την απαιτούμενη απόσταση. Ωστόσο, και πάλι δεν καταρρίψαμε το επιχείρημα του Ζήνωνα διότι αν και ο χρόνος δεν είναι άπειρος η ίδια η γεωμετρική πρόοδος είναι άπειρη. Με το παράδειγμα αυτό οδηγούμαστε στην έννοια της συγκλίνουσας άπειρης σειράς. Σύμφωνα με πολλούς ιστορικούς και μεταγενέστερους φιλόσοφους τα επιχειρήματα του Ζήνωνα αποτελούν την απαρχή μιας διανοητικής πορείας που διαιωνίστηκε μέσα από την δύναμη του πλατωνικού λόγου και αποκάλυψε τη σύγκρουση και το χάσμα ανάμεσα στο συνεχές και το διακριτό που διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά, τη φιλοσοφία, ακόμα και τη φυσική.

Ας δούμε πιο αναλυτικά τι νόημα έχει η πρόσθεση άπειρων όρων. Η ιδέα είναι να εξετάσουμε πεπερασμένα αθροίσματα όρων στην αρχή της σειράς και να δούμε πώς αυτά συμπεριφέρονται. Προσθέτουμε σταδιακά περισσότερους όρους και εξετάζουμε αν τα αθροίσματα τείνουν σε μια οριακή τιμή ή όχι. Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε την ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $n \in \mathbb{N}$. Με βάση αυτήν την ακολουθία μπορούμε να κατασκευάσουμε μια νέα ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\cdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k. \end{aligned}$$

'Οπως παρατηρούμε ο όρος s_n δημιουργείται από την πρόσθεση των n πρώτων όρων της ακολουθίας a_n. Η ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ονομάζεται *ακολουθία μερικών αθροισμάτων* και το ουσιαστικότερο χαρακτηριστικό της είναι η *μνήμη* της, δηλαδή το γεγονός ότι καταγράφει και λαμβάνει υπόψη της τις τιμές όλων των όρων $a_1, a_2, \ldots, a_n$ από τους οποίους περνάει. Πραγματικά, αν αλλάξει ο όρος a_k, τότε θα αλλάξουν όλοι οι όροι της s_n με $n \geq k$. Μ. Με άλλα λόγια, οι όροι της s_n θυμούνται από πού πέρασαν και μεταφέρουν αυτήν την πληροφορία από όρο σε όρο. Η έννοια της ολικότητας, λοιπόν, εκφράζεται μέσω της συνολικής πληροφορίας σχετικά με τους όρους $a_1, a_2, \ldots, a_n$, που αποθηκεύεται στην τιμή που έχει το μερικό άθροισμα s_n.

Ορισμός 2.2.1 Έστω μια ακολουθία a_n, $n \in \mathbb{N}$. Τότε ονομάζουμε *σειρά* S το διατεταγμένο άθροισμα

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots.$$

Το

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

λέγεται *μερικό άθροισμα* k-τάξης της S. Η ακολουθία S_k όπου $k \in \mathbb{N}$ λέγεται *ακολουθία μερικών αθροισμάτων* της S. Οι όροι της a_n θα ονομάζονται και *όροι* της S.

Ορισμός 2.2.2 Μια *εναλλάσσουσα σειρά* είναι μια άπειρη σειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{ή} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,$$

με $a_n > 0$ για κάθε n.

Ορισμός 2.2.3 Μια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

λέγεται ότι *συγκλίνει* στον αριθμό $s \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της συγκλίνει στον s, δηλαδή αν

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s.$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

και ο αριθμός s ονομάζεται *άθροισμα* ή *όριο* της σειράς.

Σημείωση 2.2.4 Η διάταξη των όρων μιας ακολουθίας $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό, η οποία καθορίζει την έννοια της σειράς δεν είναι τυχαία και αποτελεί θεμελιώδες χαρακτηριστικό. Στην περίπτωση όπου η $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ εκφράζεται μέσω ενός αναδρομικού τύπου επιβάλλεται αυστηρή διάταξη στους όρους της καθώς κάθε όρος εξαρτάται άμεσα από τον προηγούμενο. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε το διατεταγμένο άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$. Αντίθετα, όταν πρόκειται για μια σειρά αριθμών χωρίς σαφή αναδρομική δομή η διάταξη μπορεί να χάσει τη σημασία της καθώς πολλές φορές η αλλαγή σειράς ή η ομαδοποίηση των όρων της δίνουν λανθασμένα αποτελέσματα.

Προφανώς το άπειρο άθροισμα που εμφανίζεται στον ορισμό της σειράς καθορίζει την έννοιά της και δεν προδικάζει τη σύγκλισή της. Από τον ορισμό της σειράς είναι ακόμα φανερό ότι η αλλαγή ενός πεπερασμένου πλήθους όρων της σειράς θα αλλάζει την τιμή του ορίου μιας συγκλίνουσας σειράς αλλά θα αφήνει αναλλοίωτη την ίδια την ιδιότητα της σύγκλισης. Δηλαδή, δεν είναι δυνατόν να μετατρέψουμε μία μη συγκλίνουσα σειρά σε συγκλίνουσα αλλάζοντας ένα πεπερασμένο πλήθος όρων, όπως επίσης είναι αδύνατον μία τέτοια αλλαγή να μετατρέψει μία συγκλίνουσα σειρά σε μη συγκλίνουσα. Το μόνο αποτέλεσμα που θα έχει η αντικατάσταση πεπερασμένου πλήθους όρων από άλλους στην περίπτωση που η σειρά συγκλίνει, είναι να μεταβληθεί η τιμή του ορίου της S που αντιπροσωπεύει την τιμή της σειράς. Επομένως το αποτέλεσμα που θα έχει η αντικατάσταση πεπερασμένου πλήθους όρων από άλλους στην περίπτωση που η σειρά συγκλίνει είναι να μεταβληθεί η τιμή του ορίου της S που αντιπροσωπεύει την τιμή της σειράς.

Για παράδειγμα έχουμε ότι

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=2.$$

Αν αλλάξουμε το δεύτερο και τον τέταρτο μόνο όρο της σειράς, θα πάρουμε

$$1+3+\frac{1}{4}+\frac{13}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=6.$$

Θα μπορούσαμε όμως να έχουμε και

$$2+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=2.$$

που σημαίνει ότι η αντικατάσταση πεπερασμένου πλήθους όρων από άλλους δεν οδηγεί νομοτελειακά και σε αλλαγή του ορίου μιας συγκλίνουσας σειράς, απλά επιτρέπει μία πιθανή αλλαγή του ορίου της σειράς.

Η σύγκλιση μιας σειράς είναι επίσης πολύ ευαίσθητη σε διάφορες ομαδοποιήσεις των όρων της, δηλαδή στο πώς ακριβώς κάνουμε τις πράξεις. Για παράδειγμα αν στη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-1)=(1-1)+(1-1)+\cdots=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}0=0$$

που έχει για όριο το 0 γίνουν οι ακόλουθες απομαδοποιήσεις και επαναμαδοποιήσεις όρων παίρνουμε τη σειρά

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1$$

που συγκλίνει σε διαφορετικό όριο ή τη σειρά

$$(1 - 1 + 1) + (-1 + 1 - 1) + (+1 - 1 + 1) + \ldots = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

η οποία δε συγκλίνει, γιατί η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων ταλαντεύεται διαδοχικά μεταξύ των αριθμών 1 και -1. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι ομαδοποιήσεις όρων μπορούν όχι μόνο να μεταβάλουν το όριο μιας σειράς (βλέπε 2.2.1), αλλά ακόμα και να καταστρέψουν τη σύγκλισή της.

Ορισμός 2.2.5 Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία. Θα λέμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει*, όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της συγκλίνει, ενώ στην αντίθετη περίπτωση θα λέμε ότι η σειρά *δεν συγκλίνει*.

Υπενθύμιση 2.2.6 Η γεωμετρική πρόοδος είναι μια ακολουθία αριθμών, στην οποία κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο πολλαπλασιάζοντας με έναν σταθερό αριθμό r, που ονομάζεται λόγος της προόδου. Μια γεωμετρική πρόοδος μπορεί να γραφτεί ως $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$

Το άθροισμα των πρώτων n όρων μιας γεωμετρικής προόδου δίνεται από τον τύπο:

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}, \quad \text{για } r \neq 1,$$

όπου a είναι ο πρώτος όρος και r ο λόγος.

Άθροισμα απείρων όρων όταν $|r| < 1$ συγκλίνει και δίνεται από τον τύπο:

$$S = \frac{a}{1-r}, \quad \text{για } |r| < 1.$$

2.3 Γεωμετρικές, Τηλεσκοπικές και Εναλλάσσουσες Σειρές Κριτήρια Σύγκλισης και Ιδιότητες

Γεωμετρικές σειρές

Μία από τις απλούστερες αλλά συγχρόνως πολύ χρήσιμη σειρά είναι η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \ldots$ η οποία συγκλίνει όταν $|r| < 1$, δηλαδή όταν έχει λόγο με απόλυτη τιμή αυστηρά μικρότερο της μονάδας.
Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της γεωμετρικής σειράς είναι η

$$s_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

η οποία συγκλίνει στην τιμή $1/(1-r)$, επειδή για $|r| < 1$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$.

Παράδειγμα 2.3.1 Να υπολογιστεί η σειρά:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+3^n}{5^n}.$$

Λύση. Η σειρά μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα δύο γεωμετρικών σειρών:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{5^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n}.$$

Και οι δύο γεωμετρικές σειρές συγκλίνουν, αφού οι λόγοι σύγκλισης $r = \frac{1}{5}$ και $r = \frac{3}{5}$ είναι μικρότεροι από τη μονάδα. Υπολογίζουμε τα αθροίσματα ως εξής:

Για την πρώτη σειρά:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{5^n} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = 2 \cdot \frac{1}{\frac{4}{5}} = 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = 2.5.$$

Για τη δεύτερη σειρά:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} = 2.5.$$

Προσθέτοντας τα δύο αθροίσματα:

$$2.5 + 2.5 = 5.$$

Άρα, το αποτέλεσμα της σειράς είναι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+3^n}{5^n} = 5.$$

Τηλεσκοπικές σειρές

Μια σειρά ονομάζεται *τηλεσκοπική* αν είναι της μορφής:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}).$$

Αν η ακολουθία (b_n) είναι συγκλίνουσα, τότε και η αντίστοιχη τηλεσκοπική σειρά θα είναι συγκλίνουσα.

Το n-οστό μερικό άθροισμα s_n μιας τηλεσκοπικής σειράς είναι

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} a_n = \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i+1}).$$

Αναπτύσσοντας τώρα τα μέλη $S_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1})$, τα ενδιάμεσα μέλη απλοποιούνται λόγω της φύσης της τηλεσκοπικής σειράς και επομένως θα έχουμε:

$$S_n = b_1 - b_{n+1}.$$

Αν η ακολουθία (b_n) συγκλίνει, δηλαδή αν έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L,$$

τότε το όριο του a_n θα είναι:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - L.$$

Άρα και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ θα συγκλίνει. Επομένως:

Θεώρημα 2.3.2 Έστω μια τηλεσκοπική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ της οποίας ο γενικός της όρος γράφεται ως $a_n = b_n - b_{n+1}$ όπου b_n είναι κάποια ακολουθία. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει $L \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $L = \lim b_{k+1}$. Τότε το άθροισμά της ισούται με

$$S = \lim_{k\to\infty} S_k = b_1 - \lim b_{k+1} = b_1 - L.$$

Παράδειγμα 2.3.3 Να υπολογίσετε το

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}.$$

*Λύση.*Για να υπολογίσουμε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

χρησιμοποιούμε μερική κλασματική ανάλυση. Πρέπει να βρούμε σταθερές A και B ώστε:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}.$$

Βήμα 1: Εύρεση κοινού παρονομαστή: Γράφουμε με κοινό παρονομαστή

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} = \frac{An+A+Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n+A}{n(n+1)}.$$

Ο αριθμητής πρέπει να ισούται με 1, επομένως, $A+B=0$ και $A=1$ το οποίο συνεπάγεται ότι $B=-1$.

Βήμα 2: Τελική μορφή Άρα έχουμε

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Βήμα 3: Υπολογισμός του αθροίσματος

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Ορίζουμε την ακολουθία $b_n = \frac{1}{n}$. Τότε $a_n = b_n - b_{n+1}$, άρα η σειρά S είναι τηλεσκοπική, και το k-τάξης μερικό άθροισμά της ισούται με $b_1 - b_{k+1}$. Επειδή

$$\lim b_{k+1} = \lim \tfrac{1}{k+2} = 0,$$

έχουμε ότι

$$S = b_1 - \lim b_{k+1} = 1 - 0 = 1.$$

Σημείωση 2.3.4 *Οι υποθέσεις έχουν σημασία.* Γνωρίζοντας ότι μια σειρά συγκλίνει, μπορούμε μερικές φορές να υπολογίσουμε το άθροισμά της μέσω απλών αλγεβρικών χειρισμών. Για παράδειγμα, υποθέστε ότι γνωρίζουμε πως η γεωμετρική σειρά με $a_1 = \dfrac{1}{2}$ και $r = \dfrac{1}{2}$ συγκλίνει. Ας πούμε ότι το άθροισμα της σειράς είναι S, και γράφουμε:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots .$$

Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές της εξίσωσης με 2, έχουμε:

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + S.$$

Αυτό συνεπάγεται:

$$2S = 1 + S \quad \text{ή} \quad S = 1.$$

Επομένως, το άθροισμα της σειράς είναι $S = 1$.

Τι συμβαίνει όμως όταν ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία για μια αποκλίνουσα σειρά; Ας δούμε την περίπτωση:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots .$$

Πολλαπλασιάζοντας με 2:

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots = S - 1.$$

Αυτό δίνει:

$$2S = S - 1 \quad \text{ή} \quad S = -1.$$

Το αποτέλεσμα $S = -1$ είναι παράλογο, διότι η σειρά είναι αποκλίνουσα.

Κριτήριο εναλλάσσουσας σειράς

Υποθέστε ότι η $\{b_n\}$ είναι μια θετική ακολουθία που φθίνει και συγκλίνει στο 0, δηλαδή,

$$b_1 > b_2 > b_3 > b_4 > \cdots > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Τότε η ακόλουθη εναλλάσσουσα σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n =$$

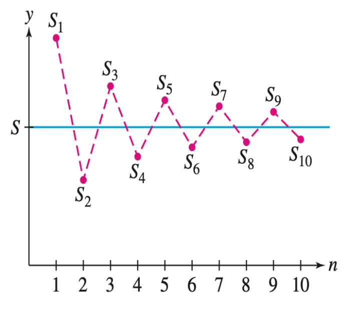
$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$$

συγκλίνει.

Επιπλέον, αν $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$, τότε

$$0 < S < b_1 \text{ και } S_p < S < S_q$$

για κάθε p άρτιο και κάθε q περιττό.



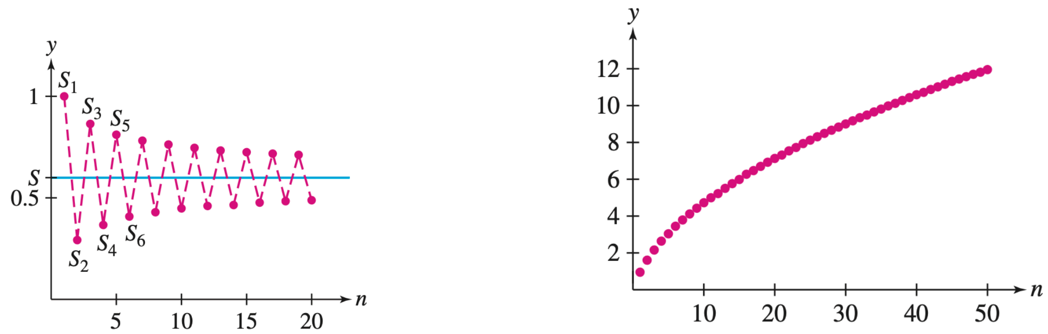
Σχήμα 2.2 *Τα μερικά αθροίσματα μιας εναλλάσσουσας σειράς ταλαντώνονται πάνω και κάτω από το όριο. Τα περιττά μερικά αθροίσματα φθίνουν και τα άρτια αυξάνονται .*

Παράδειγμα 2.3.5 Να δείξετε ότι η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots$$

συγκλίνει. Επιπλέον, να δείξετε ότι αν S είναι το άθροισμα της σειράς, τότε ισχύει $0 \leq S \leq 1$.

Λύση. Οι όροι $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ είναι θετικοί και φθίνουν ενώ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Επομένως η σειρά συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο εναλλάσσουσας σειράς. Επιπλέον αν το άθροισμα της σειράς είναι S τότε $0 \leq S \leq 1$ επειδή $b_1 = 1$. Επομένως η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει (Σχήμα 2.3).



(a) *Μερικά αθροίσματα της* $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(b) *Μερικά αθροίσματα της* $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Σχήμα 2.3

Το επόμενο θεώρημα το οποίο βασίζεται στην ανισότητα $S_p < S < S_q$ του κριτήριο εναλλάσσουσας σειράς μας δίνει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με το σφάλμα που προκύπτει από τη χρήση ενός μερικού αθροίσματος για την προσέγγιση του αθροίσματος μιας συγκλίνουσας εναλλάσσουσας σειράς.

Θεώρημα 2.3.6 Έστω $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$, όπου $\{b_n\}$ είναι μια θετική φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο 0. Τότε

$$|S - S_N| \leq b_{N+1}.$$

Με άλλα λόγια όταν προσεγγίζουμε το S με το S_N, το σφάλμα είναι μικρότερο από το μέγεθος του πρώτου παραλειπόμενου όρου b_{N+1}.

Λύση. Αν το N είναι άρτιο τότε το $N+1$ είναι περιττό και σύμφωνα με το κριτήριο εναλλάσσουσας σειράς έχουμε ότι

$$S_N < S < S_{N+1}.$$

Επίσης αν το N είναι περιττό τότε το $N+1$ είναι άρτιο και σύμφωνα με το κριτήριο εναλλάσσουσας σειράς έχουμε ότι

$$S_{N+1} < S < S_N.$$

Σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$|S - S_N| < |S_{N+1} - S_N| = b_{N+1}.$$

Παράδειγμα 2.3.7 Να δείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

συγκλίνει. Αν το S παριστάνει το άθροισμα, τότε

a) Να δείξετε ότι $|S - S_6| < \dfrac{1}{7}$.

b) Να βρείτε ένα N τέτοιο ώστε το S_N να προσεγγίζει το S με σφάλμα μικρότερο από 10^{-3}.

Λύση. Οι όροι $b_n = \dfrac{1}{n}$ είναι θετικοί και φθίνουν, ενώ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Επομένως η σειρά συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο της εναλλάσσουσας σειράς.

(a) Εφαρμόζοντας την ανισότητα

$$|S - S_N| < b_{N+1} = \tfrac{1}{N+1}$$

για $N = 6$ παίρνουμε

$$|S - S_6| < b_7 = \frac{1}{7}.$$

(b) Για να προσεγγίζει το S με σφάλμα μικρότερο από 10^{-3} επιλέγουμε το N έτσι ώστε να ισχύει

$$\frac{1}{N+1} \leq 10^{-3} \implies N+1 \geq 10^3 \implies N \geq 999.$$

Όπως θα δούμε στο παρακάτω παράδειγμα, το κριτήριο της εναλλάσσουσας σειράς δεν ισχύει αν παραβλέψουμε την υπόθεση ότι η ακολουθία (b_n) είναι φθίνουσα. Πριν προχωρήσουμε στο συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα, θα υπενθυμίσουμε ένα κλασικό και ιδιαίτερα σημαντικό παράδειγμα αποκλίνουσας σειράς, την *αρμονική σειρά*.

Παράδειγμα 2.3.8 Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ ονομάζεται *αρμονική σειρά* και δεν συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμά της είναι άπειρο. Πράγματι, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Χωρίζουμε τους όρους της σειράς ως εξής:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

Παρατηρούμε ότι κάθε ομάδα περιέχει 2^k όρους όπου k είναι η θέση της ομάδας. Επιπλέον, σε κάθε ομάδα, κάθε όρος είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τη μικρότερη τιμή του όρου στην ομάδα.

Για παράδειγμα:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\geq 2\cdot\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\geq 4\cdot\frac{1}{8}.$$

Άρα το συνολικό άθροισμα είναι τουλάχιστον

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=1+\frac{1}{2}n,$$

το οποίο αποκλίνει καθώς προσεγγίζει το άπειρο. ’Αρα η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει καθώς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\to\infty.$$

Παράδειγμα 2.3.9 Να δείξετε ότι η σειρά

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}\right)+\cdots$$

αποκλίνει.

Λύση. Η σειρά μπορεί να γραφεί συνοπτικά ως

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}\right).$$

Χωρίζουμε τη σειρά σε δύο μέρη

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

Η πρώτη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ είναι η αρμονική σειρά η οποία είναι γνωστό ότι αποκλίνει και η δεύτερη σειρά είναι μια γεωμετρική σειρά με λόγο $r=\frac{1}{2}$ η οποία συγκλίνει. Επειδή όταν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε έναν πεπερασμένο αριθμό από μια αποκλίνουσα σειρά το αποτέλεσμα παραμένει συμπεραίνουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}\right)$$

αποκλίνει.

2.3.1 Γενικά κριτήρια σύγκλισης

Η μελέτη της σύγκλισης των σειρών έχει απασχολήσει ιδιαίτερα τη μαθηματική βιβλιογραφία καθώς συνδέεται με διάφορα κριτήρια σύγκλισης και αποκλίσεων για σειρές πολλών τύπων. Στο παρόν πλαίσιο θα περιοριστούμε στις βασικές αρχές σύγκλισης ώστε να παρέχουμε στον αναγνώστη μια εισαγωγική κατανόηση της θεματικής. Μια σειρά μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα απείρων αριθμών. Για να έχει νόημα αυτό το άπειρο άθροισμα θα πρέπει να συγκλίνει σε μια πεπερασμένη τιμή. Αυτό σημαίνει ότι οι προσθετέοι όροι της σειράς, καθώς προστίθενται, θα πρέπει να μειώνονται συνεχώς και να τείνουν στο μηδέν. Διαφορετικά η σειρά δεν μπορεί να συγκλίνει. Αυτό το συμπέρασμα ισχύει κυρίως για τους όρους που βρίσκονται στο "τέλος" της σειράς, δηλαδή σε αυτούς που ακολουθούν μετά από έναν συγκεκριμένο αριθμό πρώτων όρων. Αν οι όροι στην ουρά μιας σειράς δεν τείνουν στο μηδέν τότε η σειρά δε συγκλίνει ακόμα και αν όλοι οι όροι της σειράς γίνουν οσοδήποτε μικροί. Για παράδειγμα, η σειρά με όρους $a_n = \varepsilon > 0$, όπου ε οσοδήποτε μικρός θετικός αριθμός, δε συγκλίνει γιατί

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon = \lim_{n\to\infty} (n\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Στην περίπτωση όμως που μία σειρά με όρους a_n συγκλίνει τότε θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Αυτό μπορεί να δειχθεί ως εξής: Αφού η σειρά με όρους a_n συγκλίνει, έπεται ότι η ακολουθία με όρους s_n είναι Cauchy. Συνεπώς υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 έτσι ώστε

$$|s_n - s_m| < \varepsilon$$

για κάθε n και m μεγαλύτερους ή ίσους του n_0. Αν λοιπόν επιλέξουμε την τιμή $n = m+1$, με $m \geq n_0$, τότε

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=1}^{m+1} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \right| = |a_{m+1}| < \varepsilon$$

από την οποία σχέση έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι:

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως *κριτήριο απόκλισης του n-οστού όρου* ή *κριτήριο της απόκλισης* και διατυπώνεται συχνά με την ισοδύναμη μορφή που ακολουθεί ως εξής:

Το κριτήριο απόκλισης του n-οστού όρου

Αν $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Σχόλιο 2.3.10 Το κριτήριο απόκλισης του n-οστού όρου προκύπτει άμεσα ως αντίθετοαντιστροφή του προηγούμενου συμπεράσματος.

Πράγματι, η πρόταση

"αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$"

είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση

$$\text{“αν } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0, \text{ τότε η σειρά } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ αποκλίνει”.}$$

Συνεπώς, το κριτήριο απόκλισης του n-οστού όρου δεν αποτελεί νέο αποτέλεσμα, αλλά άμεση συνέπεια της παραπάνω αναγκαίας συνθήκης σύγκλισης.

Υπενθύμιση 2.3.11 Θεωρούμε την πρόταση

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ συγκλίνει } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Θέτουμε:

- A: «η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει»,
- B: «$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$».

Τότε ισχύουν τα εξής:

- η σύγκλιση της σειράς είναι ικανή συνθήκη για να ισχύει $a_n \to 0$,
- η σύγκλιση $a_n \to 0$ είναι αναγκαία συνθήκη για να συγκλίνει η σειρά,
- όμως δεν είναι ικανή, όπως δείχνει το παράδειγμα της αρμονικής σειράς.

Συνοπτικά:

$$A \Rightarrow B, \quad \text{όχι } B \Rightarrow A.$$

Παράδειγμα 2.3.12 Να εξετάσετε τη σύγκλιση ή την απόκλιση των σειρών:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n+1} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots.$$

Λύση. (a) Έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{4n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{4+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{4}$. Ο n-οστός όρος a_n δεν συγκλίνει στο μηδέν, οπότε η σειρά αποκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο απόκλισης του n-οστού όρου.
(b) Ο γενικός όρος $a_n = (-1)^{n-1} \dfrac{n}{n+1}$ δεν τείνει σε ένα όριο. Πράγματι, το $\dfrac{n}{n+1}$ τείνει στο 1, οπότε οι περιττοί όροι a_{2n+1} τείνουν στο 1 και οι άρτιοι όροι a_{2n} τείνουν στο -1. Επειδή το $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ δεν υπάρχει, η σειρά αποκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο απόκλισης του n-οστού όρου.
Το κριτήριο απόκλισης του n-οστού όρου μας λέει ένα μόνο μέρος της ιστορίας. Αν το a_n δεν τείνει στο μηδέν, τότε η $\sum a_n$ αποκλίνει οπωσδήποτε. Αλλά τι συμβαίνει αν το a_n τείνει πράγματι στο μηδέν; Σε αυτή την περίπτωση, η σειρά μπορεί να συγκλίνει ή μπορεί να αποκλίνει. Με άλλα λόγια, η $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ είναι μια αναγκαία συνθήκη σύγκλισης αλλά δεν είναι επαρκής. Όπως δείχνουμε στο επόμενο παράδειγμα, είναι δυνατόν για μια σειρά να αποκλίνει ακόμη και αν οι όροι της τείνουν στο μηδέν.

Παράδειγμα 2.3.13 Η ακολουθία τείνει στο μηδέν αλλά η σειρά αποκλίνει. Να αποδείξετε την απόκλιση της

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots .$$

Λύση. Ο γενικός όρος $\frac{1}{\sqrt{n}}$ τείνει στο μηδέν. Ωστόσο, επειδή κάθε όρος στο μερικό άθροισμα S_N είναι μεγαλύτερος ή ίσος από $\frac{1}{\sqrt{N}}$, έχουμε:

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{N}}$$

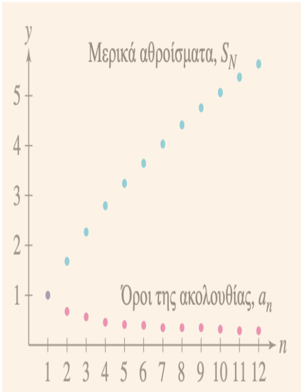
$$\geq$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (\text{με } N \text{ όρους}).$$

Αυτό μας δίνει:

$$S_N \geq N\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = \sqrt{N}.$$

Αλλά η $\sqrt{N}$ αυξάνεται απεριόριστα καθώς $N \to \infty$. Επομένως, το S_N αυξάνεται επίσης απεριόριστα. Αυτό αποδεικνύει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.



Σχήμα 2.4 *Τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνουν παρά το γεγονός ότι οι όροι $\frac{1}{\sqrt{n}}$ τείνουν στο μηδέν*

Πριν εισαγάγουμε τα επιμέρους κριτήρια σύγκλισης, είναι χρήσιμο να διατυπώσουμε ένα γενικό και θεμελιώδες κριτήριο, το οποίο δεν απαιτεί τη γνώση του αθροίσματος μιας σειράς, αλλά βασίζεται αποκλειστικά στη συμπεριφορά των μερικών της αθροισμάτων. Το κριτήριο αυτό είναι το κριτήριο σύγκλισης κατά Cauchy και αποτελεί άμεση συνέπεια της πληρότητας του χώρου των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 2.3.14 Μια άπειρη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως αν η σειρά των απόλυτων τιμών της συγκλίνει, δηλαδή αν $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ είναι συγκλίνουσα.

Κριτήριο σύγκλισης κατά Cauchy.

Μια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για όλα τα $m > n \geq N$ να ισχύει

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon.$$

Θεώρημα 2.3.15 Αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και απλά.

Λύση. Από την ανισότητα τριγώνου έχουμε

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_n|.$$

Συνεπώς από το Κριτήριο σύγκλισης κατά Cauchy έχουμε ότι αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει τότε θα συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$.

Το κριτήριο σύγκλισης κατά Cauchy παρέχει έναν γενικό και αυστηρό τρόπο ελέγχου της σύγκλισης μιας σειράς. Ιδιαίτερη σημασία έχει στη μελέτη της απόλυτης σύγκλισης, διότι αν μια σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει απολύτως, δηλαδή αν η σειρά $\sum |a_n|$ συγκλίνει, τότε από το κριτήριο του Cauchy προκύπτει άμεσα ότι και η αρχική σειρά συγκλίνει. Στην πράξη, το κριτήριο του Cauchy χρησιμοποιείται συχνά έμμεσα: η απόλυτη σύγκλιση εξασφαλίζει ότι οι "ουρές" της σειράς μπορούν να γίνουν αυθαίρετα μικρές, γεγονός που εγγυάται τη σύγκλιση της σειράς ανεξάρτητα από τα πρόσημα των όρων της.

Το άθροισμα των αντίστροφων δυνάμεων n^{-p} ονομάζεται *σειρά-p*. Όπως δείχνει το επόμενο κριτήριο η σύγκλιση ή η απόκλιση αυτών των σειρών καθορίζεται από την τιμή του p.

Κριτήριο σύγκλισης σειράς-p

Η άπειρη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει διαφορετικά.

Επομένως, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

συγκλίνει για $p > 1$ και αποκλίνει για $p \leq 1$.

Παρακάτω είναι δύο παραδείγματα σειρών-p:

Παράδειγμα 2.3.16 Όπως είπαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, για $p=1$ έχουμε την αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ η οποία δεν συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμά της είναι άπειρο.

Εάν $p=\frac{1}{3}$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\cdots=\infty \quad \text{(αποκλίνει).}$$

Για τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/3}}$$

έχουμε ήδη δώσει αποδείξεις απόκλισης στα Παραδείγματα 2.3.8 και 2.3.13 αντίστοιχα. Και στις δύο περιπτώσεις πρόκειται για p-σειρές με $p\leq 1$, γεγονός που οδηγεί στην απόκλισή τους.

Απομένει να εξετάσουμε την περίπτωση $p=2$, δηλαδή τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

η οποία αποτελεί το βασικό παράδειγμα p-σειράς με $p>1$. Στην επόμενη απόδειξη θα δείξουμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του ολοκληρώματος. Εάν $p=2$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots \quad \text{(συγκλίνει).}$$

Περίπτωση $p=2$ χωρίς ολοκληρώματα. Θεωρούμε τη σειρά θετικών όρων

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Θα δείξουμε ότι συγκλίνει, ομαδοποιώντας τους όρους της.

Βήμα 1: Ομαδοποίηση. Γράφουμε τη σειρά ως άθροισμα ομάδων με πλήθος όρων $1,1,2,4,\ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\left(\frac{1}{1^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\left(\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{8^2}\right)+\cdots$$

Δηλαδή, μετά τους δύο πρώτους όρους, οι ομάδες είναι

$$\{3,4\}, \quad \{5,6,7,8\}, \quad \ldots$$

και γενικά η k-οστή ομάδα (για $k\geq 1$) περιλαμβάνει τους δείκτες

$$n = 2^k + 1,\ 2^k + 2,\ \ldots,\ 2^{k+1}.$$

Η ομάδα αυτή έχει ακριβώς

$$2^{k+1} - (2^k + 1) + 1 = 2^k$$

όρους.

Βήμα 2: Εκτίμηση κάθε ομάδας.

- Για $n = 3, 4$:

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \leq 2 \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{2}{9} < \frac{1}{2}.$$

- Για $n = 5, \ldots, 8$: κάθε όρος ικανοποιεί $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{5^2}$, άρα

$$\frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{8^2} \leq 4 \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{4}{25} < \frac{1}{4}.$$

- Γενικά, για $k \geq 1$, στην ομάδα

$$\frac{1}{(2^k+1)^2} + \frac{1}{(2^k+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{k+1})^2}$$

  κάθε δείκτης n ικανοποιεί $n \geq 2^k + 1 > 2^k$, άρα

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(2^k)^2}.$$

  Εφόσον υπάρχουν 2^k όροι στην ομάδα, παίρνουμε την εκτίμηση

$$\frac{1}{(2^k+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{k+1})^2} \leq 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^2} = \frac{1}{2^k}.$$

Βήμα 3: Σύγκριση με γεωμετρική σειρά. Άρα το άθροισμα της αρχικής σειράς ικανοποιεί

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2^k+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{k+1})^2} \right) \leq 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ είναι γεωμετρική με λόγο $\frac{1}{2}$, άρα συγκλίνει και μάλιστα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{4} < +\infty.$$

Οι σειρές-p είναι ιδιαίτερα σημαντικές γιατί χρησιμοποιούνται συχνά για να καθορίσουμε τη σύγκλιση ή την απόκλιση μερικών γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

Ένα άλλο σχεδόν προφανές κριτήριο είναι το ακόλουθο:

Κριτήριο άμεσης σύγκρισης

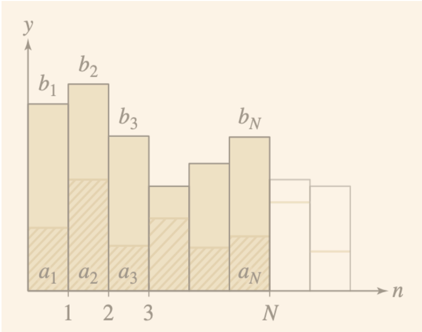
Θεωρούμε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n \geq 0$$

για τις οποίες ισχύει ότι $a_n \leq b_n, \quad n \in \mathbb{N}$.

(i) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(ii) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ δεν συγκλίνει.



Σχήμα 2.5 *Η σύγκλιση της $\sum b_n$ εξαναγκάζει τη σύγκλιση της $\sum a_n$.*

Με άλλα λόγια, αν προσθέτοντας άπειρους θετικούς αριθμούς φτάσουμε σε έναν πεπερασμένο αριθμό, τότε προσθέτοντας άπειρους μικρότερους ή ίσους αριθμούς θα φτάσουμε πάλι σε έναν πεπερασμένο αριθμό. Αντίθετα, αν το αποτέλεσμα της πρόσθεσης είναι άπειρο, τότε προσθέτοντας μεγαλύτερους ή ίσους αριθμούς θα καταλήξουμε πάλι σε άπειρο αποτέλεσμα. Παρά την απλότητά του, το κριτήριο άμεσης σύγκρισης είναι ιδιαίτερα χρήσιμο και αποτελεσματικό.

Κριτήριο Ολοκληρώματος

Έστω $a_n = f(n)$, όπου $f(x)$ είναι μια θετική, φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση του x για $x \geq 1$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Αν το $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(ii) $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ αποκλίνει, τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Παράδειγμα 2.3.17 Στο Παράδειγμα 2.3.16 αποδείξαμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ που είναι γνωστή ως *σειρά του Basel*, συγκλίνει σε έναν πεπερασμένο αριθμό. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει άμεσα με τη χρήση του κριτηρίου του ολοκληρώματος.

Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x \geq 1,$$

η οποία είναι θετική, συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Υπολογίζουμε το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

Το ολοκλήρωμα συγκλίνει σε πεπερασμένο αριθμό. Επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

συγκλίνει.

Παράδειγμα 2.3.18 Να αποδείξετε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+2}$ συγκλίνει ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ αποκλίνει.

Λύση. Επειδή

$$\frac{1}{3^n+2} < \frac{1}{3^n} \quad \text{για κάθε } n \geq 1$$

και η γεωμετρική σειρά με λόγο $1/3$ συγκλίνει, έπεται ότι και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+2}$$

συγκλίνει.

'Ομοίως, επειδή

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}+1} \quad \text{για κάθε } n \geq 3$$

και η $\frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει, έπεται ότι και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

δεν συγκλίνει.

Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις 2.3.19 Τι ρόλο παίζουν τα μερικά αθροίσματα στον ορισμό του αθροίσματος μιας απειροσειράς;

Απάντηση: Τα μερικά αθροίσματα $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ μας βοηθούν να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά μιας απειροσειράς. Αν το $\lim_{N\to\infty} S_N = S$, τότε η σειρά συγκλίνει και το άθροισμά της είναι S. Αν το όριο δεν υπάρχει, η σειρά αποκλίνει.

Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις 2.3.20 Ποιο είναι το άθροισμα της παρακάτω απειροσειράς;

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$$

Απάντηση: Αυτή είναι γεωμετρική σειρά με πρώτο όρο $a = \frac{1}{4}$ και λόγο $r = \frac{1}{2}$. Το άθροισμά της δίνεται από τον τύπο:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις 2.3.21 Τι συμβαίνει αν εφαρμόσουμε τον τύπο του αθροίσματος μιας γεωμετρικής σειράς στην παρακάτω σειρά; Είναι έγκυρος ο τύπος;

$$1+3+3^2+3^3+3^4+\cdots$$

Απάντηση: Ο τύπος του αθροίσματος μιας γεωμετρικής σειράς εφαρμόζεται μόνο όταν $|r| < 1$. Στην περίπτωση αυτή ο λόγος $r = 3$ είναι μεγαλύτερος από το 1, επομένως η σειρά αποκλίνει και ο τύπος δεν είναι έγκυρος.

Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις 2.3.22 Είναι ορθή ή όχι η συλλογιστική στην ακόλουθη πρόταση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \text{ επειδή το } \frac{1}{n^2} \text{ τείνει στο μηδέν.}$$

Απάντηση: Το γεγονός ότι $a_n \to 0$ δεν είναι επαρκής συνθήκη σύγκλισης. Στην περίπτωση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, πράγματι συγκλίνει (γνωστό αποτέλεσμα από τη θεωρία σειρών), αλλά το άθροισμα δεν είναι 0. Η πρόταση είναι λανθασμένη.

Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις 2.3.23 Είναι ορθή ή όχι η συλλογιστική στην ακόλουθη πρόταση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ συγκλίνει επειδή } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Απάντηση: Η συλλογιστική είναι λανθασμένη. Για να διαπιστώσουμε αν μια σειρά συγκλίνει, το γεγονός ότι ο γενικός όρος της σειράς $\frac{1}{\sqrt{n}}$ τείνει στο μηδέν, δεν αρκεί. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ είναι γνωστή ως σειρά p με $p = \frac{1}{2}$ που είναι αποκλίνουσα.

Επομένως, παρόλο που

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

αυτό από μόνο του δεν εγγυάται ότι η σειρά συγκλίνει.

Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις 2.3.24 Να βρείτε ένα N τέτοιο ώστε $S_N > 25$ για τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2.$$

Απάντηση: Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2$ είναι αποκλίνουσα, αλλά το μερικό άθροισμα $S_N = 2N$. Θέλουμε:

$$2N > 25 \implies N > 12.5.$$

Άρα, το μικρότερο ακέραιο N είναι $N = 13$.

Λυμένες ασκήσεις 2.3.25

1. Να βρείτε έναν τύπο για τον γενικό όρο a_n (όχι το μερικό άθροισμα) για τις απειροσειρές:

   (a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$

   (b) $\frac{1}{1} + \frac{5}{2} + \frac{25}{4} + \frac{125}{8} + \cdots$

   (c) $\frac{1}{1} - \frac{2^2}{2\cdot 1} + \frac{3^3}{3\cdot 2\cdot 1} - \frac{4^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + \cdots$

   (d) $\frac{2}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{2}{3^2+1} + \frac{1}{4^2+1} + \cdots$

2. Να γράψετε σε συμβολισμό αθροίσματος τις παρακάτω σειρές:

(a) $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+\cdots$

(b) $\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{36}+\cdots$

(c) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$

(d) $\dfrac{125}{9}+\dfrac{625}{16}+\dfrac{3125}{25}+\dfrac{15625}{36}+\cdots$

3. Στις παρακάτω σειρές να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο απόκλισης του n-οστού όρου για να αποδείξετε ότι η σειρά αποκλίνει.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n+12}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

   (c) $\dfrac{0}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}+\cdots$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$.

   (e) $\cos\dfrac{1}{2}+\cos\dfrac{1}{3}+\cos\dfrac{1}{4}+\cdots$

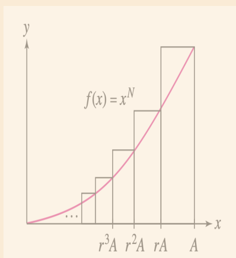
   (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{4n^2+1}-n\right)$.

4. Να δείξετε ότι αν το $a>1$ είναι ένας φυσικός αριθμός , τότε:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+a)}=\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{a}\right).$$

5. Ο Pierre de Fermat χρησιμοποίησε σειρές για να υπολογίσει το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση της $f(x)=x^N$ στο $[0,A]$. Για $0<r<1$, έστω $F(r)$ το άθροισμα των εμβαδών των άπειρων ορθογωνίων δεξιών άκρων με άκρα Ar^n, όπως στο Σχήμα 2.6. Καθώς το r τείνει στο 1, τα ορθογώνια γίνονται στενότερα και το $F(r)$ τείνει στο εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση. Να δείξετε ότι

$$F(r)=A^{N+1}\frac{1-r}{1-r^{N+1}}.$$



Σχήμα 2.6

Λύση.

2.3 Γεωμετρικές, Τηλεσκοπικές και Εναλλάσσουσες Σειρές Κριτήρια Σύγκλισης και Ιδιότητες

1. (a) Παρατηρούμε ότι πρόκειται για μια γεωμετρική σειρά με πρώτο όρο $a_1 = \frac{1}{3}$ και λόγο $r = \frac{1}{3}$. Ο γενικός όρος μιας γεωμετρικής σειράς δίνεται από τον τύπο $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$. Αντικαθιστώ- ντας τις τιμές του a_1 και του r έχουμε $a_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^n}$.

   (b) Η σειρά είναι $\frac{1}{1} + \frac{5}{2} + \frac{25}{4} + \frac{125}{8} + \cdots = \frac{1}{1} + \frac{5}{2} + \frac{5^2}{2^2} + \frac{5^3}{2^3} + \cdots$. Επομένως αριθμητής του n-οστού όρου είναι 5^{n-1} και ο παρονομαστής του n-στου όρου είναι 2^{n-1}. Άρα, ο γενικός όρος της σειράς είναι

   $$a_n = \frac{5^{n-1}}{2^{n-1}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}.$$

   (c) Η σειρά είναι

   $$\frac{1}{1} - \frac{2^2}{2 \cdot 1} + \frac{3^3}{3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{4^4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \cdots$$

   Επομένως αριθμητής του n-οστού όρου είναι n^n, ενώ ο παρονομαστής είναι $n!$, και οι όροι εναλλάσσουν πρόσημο. Άρα, ο γενικός όρος της σειράς είναι

   $$a_n = (-1)^{n+1} \frac{n^n}{n!}.$$

   (d) Η σειρά είναι

   $$\frac{2}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{2}{3^2+1} + \frac{1}{4^2+1} + \cdots$$

   Ο αριθμητής εναλλάσσεται μεταξύ 2 (για περιττά n) και 1 (για άρτια n), ενώ ο παρονομαστής είναι $n^2 + 1$. Άρα, ο γενικός όρος της σειράς είναι

   $$a_n = \begin{cases} \frac{2}{n^2+1}, & \text{αν } n \text{ είναι περιττός,} \\[2ex] \frac{1}{n^2+1}, & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος.} \end{cases}$$

2. (a) Η σειρά είναι:

   $$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

   Παρατηρούμε ότι κάθε όρος έχει τη μορφή

   $$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad \text{για } n \geq 1.$$

   Άρα, η σειρά γράφεται ως:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(b) Η σειρά είναι:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\cdots$$

Κάθε όρος έχει τη μορφή:

$$a_n = \frac{1}{(n+2)^2}, \quad \text{για } n \geq 1.$$

Άρα, η σειρά γράφεται ως:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2}.$$

(c) Η σειρά είναι:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

Οι όροι εναλλάσσονται και έχουν τη μορφή:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}, \quad \text{για } n \geq 1.$$

Άρα, η σειρά γράφεται ως:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

(d) Η σειρά είναι:

$$\frac{125}{9}+\frac{625}{16}+\frac{3125}{25}+\frac{15625}{36}+\cdots$$

μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι κάθε όρος έχει τη μορφή:

$$a_n = \frac{5^{n+2}}{(n+2)^2}, \quad \text{για } n \geq 1.$$

Άρα, η σειρά γράφεται ως:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{(n+2)^2}.$$

3. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n+12}$. Ο γενικός όρος είναι:

$$a_n = \frac{n}{10n+12}.$$

Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{10n+12} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10+\frac{12}{n}} = \frac{1}{10}.$$

Επειδή το όριο δεν είναι 0, η σειρά αποκλίνει.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Ο γενικός όρος είναι:

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1.$$

Επειδή το όριο δεν είναι 0, η σειρά αποκλίνει.

(c) Η σειρά που δίνεται είναι:

$$\frac{0}{1} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \dots$$

Ο γενικός όρος αυτής της σειράς είναι:

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n-1}{n}.$$

Υπολογισμός του ορίου του a_n:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}\frac{n-1}{n}.$$

Αφαιρώντας τον παράγοντα $(-1)^{n-1}$, ο οποίος εναλλάσσεται, υπολογίζουμε το απόλυτο όριο:

$$\left|\frac{n-1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}.$$

Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Άρα:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0.$$

Εφόσον το όριο του a_n δεν είναι 0, η σειρά αποκλίνει.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$. Ο γενικός όρος είναι:

$$a_n = (-1)^n n^2.$$

Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \text{ δεν υπάρχει (ταλαντεύεται).}$$

Επειδή το όριο δεν υπάρχει, η σειρά αποκλίνει.

(e) $\cos\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{3} + \cos\frac{1}{4} + \cdots$

Ο γενικός όρος είναι:

$$a_n = \cos\frac{1}{n}.$$

Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos 0 = 1.$$

Επειδή το όριο δεν είναι 0, η σειρά αποκλίνει.

(f) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{4n^2+1}-n\right)$. Ο γενικός όρος είναι:

$$a_n = \sqrt{4n^2+1}-n.$$

Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+1}-n\right).$$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή:

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{4n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{4n^2+1}+n\right)}{\sqrt{4n^2+1}+n}.$$

Απλοποιώντας:

$$a_n = \frac{4n^2+1-n^2}{\sqrt{4n^2+1}+n} = \frac{3n^2+1}{\sqrt{4n^2+1}+n}.$$

Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2n} = +\infty.$$

Επειδή το όριο δεν είναι 0 η σειρά αποκλίνει.

4. Ξεκινάμε με τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+a)}$. Χρησιμοποιούμε μερική κλασματική ανάλυση για τον γενικό όρο:

$$\frac{1}{n(n+a)} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+a}\right).$$

Αντικαθιστούμε στον γενικό όρο της σειράς και θα έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+a)} = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+a}\right) =$$

$$\frac{1}{a}(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-...+\frac{1}{n+a-1}-\frac{1}{n+a}\right) =$$

$$\frac{1}{a}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+...+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+a-1}-\frac{1}{n+a}\right)\right)$$

$$\overset{\text{τηλεσκοπικές σειρές}}{=} \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{a}\right).$$

5. Το $F(r)$ ορίζεται ως το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων δεξιών άκρων Ar^n. Για κάθε όρο, το μήκος της βάσης του ορθογωνίου, έστω O_n, είναι $Ar^n(1-r)$ και το ύψος είναι $(r^nA)^N$. Άρα, το εμβαδόν του n-οστού ορθογωνίου είναι:

$$E(O_n) = A^{N+1}((1-r)r^{n(N+1)}.$$

Συνεπώς, το $F(r)$ γράφεται ως:

$$F(r) = A^{N+1}(1-r)\sum_{n=0}^{\infty} r^{n(N+1)}.$$

Η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^{n(N+1)}$ είναι γεωμετρική με πρώτο όρο 1 και λόγο r^{N+1}. Το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς είναι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{n(N+1)} = \frac{1}{1-r^{N+1}}, \quad \text{για } |r| < 1.$$

Αντικαθιστούμε το άθροισμα στη σχέση για το $F(r)$ και έχουμε

$$F(r) = A^{N+1}\frac{1-r}{1-r^{N+1}}.$$

Σημείωση 2.3.26 Το σύμβολο $\approx$ στη μαθηματική ανάλυση σημαίνει ασυμπτωτική ισοδυναμία. Δηλώνει ότι δύο εκφράσεις έχουν την ίδια τάξη μεγέθους καθώς μια μεταβλητή τείνει σε κάποιο όριο (π.χ. το n τείνει στο ∞ ή σε κάποιο κρίσιμο σημείο). Με λίγα λόγια η ασυμπτωτική ισοδυναμία δηλώνει ότι για μεγάλο n οι δύο εκφράσεις $f(n)$ και $g(n)$ έχουν την ίδια "*ταχύτητα αύξησης*" και η αναλογία τους πλησιάζει τη μονάδα. Δηλαδή για πολύ μεγάλες τιμές του n τα $f(n)$ και $g(n)$ είναι "πολύ κοντά". Επομένως έχουμε

$$f(n) \approx g(n) \quad \text{όταν } n \to \infty \text{ σημαίνει ότι } \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Συμπερασματικά το $\approx$ δεν σημαίνει ακριβής ισότητα αλλά μια έννοια ασυμπτωτικής ισότητας, η οποία χρησιμοποιείται ευρέως για την περιγραφή συμπεριφοράς συναρτήσεων σε οριακές καταστάσεις.

Ασυμπτωτική Ισοδυναμία και Κανόνας των Bernoulli-L'Hôpital

Κανόνας Bernoulli-L'Hôpital: Ο Johann Bernoulli μέλος της διάσημης οικογένειας μαθηματικών είχε αναπτύξει την ιδέα της χρήσης των παραγώγων για την επίλυση ορίων της μορφής $\frac{0}{0}$ και $\frac{\infty}{\infty}$. Η ιδέα ήταν δική του και την παρουσίασε στους μαθητές του συμπεριλαμβανομένου του Guillaume de l'Hôpital. Το 1696 ο l'Hôpital δημοσίευσε το πρώτο εγχειρίδιο διαφορικού λογισμού με τίτλο "*Analyse des infiniment petits*". Σε αυτό περιέγραψε τον κανόνα που φέρει σήμερα το όνομά του. Ο κανόνας εμφανίζεται χωρίς να γίνεται αναφορά στον Bernoulli. Ο Bernoulli είχε συμφωνήσει να διδάξει τον L'Hôpital και σύμφωνα με επιστολές που βρέθηκαν αργότερα, υπήρχε οικονομική συμφωνία: ο Bernoulli θα παρείχε μαθηματικές ιδέες και ο L'Hôpital θα μπορούσε να τις χρησιμοποιήσει όπως επιθυμούσε ακόμη και χωρίς να αναφέρει την πηγή. Μετά τον θάνατο του L'Hôpital, ο Bernoulli αποκάλυψε ότι ο κανόνας ήταν δική του ιδέα. Η ιστορική κοινότητα συμφώνησε αλλά ο κανόνας είχε ήδη καθιερωθεί με το όνομα "*Κανόνας του L'Hôpital*". Είναι γεγονός ότι ο l'Hôpital δεν "έκλεψε" την ιδέα διότι ήταν σύμφωνος με τον Bernoulli ότι μπορούσε να δημοσιεύσει το υλικό. Ωστόσο, η επιστημονική κοινότητα συχνά αναγνωρίζει ότι ο Johann Bernoulli ήταν ο δημιουργός του κανόνα. Αυτή η ιστορία μας υπενθυμίζει πόσο σημαντική είναι η συνεργασία και η διαφάνεια στις επιστημονικές ανακαλύψεις.

Θεώρημα 2.3.27 Κανόνας Bernoulli-L'Hôpital Υποθέστε ότι η f και η g είναι παραγωγίσιμες σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το a και ότι

$$f(a) = g(a) = 0.$$

Επίσης, υποθέστε ότι $g'(x) \neq 0$ (εκτός ίσως από το a). Τότε:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο στο δεξιό μέλος υπάρχει ή είναι άπειρο (∞ ή $-\infty$). Αυτό το συμπέρασμα ισχύει επίσης αν η f και η g είναι παραγωγίσιμες για x κοντά στο (αλλά όχι ίσο με) a και

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \text{ και } \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$$

Ο κανόνας αυτός ισχύει επίσης και για τα πλευρικά όρια.

Θεώρημα 2.3.28 Κανόνας Bernoulli-L'Hôpital για όρια στο άπειρο Υποθέστε ότι η f και η g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα (b,∞) και ότι $g'(x) \neq 0$ για $x > b$. Αν τα $\lim_{x\to\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to\infty} g(x)$ υπάρχουν και είναι είτε και τα δύο μηδέν είτε και τα δύο άπειρα, τότε

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο στο δεξί μέλος υπάρχει. Παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει για όρια καθώς $x \to -\infty$.

Ο κανόνας των Bernoulli-L'Hôpital εφαρμόζεται σε απροσδιόριστες μορφές $0/0$ και $\pm\infty/\infty$. Μπορεί επίσης να εφαρμοστεί σε όρια σε οποιαδήποτε από τις μορφές $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, και ∞^0, μετατρέποντας τις εκφράσεις αυτές σε κάποια άλλη μορφή $0/0$ ή $\pm\infty/\infty$. Ο κανόνας των Bernoulli- L'Hôpital εφαρμόζεται επίσης σε όρια καθώς $x \to \infty$ ή $x \to -\infty$.

Θεώρημα 2.3.29 Κατά τη σύγκριση του ρυθμού αύξησης συναρτήσεων λέμε ότι η $f(x)$ αυξάνεται ταχύτερα από τη $g(x)$ και γράφουμε $g \ll f$ αν

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Το επόμενο κριτήριο σύγκλισης περιλαμβάνει τη σύγκριση μεταξύ δύο σειρών $\sum a_n$ και $\sum b_n$

μέσω ενός ορίου των λόγων $\dfrac{a_n}{b_n}$ των όρων των δύο σειρών.

Κριτήριο οριακής σύγκρισης

Έστω $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ θετικές ακολουθίες. Υποθέστε ότι υπάρχει το παρακάτω όριο:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Τότε ισχύουν:

- Αν $L > 0$ με $L \in \mathbb{R}$, τότε οι δύο σειρές έχουν την ίδια συμπεριφορά ως πρός την σύγκλιση. Δηλαδή είτε θα συγκλίνουν και οι δύο είτε θα αποκλίνουν και οι δύο ταυτόχρονα.
- Αν $L = \infty$ και η $\sum b_n$ αποκλίνει, τότε και η $\sum a_n$ αποκλίνει.
- Αν $L = 0$ και η $\sum b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum a_n$ συγκλίνει.

ΠΡΟΣΟΧΗ *Το κριτήριο της οριακής σύγκρισης δεν ισχύει αν οι σειρές δεν είναι θετικές. Δείτε την Σημείωση 2.3.31.*

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ *Για να θυμάστε τις διαφορετικές περιπτώσεις του κριτηρίου οριακής σύγκρισης μπορείτε να σκεφτείτε με αυτόν τον τρόπο:*

- *Αν $L > 0$, τότε $a_n \approx Lb_n$ για μεγάλα n. Με άλλα λόγια, οι σειρές $\sum a_n$ και $\sum b_n$ είναι περίπου πολλαπλάσιες μεταξύ τους, οπότε η μία συγκλίνει αν και μόνο αν η άλλη συγκλίνει.*
- *Αν $L = \infty$, τότε το b_n είναι πολύ μεγαλύτερο από το a_n (για μεγάλο n), οπότε αν αποκλίνει η $\sum b_n$, η $\sum a_n$ αποκλίνει σίγουρα.*
- *Τέλος, αν $L = 0$, τότε η b_n είναι πολύ μεγαλύτερη από την a_n και η σύγκλιση της $\sum b_n$ οδηγεί στη σύγκλιση της $\sum a_n$.*

Παράδειγμα 2.3.30 Να βρείτε αν οι σειρές

$$\text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 - n - 1}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$$

συγκλίνουν.

Λύση. (a) Αν διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με n^2, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για μεγάλο n

$$\frac{n^2}{n^4 - n - 1} \approx \frac{1}{n^2}.$$

(Το ισοδύναμο που χρησιμοποιείται ($\approx$) για το $\dfrac{n^2}{n^4 - n - 1} \approx \dfrac{1}{n^2}$ σημαίνει ότι για μεγάλες τιμές του n ο αριθμητής και ο παρανομαστής της έκφρασης μπορούν να προσεγγιστούν από τους κυρίαρχους όρους τους.)

Για να εφαρμόσουμε το κριτήριο οριακής σύγκρισης, θέτουμε:

$$a_n = \frac{n^2}{n^4 - n - 1} \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Παρατηρούμε ότι το $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ υπάρχει και είναι θετικό. Πράγματι,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^4-n-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^4-n-1} \cdot n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4-n-1}.$$

Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με n^4, έχουμε:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}} = 1.$$

Εφόσον η $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η σειρά μας $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^4-n-1}$ συγκλίνει επίσης, σύμφωνα με το κριτήριο οριακής σύγκρισης.

(b) Εφαρμόζουμε το κριτήριο οριακής σύγκρισης με $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$ και $b_n = \frac{1}{n}$. Τότε:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+4}}.$$

Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με n:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1.$$

Εφόσον η $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει και $L > 0$ η σειρά $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$ αποκλίνει επίσης.

Σημείωση 2.3.31 **Οι υποθέσεις έχουν σημασία**

Το 1829 ο Lejeune Dirichlet παρατήρησε ότι ο σπουδαίος Γάλλος μαθηματικός Augustin Louis Cauchy έκανε ένα λάθος σε ένα δημοσιευμένο άρθρο υποθέτοντας εσφαλμένα ότι το κριτήριο οριακής σύγκρισης ισχύει για μη θετικές σειρές. Παρακάτω είναι οι δύο σειρές του Dirichlet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right).$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

είναι εναλλάσσουσα σειρά και συγκλίνει, επειδή το $\frac{1}{\sqrt{n}}$ τείνει στο μηδέν καθώς $n \to \infty$ και είναι φθίνουσα.

Η δεύτερη σειρά είναι η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right).$$

Ο γενικός όρος δίνεται από την σχέση

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{2(n-1)}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

Η σειρά γίνεται

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Η πρώτη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει ενώ η δεύτερη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ είναι η αρμονική σειρά και αποκλίνει.

Επομένως, η συνολική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$$

αποκλίνει.

Από την άλλη μεριά $\frac{a_n}{b_n} \to 1$, όπου

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \quad \text{και} \quad b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right).$$

Πράγματι,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}}{\left(\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n\cdot\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}} = 1, (\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right| \to 0).$$

Επομένως το όριο είναι καλά ορισμένο, αλλά η σύγκλιση της πρώτης σειράς $\sum a_n$ δεν εξασφαλίζει τη σύγκλιση της δεύτερης σειράς $\sum b_n$, επειδή οι όροι είναι μη θετικοί. Αυτό το αντιπαράδειγμα δείχνει ότι το κριτήριο οριακής σύγκρισης δεν ισχύει για μη θετικές σειρές. Για να εφαρμοστεί σωστά, οι σειρές πρέπει να έχουν θετικούς όρους.

Λυμένες ασκήσεις 2.3.32

1. Να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο της άμεσης σύγκρισης για να βρείτε αν συγκλίνει κάθε μία απο τις παρακάτω απειροσειρές:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^5+4n+1}, \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/3}+2^n},$$

$$\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2n-1}}, \quad \text{(e)} \sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{m!+4^m}, \quad \text{(f)} \sum_{n=4}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-3},$$

$$\text{(g)} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2 k}{k^2}, \quad \text{(h)} \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^{2/9}}{k^{10/9}-1}, \quad \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n+3^{-n}},$$

2. Να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο οριακής σύγκρισης για να αποδείξετε τη σύγκλιση ή την απόκλιση κάθε απειροσείρας.

$$\text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{n^4-1}, \quad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}, \quad \text{(c)} \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+1}},$$

$$\text{(d)} \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{\sqrt{n^7+2n^2+1}}, \quad \text{(e)} \sum_{n=3}^{\infty}\frac{3n+5}{n(n-1)(n-2)}, \quad \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n+n}{e^{2n}-n^2},$$

$$\text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\ln n}, \quad \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{4^n}, \quad \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right),$$

Λύση

1. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$

   Εδώ $\dfrac{1}{n2^n} < \dfrac{1}{2^n}$ για $n \geq 1$. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ είναι γεωμετρική με λόγο $r = \dfrac{1}{2} < 1$, άρα συγκλίνει. Επομένως, η αρχική σειρά συγκλίνει.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5+4n+1}$

Για μεγάλο n, έχουμε $\frac{n^3}{n^5+4n+1} \approx \frac{1}{n^2}$. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει (σειρά p-τύπου με $p > 1$), η αρχική σειρά συγκλίνει επίσης.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}+2^n}$

Για $n \geq 1$, ισχύει $\frac{1}{n^{1/3}+2^n} < \frac{1}{2^n}$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ είναι γεωμετρική και συγκλίνει, επομένως και η αρχική σειρά συγκλίνει.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2n-1}}$

Για μεγάλο n, έχουμε $\sqrt{n^3+2n-1} \approx \sqrt{n^3} = n^{3/2}$, οπότε $\frac{1}{\sqrt{n^3+2n-1}} \approx \frac{1}{n^{3/2}}$.
Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει (σειρά p-τύπου με $p > 1$), άρα και η αρχική σειρά συγκλίνει.

(e) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{m!+4^m}$

Για $m \geq 1$, έχουμε $\frac{4}{m!+4^m} < \frac{4}{4^m} = \frac{1}{4^{m-1}}$. Η σειρά $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^{m-1}}$ είναι γεωμετρική και συγκλίνει, επομένως και η αρχική σειρά συγκλίνει.

(f) Για να μελετήσουμε τη σύγκλιση, συγκρίνουμε τον όρο της σειράς $\frac{\sqrt{n}}{n-3}$ με μια απλούστερη έκφραση. Ο στόχος είναι να προσδιορίσουμε αν η σειρά είναι συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα. 'Εχουμε ότι για $n \geq 4$ ισχύει ότι $n-3 < n$. Επομένως

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n} < \frac{\sqrt{n}}{n-3}.$$

Η σειρά $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ είναι μια p-σειρά με $p = \frac{1}{2} < 1$. Επομένως η σειρά $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k^2}$

Για κάθε k, έχουμε $\sin^2 k \leq 1$, άρα $\frac{\sin^2 k}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει (σειρά p-τύπου με $p > 1$), επομένως και η αρχική σειρά συγκλίνει.

(h) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{1/9}}{k^{10/9}-1}$

Για μεγάλο k έχουμε $k^{10/9}-1 \approx k^{10/9}$ άρα $\dfrac{k^{1/9}}{k^{10/9}-1} \approx \dfrac{1}{k}$. Επειδή η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ αποκλίνει, η αρχική σειρά αποκλίνει.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{3^n+3^{-n}}$

Για $n \geq 1$, έχουμε $3^n+3^{-n} > 3^n$, οπότε $\dfrac{2}{3^n+3^{-n}} < \dfrac{2}{3^n}$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{3^n}$ είναι γεωμετρική και συγκλίνει, επομένως και η αρχική σειρά συγκλίνει.

2. (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^4-1}$

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με n^2, ώστε $\dfrac{n^2}{n^4-1} \approx \dfrac{1}{n^2}$. Επειδή η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ συγκλίνει (σειρά p-τύπου με $p > 1$), η αρχική σειρά συγκλίνει επίσης.

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(n-1)}$.

'Εχουμε ότι $\dfrac{1}{n(n-1)} \approx \dfrac{1}{n^2}$. 'Αρα η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(n-1)}$ συγκλίνει.

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}}$

Για μεγάλο n, έχουμε $\sqrt{n^3+1} \approx \sqrt{n^3} = n^{3/2}$, οπότε $\dfrac{n}{\sqrt{n^3+1}} \approx \dfrac{1}{n^{1/2}}$. Η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1/2}}$ αποκλίνει (σειρά p-τύπου με $p = 1/2 < 1$), άρα η αρχική σειρά αποκλίνει.

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^3}{\sqrt{n^7+2n^2+1}}$

Για μεγάλο n, έχουμε $\sqrt{n^7+2n^2+1} \approx \sqrt{n^7} = n^{7/2}$, οπότε $\dfrac{n^3}{\sqrt{n^7+2n^2+1}} \approx \dfrac{1}{n^{1/2}}$. Η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1/2}}$ αποκλίνει (σειρά p-τύπου με $p = 1/2 < 1$), άρα η αρχική σειρά αποκλίνει.

(e) $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{3n+5}{n(n-1)(n-2)}$

Για μεγάλο n, έχουμε $\dfrac{3n+5}{n(n-1)(n-2)} \approx \dfrac{3}{n^2}$. Επειδή η σειρά $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ συγκλίνει (σειρά p-τύπου με $p > 1$), η αρχική σειρά συγκλίνει.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n+n}{e^{2n}-n^2}$

Για μεγάλο n, έχουμε $\frac{e^n+n}{e^{2n}-n^2} \approx \frac{e^n}{e^{2n}} = \frac{1}{e^n}$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ είναι γεωμετρική και συγκλίνει, επομένως και η αρχική σειρά συγκλίνει.

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\ln n}$

Για μεγάλο n, έχουμε $\sqrt{n}+\ln n \approx \sqrt{n}$, άρα $\frac{1}{\sqrt{n}+\ln n} \approx \frac{1}{\sqrt{n}}$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει, επομένως και η αρχική σειρά αποκλίνει.

(h) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n}$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}.$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4^n}$ συγκλίνει. Πράγματι, επειδή $\frac{2n}{4^n} \leq \frac{1}{2^n}$ και η γεωμετρική σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει έχουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4^n}$ συγκλίνει.

Η δεύτερη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ είναι γεωμετρική και επίσης συγκλίνει. Επομένως, η συνολική σειρά συγκλίνει.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

Για μεγάλο n, χρησιμοποιούμε την προσέγγιση $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}$ ($\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$), οπότε $1-\cos\frac{1}{n} \approx \frac{1}{2n^2}$. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η αρχική σειρά συγκλίνει.

Ασκήσεις 2.3.33 Να εξετάσετε τη σύγκλιση ή την απόκλιση χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε μέθοδο έχουμε παρουσιάσει ως τώρα.

(1) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-9}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{4n+9}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\cos n}{n^3}$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^5+1}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\sin n}$

(7) $\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{-n}$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2}$ (9) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}\ln n}$

(10) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^{12}}{n^{9/8}}$ (11) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 4^{1/k}$ (12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n - 2n}$

(13) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^4}$ (14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n - n}$ (15) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n - n}$

(16) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2 - n}$ (17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ (18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 4n^{3/2}}{n^3}$

(19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n}$ (20) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n^{3/2}}$ (21) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$

(22) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}}$

2.4 Εισαγωγή στα Κριτήρια του Λόγου και της Ρίζας

Στις προηγούμενες ενότητες αναπτύξαμε έναν αριθμό θεωρημάτων και κριτηρίων που χρησιμοποιούνται στη διερεύνηση της σύγκλισης ή απόκλισης σειρών. Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε δύο ακόμη κριτήρια, το κριτήριο του λόγου και το κριτήριο της ρίζας. Ξεκινάμε με το κριτήριο του λόγου.

Θεώρημα 2.4.1 Έστω ότι υπάρχει το όριο

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

(i) Αν $\rho < 1$, τότε η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει απόλυτα.

(ii) Αν $\rho > 1$, τότε η σειρά $\sum a_n$ αποκλίνει.

(iii) Αν $\rho = 1$, το κριτήριο είναι ασαφές.

Παράδειγμα 2.4.2 (a) Να αποδείξετε ότι η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ συγκλίνει.

(b) Να εξετάσετε αν συγκλίνει η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

(c) Να εξετάσετε αν συγκλίνει η $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{1000^n}$.

(d) Να δείξετε ότι όταν $\rho = 1$, τόσο η σύγκλιση όσο και η απόκλιση είναι δυνατές εξετάζοντας τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ και $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$.

Λύση:

(a) Υπολογίζουμε τον λόγο και το όριο του με $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$. Παρατηρήστε ότι $(n+1)! = (n+1)n!$. Επομένως,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}.$$

Παίρνουμε

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

Εφόσον $\rho < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$ συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου.

(b) Εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου με $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2 \cdot n^2}.$$

Παίρνουμε

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Εφόσον $\rho < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$ συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου.

(c) Αυτή η σειρά αποκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot 1000^n}{1000^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1000} = \infty.$$

(d) Για την $a_n = n^2$ έχουμε

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

Επιπλέον, για την $b_n = n^{-2}$,

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}} = 1.$$

Επομένως, $\rho = 1$ και στις δύο περιπτώσεις, αλλά στην πραγματικότητα η $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ αποκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο απόκλισης του n-οστού όρου, όπου $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$, και η $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ συγκλίνει, εφόσον είναι μια σειρά-p με $p = 2 > 1$. Αυτό δείχνει ότι τόσο η σύγκλιση όσο και η απόκλιση είναι πιθανές όταν $\rho = 1$.

Το επόμενο κριτήριό μας βασίζεται στο όριο των n-οστών ριζών $\sqrt[n]{|a_n|}$.

Θεώρημα 2.4.3 Έστω ότι υπάρχει το όριο

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(i) Αν $L < 1$, τότε η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει απόλυτα.

(ii) Αν $L > 1$, τότε η σειρά $\sum a_n$ αποκλίνει.

(iii) Αν $L = 1$, το κριτήριο είναι ασαφές.

Παράδειγμα 2.4.4 Να εξετάσετε αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+3}\right)^n.$$

Λύση: Έχουμε

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3}.$$

Υπολογίζουμε:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{3}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Εφόσον $L < 1$, η σειρά συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο της ρίζας.

2.5 Καθορισμός του Κριτηρίου που θα Εφαρμοστεί

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με μια σύντομη επισκόπηση όλων των κριτηρίων που έχουμε εισαγάγει ως τώρα για τον προσδιορισμό της σύγκλισης και πώς αποφασίζει κανείς ποιο κριτήριο θα εφαρμοστεί. Έστω ότι δίνεται η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Να έχετε κατά νου ότι οι σειρές για τις οποίες η σύγκλιση ή η απόκλιση είναι γνωστή περιλαμβάνουν τις γεωμετρικές σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, οι οποίες συγκλίνουν για $|r| < 1$, και τις σειρές-p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

οι οποίες συγκλίνουν για $p > 1$.

2.5.1 Το Κριτήριο Απόκλισης του n-οστού Όρου

Να ελέγξετε πρώτα αυτό το κριτήριο. Αν $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, τότε η σειρά αποκλίνει. Αν όμως $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, δεν γνωρίζουμε αν η σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει και προχωράμε στο επόμενο βήμα.

2.5.2 Θετική Σειρά

Αν όλοι οι όροι της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι θετικοί δοκιμάστε ένα από τα παρακάτω κριτήρια:

(α) *Κριτήριο Άμεσης Σύγκρισης:* Εξετάστε αν η παράλειψη όρων στον αριθμητή ή τον παρονομαστή δίνει μια σειρά που γνωρίζετε αν συγκλίνει ή αποκλίνει. Για παράδειγμα, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$$

συγκλίνει επειδή $\frac{1}{n^2+\sqrt{n}} < \frac{1}{n^2}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει (σειρά-p με $p = 2 > 1$).

(β) *Κριτήριο Οριακής Σύγκρισης:* Έστω ότι έχουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, τότε συγκρίνουμε τον γενικό όρο με έναν απλούστερο όρο γνωστής σειράς. Αν ο λόγος τους τείνει σε θετικό αριθμό, τότε οι δύο σειρές έχουν την ίδια συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση. Για παράδειγμα, θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n = \frac{2n+1}{n^3+n}.$$

Επιλέγουμε ως σειρά σύγκρισης τη

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad b_n = \frac{1}{n^2},$$

η οποία είναι συγκλίνουσα p-σειρά με $p = 2$.
Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{n^3+n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)n^2}{n^3+n} = \lim -_{n\to\infty} \frac{2n^3+n^2}{n^3+n} = 2.$$

Το όριο είναι θετικός και πεπερασμένος αριθμός. Επομένως, από το κριτήριο οριακής σύγκρισης, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3+n}$$

συγκλίνει.

(γ) *Κριτήριο Λόγου:* Είναι συχνά αποτελεσματικό για όρους με παραγοντικό ($n!$) ή για σταθερές υψωμένες σε δύναμη n. Για παράδειγμα, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

συγκλίνει επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 < 1.$$

(δ) *Κριτήριο Ρίζας:* Χρησιμοποιείται όταν υπάρχει κάποιος όρος της μορφής $f(n)^{1/n}$. Για παράδειγμα, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{2n}}$$

συγκλίνει επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1.$$

2.5.3 Μη Θετικές Σειρές

(α) *Κριτήριο Εναλλάσσουσας Σειράς:* Αν η σειρά είναι εναλλάσσουσα, όπως $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, δείξτε ότι b_n είναι φθίνουσα και $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

(β) *Απόλυτη Σύγκλιση:* Αν η σειρά $\sum a_n$ δεν είναι εναλλάσσουσα, τότε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ δεν συγκλίνει τότε μιλάμε για *σχετική σύγκλιση*.

Ασκήσεις 2.5.1

(a) Να εφαρμόσετε το κριτήριο του λόγου για να εξετάσετε τη σύγκλιση ή την απόκλιση κάθε σειράς ή να δηλώσετε ότι το κριτήριο είναι ασαφές.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{5^n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{100}}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{5n^3+1}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ (7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2}$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{2^n}$ (10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$ (11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^n}$ (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{n!}$

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{6^n}$ (14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^9}$ (15) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}\ln n}$ (16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)!}$ (18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$ (19) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ (20) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

(b) Να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο της ρίζας για να εξετάσετε τη σύγκλιση ή την απόκλιση κάθε σειράς (ή να δηλώσετε ότι το κριτήριο είναι ασαφές).

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ (3) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k+10}$ (4) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{3k+1}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-n}$ (6) $\sum_{n=4}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

(c) Να εξετάσετε τη σύγκλιση ή την απόκλιση κάθε σειράς χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε μέθοδο έχει αναπτυχθεί στο παρόν κείμενο.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+4^n}{7^n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{1/n}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}$ (7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ (8) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^3}$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5^n}$ (10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(\ln n)^3}$ (11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3-n^2}}$ (12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n}{3n^4+9}$

(d) Να δείξετε ότι το κριτήριο του λόγου δεν εφαρμόζεται, αλλά να επιβεβαιώσετε τη σύγκλιση χρησιμοποιώντας το κριτήριο άμεσης σύγκρισης για τη σειρά

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots$$

(e) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n n!}{n^n}$, όπου το c είναι μια σταθερά.

(α) Να αποδείξετε ότι η σειρά συγκλίνει απόλυτα αν $|c|<e$ και αποκλίνει αν $|c|>e$.

(β) Είναι γνωστό ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n n!}{n^{n+1/2}}=\sqrt{2\pi}.$$

Να το επιβεβαιώσετε αριθμητικά.

(γ) Να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο της οριακής σύγκρισης για να αποδείξετε ότι η σειρά αποκλίνει για $c=e$.

2.6 Δυναμοσειρές

Έστω ότι x_0 είναι σταθερός πραγματικός αριθμός, x είναι πραγματική μεταβλητή και a_n μια πραγματική ακολουθία.

Ορισμός 2.6.1 Μία *δυναμοσειρά με κέντρο στο* x_0 είναι μια απειροσειρά

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\cdots$$

όπου το a_n αντιπροσωπεύει τον συντελεστή του n-οστού όρου.

Οι δυναμοσειρές είναι χρήσιμες στη μαθηματική ανάλυση, όπου προκύπτουν ως σειρές Taylor σε απείρως παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Σε πολλές περιπτώσεις το x_0 (δηλαδή το κέντρο της σειράς) είναι ίσο με μηδέν, για παράδειγμα όταν εξετάζουμε μια σειρά Laurent. Σε τέτοιες περιπτώσεις η δυναμοσειρά παίρνει την απλούστερη μορφή

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

Με τη βοήθεια των σειρών μπορούμε να δώσουμε νόημα στην ιδέα ενός πολυωνύμου απείρου βαθμού

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Σημείωση 2.6.2 Οι αρνητικές δυνάμεις δεν επιτρέπονται σε μια δυναμοσειρά. Για παράδειγμα, η σειρά

$$1 + x^{-1} + x^{-2} + \cdots$$

δεν θεωρείται δυναμοσειρά (αν και είναι *σειρά Laurent*). Ομοίως, οι κλασματικές δυνάμεις, όπως το $x^{\frac{1}{2}}$, δεν επιτρέπονται. Επίσης, οι συντελεστές a_n δεν πρέπει να εξαρτώνται από το x. Έτσι, για παράδειγμα, η σειρά

$$\sin(x)x + \sin(2x)x^2 + \sin(3x)x^3 + \cdots$$

δεν είναι δυναμοσειρά.

2.6.1 Σύγκλιση δυναμοσειρών

Υπάρχει ένας απλός τρόπος για να περιγράψουμε το σύνολο των τιμών x για τις οποίες συγκλίνει μια δυναμοσειρά $F(x)$. Σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα η $F(x)$ είτε συγκλίνει απόλυτα για όλες τις τιμές του x είτε υπάρχει μια ακτίνα σύγκλισης R. Λόγω του κριτηρίου σύγκλισης κατά Cauchy, η απόλυτη σύγκλιση μιας σειράς συνεπάγεται και τη σύγκλιση της. Επομένως, για τη μελέτη των δυναμοσειρών αρκεί να εξετάσουμε την απόλυτη σύγκλιση, η οποία εξασφαλίζει και την απλή σύγκλιση.

Θεώρημα 2.6.3 Έστω μια δυναμοσειρά με κέντρο x_0:

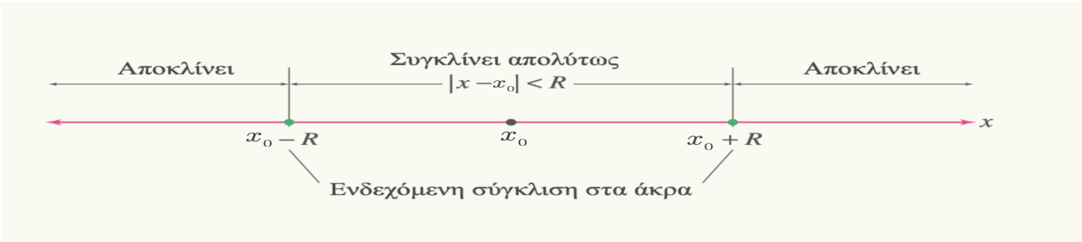
$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Τότε ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

1. Υπάρχει θετικός αριθμός R τέτοιος ώστε η F να συγκλίνει για $|x - x_0| < R$ και να αποκλίνει για $|x - x_0| > R$.
2. Ο αριθμός R ονομάζεται *ακτίνα σύγκλισης* της F και το διάστημα $(x_0 - R, x_0 + R)$ ονομάζεται *διάστημα σύγκλισης*.
3. Η μελέτη της σύγκλισης της F στα σημεία $x = x_0 - R$ και $x = x_0 + R$ γίνεται ξεχωριστά.

4. F συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε η ακτίνα σύγκλισης της F είναι ίση με ∞ και το διάστημα σύγκλισης της είναι το $(-\infty, +\infty)$.

5. F συγκλίνει για $x = x_0$ και αποκλίνει για κάθε άλλη τιμή του x. Τότε η ακτίνα σύγκλισης της F είναι ίση με 0.



Σχήμα 2.7 *Διάστημα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς*

Στο ακόλουθο πόρισμα περιγράφουμε τη σύγκλιση των δυναμοσειρών της μορφής

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Αυτές οι δυναμοσειρές αποτελούν ειδική περίπτωση της γενικής μορφής, προκύπτοντας με την επιλογή $x_0 = 0$. Μια τέτοια δυναμοσειρά μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πολυώνυμο άπειρου βαθμού.

Πόρισμα 2.6.4 Έστω η δυναμοσειρά με κέντρο x_0:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Τότε ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

1. Υπάρχει θετικός αριθμός R τέτοιος ώστε η F να συγκλίνει για $|x| < R|$ και να αποκλίνει για $|x| > R$.

   Ο αριθμός R ονομάζεται *ακτίνα σύγκλισης* της F και το διάστημα $(-R, R)$ ονομάζεται *διάστημα σύγκλισης*.

2. Η μελέτη της σύγκλισης της F στα σημεία $x = -R$ και $x = R$ γίνεται ξεχωριστά.

3. F συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε η ακτίνα σύγκλισης της F είναι ίση με ∞ και το διάστημα σύγκλισης της είναι το $(-\infty, +\infty)$.

4. F συγκλίνει για $x = 0$ και αποκλίνει για κάθε άλλη τιμή του x. Τότε η ακτίνα σύγκλισης της F είναι ίση με 0.

Σχόλιο 2.6.5 Όπως είναι προφανές, μια δυναμοσειρά

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

για μια συγκεκριμένη τιμή του $x = x_0$ καταλήγει σε μια σειρά πραγματικών (ή μιγαδικών) αριθμών. Επομένως, η μελέτη της σύγκλισης ή της απόκλισής της μπορεί να πραγματοποιηθεί με ανάλογες μεθόδους με αυτές που αναπτύχθηκαν στην ενότητα των Σειρών. Επιπλέον, καθώς κάθε όρος μιας δυναμοσειράς έχει τη μορφή γινομένου, ο συνήθης τρόπος διερεύνησης της σύγκλισής της βασίζεται στα κριτήρια των d'Alembert και Cauchy, τα οποία παρουσιάστηκαν στην ενότητα αυτή. Επίσης:

- Αν μια δυναμοσειρά συγκλίνει *απόλυτα*, τότε συγκλίνει και *απλά*.
- Αν μια δυναμοσειρά συγκλίνει, τότε δεν είναι απαραίτητο ότι συγκλίνει και απόλυτα.
- Αν μια δυναμοσειρά συγκλίνει, τότε ο γενικός (ή n-οστός) όρος της τείνει στο μηδέν, δηλαδή
$$\lim_{n\to+\infty} a_n(x-x_0)^n = 0.$$
- Αν ο γενικός όρος μιας δυναμοσειράς δεν τείνει στο μηδέν καθώς $n \to +\infty$, τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει.

Σημείωση 2.6.6 Πολλές συναρτήσεις που προκύπτουν σε εφαρμογές μπορούν να αναπαρασταθούν ως δυναμοσειρές. Αυτές περιλαμβάνουν όχι μόνο τις τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές συναρτήσεις και τις συναρτήσεις ριζών, αλλά και τις «ειδικές συναρτήσεις» της φυσικής και της μηχανικής, όπως είναι οι συναρτήσεις Bessel και οι ελλειπτικές συναρτήσεις. Τα πιο συχνά κριτήρια για τη μελέτη της σύγκλισης δυναμοσειρών είναι το *κριτήριο του λόγου* και το *κριτήριο της ρίζας*. Εκτός από αυτά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα κριτήρια, ανάλογα με τη μορφή της σειράς. Μερικές εναλλακτικές επιλογές είναι:

1. *Κριτήριο σύγκρισης* Αν μπορούμε να συγκρίνουμε την απόλυτη τιμή των όρων μιας σειράς
$$\sum a_n$$
με μια γνωστή συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα σειρά
$$\sum b_n,$$
τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο σύγκρισης. Ειδικά, αν
$$0 \le |a_n| \le b_n \quad \text{για όλα τα } n,$$
και η $\sum b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum a_n$ συγκλίνει απολύτως.

2. *Κριτήριο ολοκληρώματος (Cauchy)* Αν οι όροι μιας σειράς $\sum a_n$ ορίζονται από μια συνάρτηση
$$a_n = f(n),$$
όπου η f είναι θετική, συνεχής και φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, τότε η σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς συνδέεται με τη σύγκλιση ή απόκλιση του γενικευμένου ολοκληρώματος
$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

3. *Κριτήριο Dirichlet* Αν μια σειρά έχει τη μορφή
$$\sum a_n b_n,$$

όπου:

- τα μερικά αθροίσματα της $\sum a_n$ είναι φραγμένα, και

- η ακολουθία (b_n) είναι μονότονη και συγκλίνει στο 0,

τότε η σειρά $\sum a_n b_n$ συγκλίνει.

4. *Κριτήριο Abel* Αν μια σειρά έχει τη μορφή

$$\sum a_n b_n,$$

όπου:

- η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, και

- η ακολουθία (b_n) είναι μονότονη και φραγμένη,

τότε η σειρά $\sum a_n b_n$ συγκλίνει.

5. *Κριτήριο εναλλασσόμενης σειράς (Leibniz)* Αν μια σειρά έχει εναλλασσόμενους όρους

$$\sum (-1)^n b_n$$

με (b_n) θετική, μονότονα φθίνουσα και

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

τότε η σειρά συγκλίνει.

6. Κριτήριο του λόγου (για δυναμοσειρές - d'Alembert). Για τη δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

ισχύουν τα εξής:

- Αν

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| < 1,$$

τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει *απόλυτα*.

- Αν

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| > 1,$$

τότε η δυναμοσειρά *αποκλίνει*.

- Αν

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = 1,$$

τότε από το κριτήριο δεν προκύπτει συμπέρασμα.

Προφανώς αν για τη δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

ισχύει

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = 0,$$

τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. Κριτήριο της ρίζας (για δυναμοσειρές). Για τη δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

ισχύουν τα εξής:

- Όταν

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} < 1,$$

η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως.

- Όταν

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} > 1,$$

η δυναμοσειρά αποκλίνει.

- Όταν

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = 1,$$

δεν προκύπτει κάποιο συμπέρασμα από το κριτήριο.

Παράδειγμα 2.6.7 Χρήση του κριτηρίου του λόγου Να εξετάσετε πού συγκλίνει η

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}.$$

Λύση. Έχουμε $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ και $(x-x_0)^n = x^n$ $(x_0 = 0)$.

Υπολογίζουμε το ρ από το κριτήριο του λόγου:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}|x| = \frac{1}{2}|x|.$$

Βρίσκουμε ότι

$$\rho < 1 \quad \text{αν} \quad \tfrac{1}{2}|x| < 1, \quad \text{δηλαδή αν} \quad |x| < 2.$$

Επομένως, η $F(x)$ συγκλίνει αν $|x|<2$. Ομοίως, $\rho>1$ αν $\frac{1}{2}|x|>1$ ή $|x|>2$ η $F(x)$ αποκλίνει. Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=2$.

Εναλλακτικά μπορούμε να εφαρμόσουμε και το Κριτήριο ρίζας του Cauchy. Πράγματι,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{2^n}\right|}=|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}=|x|\cdot\frac{1}{2}.$$

Σύμφωνα με αυτό το κριτήριο η σειρά συγκλίνει όταν

$$|x|\cdot\frac{1}{2}<1\iff|x|<2$$

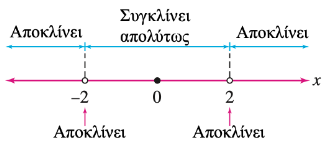
και αποκλίνει όταν $|x|>2$. Το κριτήριο του λόγου είναι ασαφές για $x=\pm2$, οπότε πρέπει να ελέγξουμε αυτές τις περιπτώσεις άμεσα:

$$F(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2^n}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}1=1+1+1+1+\cdots$$

$$F(-2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=1-1+1-1+\cdots$$



Σχήμα 2.8 *Η δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ *έχει διάστημα σύγκλισης* $(-2,2)$

Και οι δύο σειρές αποκλίνουν. Συμπεραίνουμε ότι η $F(x)$ συγκλίνει μόνο για $|x|<2$ (Σχήμα 2.12).

Παράδειγμα 2.6.8 Να εξεταστεί η σύγκλιση της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{9^n}.$$

Λύση. Θέτουμε

$$a_n=\frac{1}{9^n},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Τότε

$$\sqrt[n]{|a_nx^{2n}|}=\sqrt[n]{\frac{|x|^{2n}}{9^n}}=\frac{|x|^2}{9}=\frac{x^2}{9}.$$

- Όταν

$$\frac{x^2}{9}<1\iff|x|<3\iff-3<x<3,$$

(σύμφωνα με το κριτήριο της ρίζας) η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως.

- Όταν
$$\frac{x^2}{9} > 1 \iff x < -3 \text{ ή } x > 3,$$
(σύμφωνα με το κριτήριο της ρίζας) η δυναμοσειρά αποκλίνει.
- Όταν $x = -3$, ο γενικός όρος της δυναμοσειράς είναι
$$\frac{(-3)^{2n}}{9^n} = 1,$$
ο οποίος δεν τείνει στο 0 όταν $n \to +\infty$, οπότε η δυναμοσειρά αποκλίνει.
- Όταν $x = 3$, ο γενικός όρος της δυναμοσειράς είναι
$$\frac{3^{2n}}{9^n} = 1,$$
ο οποίος δεν τείνει στο 0 όταν $n \to +\infty$, οπότε η δυναμοσειρά αποκλίνει.

Συνεπώς, η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x| < 3$ και αποκλίνει για $|x| \geq 3$.

Σημείωση 2.6.9 Η $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ σειρά αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα εναλλασσόμενης σειράς που αποκλίνει, διότι παρόλο που οι όροι της δεν αυξάνονται,
$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n \text{ δεν υπάρχει} \quad \text{και ειδικότερα} \quad \lim_{n\to\infty}|(-1)^n| \neq 0.$$
Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι το γεγονός πως μια σειρά έχει εναλλασσόμενους όρους δεν αρκεί για τη σύγκλισή της· είναι απαραίτητο οι απόλυτες τιμές των όρων να τείνουν στο μηδέν, όπως απαιτεί το κριτήριο Leibniz.

Παράδειγμα 2.6.10 Να εξετάσετε πού συγκλίνει η $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n n}(x-5)^n$.

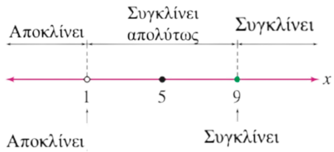
Λύση: Υπολογίζουμε το ρ με το κριτήριο του λόγου:
$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)} \cdot \frac{4^n n}{(x-5)^n}\right| = |x-5| \lim_{n\to\infty}\frac{n}{4(n+1)} = \frac{1}{4}|x-5|.$$
Βρίσκουμε ότι $\rho < 1$ αν
$$\frac{1}{4}|x-5| < 1, \quad \text{δηλαδή αν} \quad |x-5| < 4.$$
Επομένως, η $F(x)$ συγκλίνει απολύτως στο διάστημα $(1,9)$ ακτίνας 4 με κέντρο στο $x = 5$.

με άλλα λόγια, η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 4$. Στη συνέχεια, ελέγχουμε τα άκρα,

$$x = 9: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n}(9-5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Η σειρά συγκλίνει (κριτήριο εναλλάσσουσας σειράς).

$$x = 1: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n}(1-5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$



Σχήμα 2.9 *Η δυναμοσειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n}(x-5)^n$.

Η σειρά αποκλίνει (αρμονική σειρά).

Η $F(x)$ συγκλίνει για x στο ημιανοιχτό διάστημα $(1,9]$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.9. μερικές δυναμοσειρές περιέχουν μόνο άρτιες ή μόνο περιττές δυνάμεις του x. Το κριτήριο του λόγου μπορεί να εφαρμοστεί και σε αυτή την περίπτωση για να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης.

Παράδειγμα 2.6.11 Άρτια δυναμοσειρά. Να εξετάσετε πού συγκλίνει η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Λύση: Αν και αυτή η δυναμοσειρά έχει μόνο άρτιες δυνάμεις του x, μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου με $k_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Έχουμε:

$$k_{n+1} = \frac{x^{2(n+1)}}{(2n+2)!} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Επιπλέον, $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$, οπότε:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{k_{n+1}}{k_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}} \right| = |x|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$$

Επομένως, $\rho = 0$ για κάθε x και η $F(x)$ συγκλίνει για κάθε x. Η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = \infty$.

Σημείωση 2.6.12 Οι γεωμετρικές σειρές αποτελούν σημαντικά παραδείγματα δυναμοσειρών. Θυμηθείτε τον τύπο:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad \text{που ισχύει για } |r| < 1.$$

Αν βάλουμε το x στη θέση του r, παίρνουμε ένα ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R = 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{για } |x| < 1.$$

Τα επόμενα δύο παραδείγματα δείχνουν ότι μπορούμε να τροποποιήσουμε αυτόν τον τύπο για να βρούμε αναπτύγματα δυναμοσειράς άλλων συναρτήσεων.

Παράδειγμα 2.6.13 Γεωμετρική σειρά. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \quad \text{για } |x| < \frac{1}{2}.$$

Λύση: Αντικαθιστούμε με $2x$ το x στην εξίσωση

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{για } |x| < 1 \text{ και παίρνουμε}$$

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n.$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει για $|2x| < 1$ ή $|x| < \frac{1}{2}$.

Παράδειγμα 2.6.14 Γεωμετρική σειρά. Να βρείτε ένα ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά με κέντρο στο $x_0 = 0$ για την $f(x) = \dfrac{1}{2+x^2}$ και να βρείτε το διάστημα σύγκλισης.

Λύση: Χρειάζεται να ξαναγράψουμε την $f(x)$ έτσι ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{για } |x| < 1.$$

Έχουμε

$$\frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}\right).$$

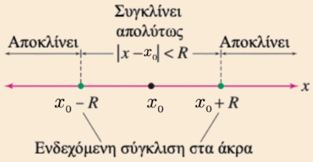
Ορίζουμε $u = -\frac{1}{2}x^2$. Τώρα αντικαθιστούμε το u και παίρνουμε:

$$f(x) = \frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{n+1}}.$$

Αυτό το ανάπτυγμα ισχύει αν $|-\frac{x^2}{2}| < 1$ ή $|x| < \sqrt{2}$. Το διάστημα σύγκλισης είναι $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Περίληψη 2.6.15

1. Μια *δυναμοσειρά* είναι μια απειροσειρά της μορφής $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Η σταθερά x_0 ονομάζεται *κέντρο* της $F(x)$.



Σχήμα 2.10 *Διάστημα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς*

2. Κάθε σειρά $F(x)$ έχει μια ακτίνα σύγκλισης R (Σχήμα 5) τέτοια ώστε:
   - Η $F(x)$ συγκλίνει απολύτως για $|x - x_0| < R$ και αποκλίνει για $|x - x_0| > R$.
   - Η $F(x)$ μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει στα άκρα $x_0 - R$ και $x_0 + R$.

   Θέτουμε $R = 0$ αν η $F(x)$ συγκλίνει μόνο για $x = x_0$ και $R = \infty$ αν η $F(x)$ συγκλίνει για κάθε x.
3. Το *διάστημα σύγκλισης* της F αποτελείται από το ανοιχτό διάστημα $(x_0 - R, x_0 + R)$ και πιθανόν από ένα ή και τα δύο άκρα $x_0 - R$ και $x_0 + R$.
4. Σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί το κριτήριο του λόγου για την εύρεση της ακτίνας σύγκλισης R. Είναι απαραίτητο να ελέγχουμε τη σύγκλιση ξεχωριστά στα άκρα.
5. Το ανάπτυγμα

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

   ισχύει για $|x| < 1$. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για εξαγωγή αναπτύγματος άλλων συγκλινουσών συναρτήσεων με αντικατάσταση, ολοκλήρωση ή παραγωγή.

Ασκήσεις 2.6.16

1. Να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο του λόγου για να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}.$$

   Συγκλίνει στα άκρα $x = \pm R$;

2. Να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο του λόγου για να δείξετε ότι η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}\,2^n}$$

   έχει ακτίνα σύγκλισης $R = 2$. Στη συνέχεια, να βρείτε αν συγκλίνει στα άκρα $R = \pm 2$.

3. Να δείξετε ότι οι δυναμοσειρές (a)-(c) έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης. Στη συνέχεια, να δείξετε ότι:
   - Η (a) αποκλίνει στα δύο άκρα,
   - Η (b) συγκλίνει στο ένα άκρο αλλά αποκλίνει στο άλλο,
   - Η (c) συγκλίνει και στα δύο άκρα.

   Οι σειρές είναι:

$$(\mathrm{a})\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}, \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,3^n}, \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\,3^n}.$$

4. Να δείξετε ότι η

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$$

αποκλίνει για κάθε $x \neq 0$.

5. Για ποιες τιμές του x συγκλίνει η

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n;$$

6. Να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο του λόγου για να δείξετε ότι η

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n}$$

έχει ακτίνα σύγκλισης $R=\sqrt{3}$.

7. Να δείξετε ότι η

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{64^n}$$

έχει ακτίνα σύγκλισης $R=4$.

Στις ασκήσεις 8-19 να βρείτε το διάστημα σύγκλισης.

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2^n n}$

11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{4^n}x^{2n}$

12. $\displaystyle\sum_{n=8}^{\infty} n^7 x^n$

13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$

14. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8^n}{n!}x^n$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^3}x^n$

16. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n x^n}{\sqrt{n^2+1}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$

18. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^4+2}$

19. $\displaystyle\sum_{n=9}^{\infty}\frac{x^n}{n-4\ln n}$

Στις Ασκήσεις που ακολουθούν να χρησιμοποιήσετε την εξίσωση $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, *για* $|x| < 1$ *για να αναπτύξετε τη συνάρτηση σε μια δυναμοσειρά με κέντρο στο* $x_0 = 0$ *και να βρείτε το διάστημα σύγκλισης. .*

8. $f(x) = \frac{1}{1-3x}$

9. $f(x) = \frac{1}{1+3x}$

10. $f(x) = \frac{1}{3-x}$

11. $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$

12. $f(x) = \frac{1}{1-x^4}$

2.6.2 Παραγώγιση και ολοκλήρωση ανά όρο

Το επόμενο θεώρημα αναφέρει ότι εντός του διαστήματος σύγκλισης μπορούμε να μεταχειριζόμαστε μια δυναμοσειρά σαν να ήταν ένα πολυώνυμο, δηλαδή, μπορούμε να παραγώγιζουμε και να ολοκληρώνουμε κάθε όρο ξεχωριστά.

Θεώρημα 2.6.17 Υποθέστε ότι η

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

έχει ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο $(x_0 - R, x_0 + R)$. Επιπλέον, μπορούμε να παραγωγίσουμε και να ολοκληρώσουμε ανά όρο. Για $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

και

$$\int F(x)\,dx = A + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \quad (A \text{ τυχαία σταθερά})$$

Τόσο για τη σειρά που προκύπτει από την παραγώγιση όσο και για αυτή που προκύπτει από την ολοκλήρωση η ακτίνα σύγκλισης είναι επίσης R.

Παράδειγμα 2.6.18 Παραγώγιση δυναμοσειράς Να αποδείξετε ότι για $-1 < x < 1$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots.$$

Λύση. Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

Για την $\frac{1}{1-x}$ έχουμε την ακόλουθη γεωμετρική σειρά με ακτίνα σύγκλισης $R = 1$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots.$$

Από το προγούμενο θεώρημα μπορούμε να παραγωγίσουμε ανά όρο για $|x| < 1$ ώστε να πάρουμε

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\right)$$

και συνεπώς

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots.$$

Παράδειγμα 2.6.19 Δυναμοσειρά για την αντίστροφη εφαπτομένη Να αποδείξετε ότι για

$$-1 < x < 1, \text{ ισχύει } \tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Λύση. Θυμηθείτε ότι η $\tan^{-1} x$ είναι μια αντιπαράγωγος της $(1+x^2)^{-1}$. Παίρνουμε το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της $(1+x^2)^{-1}$ αντικαθιστώντας με $-x^2$ το x στη γεωμετρική σειρά της Εξίσωσης:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots.$$

Αυτό το ανάπτυγμα ισχύει για $|x^2| < 1$ – δηλαδή για $|x| < 1$. Από το Θεώρημα 2 μπορούμε να ολοκληρώσουμε αυτή τη σειρά ανά όρο. Το ανάπτυγμα που προκύπτει ισχύει επίσης για $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} \tan^{-1} x &= \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\right) dx \\ &= A + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots. \end{aligned}$$

Θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε $A = \tan^{-1} 0 = 0$. Επομένως, το ανάπτυγμα ισχύει της $\tan^{-1} x$ γι α $-1 < x < 1$.

2.6.3 Πολυώνυμα Taylor

Χρησιμοποιώντας δυναμοσειρές είδαμε πώς μπορούμε να εκφράσουμε ορισμένες συναρτήσεις ως πολυώνυμα άπειρου βαθμού. Μπορούμε να πάρουμε δυναμοσειρές για συγκεκριμένες συναρτήσεις και με πράξεις όπως αντικατάσταση, παραγώγιση, ολοκλήρωση και αλγεβρικές μετατροπές μπορούν να προκύψουν δυναμοσειρές για άλλες συναρτήσεις. Και αυτό είναι σημαντικό γιατί πολλές συναρτήσεις είναι δύσκολο να υπολογιστούν ακριβώς. Για παράδειγμα, η $f(x) = \sin x^2$ δεν μπορεί να ολοκληρωθεί με απλές, στοιχειώδεις συναρτήσεις, και το ίδιο ισχύει για τη $f(x) = e^{-x^2}$. Ακόμα και πιο απλές συναρτήσεις, όπως $\sin x$, $\cos x$, e^x, ή $\ln x$, μπορούν να υπολογιστούν με ακρίβεια μόνο για συγκεκριμένες τιμές του x. Για άλλες τιμές, χρειάζονται αριθμητικές προσεγγίσεις. Από την άλλη πλευρά, τα πολυώνυμα, όπως το $f(x) = 5x^6 - 7x^3 + 2x - 4$, είναι εύκολο να παραγωγιστούν και να ολοκληρωθούν, και οι υπολογισμοί τους απαιτούν μόνο πολλαπλασιασμό και πρόσθεση. Επομένως, είναι λογικό να αναζητούμε τρόπους για να προσεγγίσουμε πολύπλοκες συναρτήσεις με τη χρήση πολυωνύμων.

Στα προηγούμενα είδαμε μια απλή προσέγγιση χρησιμοποιώντας γραμμικές συναρτήσεις. Στην ενότητα της παραγώγισης χρησιμοποιήσαμε την γραμμικοποίηση

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

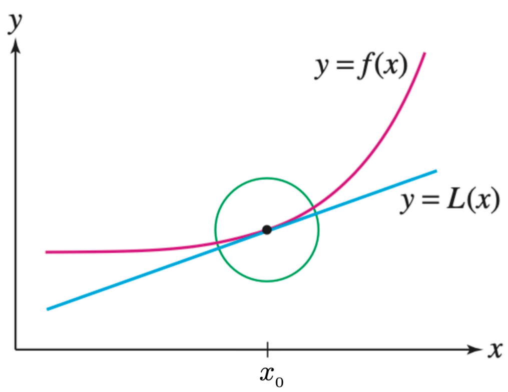
για να προσεγγίσουμε τη $f(x)$ κοντά στο σημείο $x = x_0$ καθώς και την σχέση

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(a)(x - x_0).$$

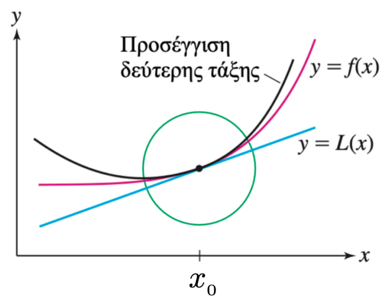
Η τελευταία γραμμική σχέση ονομάζεται προσέγγιση πρώτης τάξης επειδή η συνάρτηση $f(x)$ και η γραμμική προσέγγιση $L(x)$ έχουν την ίδια τιμή και την ίδια παράγωγο στο σημείο $x = x_0$, δηλαδή,

$$L(x_0) = f(x_0) \quad \text{και} \quad L'(x_0) = f'(x_0).$$

Ωστόσο, αυτή η προσέγγιση είναι ακριβής μόνο σε ένα μικρό διάστημα γύρω από το $_0$. Για να πετύχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια σε μεγαλύτερα διαστήματα, θα χρησιμοποιήσουμε προσεγγίσεις υψηλότερης τάξης, που βασίζονται σε πολυώνυμα Taylor. Αυτές οι προσεγγίσεις περιλαμβάνουν περισσότερους όρους και επιτρέπουν ακριβέστερη αναπαράσταση της συνάρτησης.



(a) *Η γραμμική προσέγγιση $L(x)$ είναι μια προσέγγιση πρώτης τάξης της f*



(b) *Μια προσέγγιση δεύτερης τάξης είναι πιο ακριβής σε μεγαλύτερο διάστημα..*

Σχήμα 2.11 *centering*

Σε ό,τι ακολουθεί υποθέτουμε ότι η f ορίζεται σε ένα ανοιχτό διάστημα I και ότι υπάρχουν όλες οι παράγωγοι $f^{(k)}$ στο I και $x_0 \in I$.

Θεώρημα 2.6.20 Ορίζουμε το *πολυώνυμο Taylor βαθμού k της f* με κέντρο στο $x = x_0$ ως εξής:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Μερικά από τα πρώτα πολυώνυμα Taylor είναι:

$$T_0(x) = f(x_0)$$

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \tfrac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

Παρατηρήστε ότι το T_0 είναι μια σταθερή συνάρτηση που ισούται με την f στο x_0 και ότι η T_1 είναι η γραμμικοποίηση της f στο x_0. Παρατηρήστε επίσης ότι η T_n λαμβάνεται από την T_{n-1} προσθέτοντας έναν όρο βαθμού n

$$T_n(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Θεώρημα 2.6.21 Υπόλοιπο Lagrange τάξης n Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ η οποία είναι $n+1$ φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα I και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του I. Αν η f^{n+1} είναι συνεχής στο I για κάθε $x \in I$, τότε

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

όπου

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

για κάποιο ξ που βρίσκεται μεταξύ των x και x_0. Το $R_n(x)$ λέγεται *υπόλοιπο Lagrange τάξης* n της $f(x)$ στο x_0.

Παράδειγμα 2.6.22 Πολυώνυμα Maclaurin για την $f(x) = e^x$
Να σχεδιάσετε το τρίτο και το τέταρτο πολυώνυμο Maclaurin για την $f(x) = e^x$. Να συγκρίνετε με τη γραμμική προσέγγιση.

Λύση. Όλες οι ανώτερες παράγωγοι συμπίπτουν με την ίδια την f:

$$f^{(k)}(x) = e^x.$$

Επομένως,

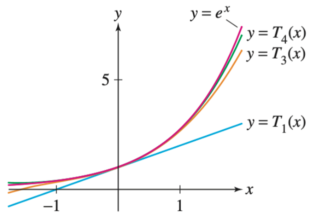
$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = e^0 = 1.$$

Το τρίτο πολυώνυμο Maclaurin (η περίπτωση $x_0 = 0$) είναι:

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Παίρνουμε το $T_4(x)$ προσθέτοντας τον όρο βαθμού 4 στο $T_3(x)$:

$$T_4(x) = T_3(x) + \tfrac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4 = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4.$$



Σχήμα 2.12 *Πολυώνυμα Maclaurin για την $f(x) = e^x$*

2.7 Σειρές Taylor

Σε αυτή την ενότητα επεκτείνουμε το πολυώνυμο Taylor στη σειρά Taylor για μια δοσμένη συνάρτηση f, η οποία λαμβάνεται συμπεριλαμβάνοντας τους όρους όλων των τάξεων στο πολυώνυμο Taylor.

Ορισμός 2.7.1 Σειρά Taylor Αν η f είναι απείρως παραγωγίσιμη στο $x = x_0$, τότε η σειρά Taylor της $f(x)$ με κέντρο στο x_0 είναι η δυναμοσειρά

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

$f(x)$	x_0	**Πολυώνυμο Maclaurin ή Taylor**
e^x	0	$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$
$\sin x$	0	$T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos x$	0	$T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\ln x$	1	$T_n(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$
$\frac{1}{1-x}$	0	$T_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

Πίνακας 2.1 Πολυώνυμα Maclaurin και Taylor για βασικές συναρτήσεις

Σχόλιο 2.7.2 Για μια απείρως παραγωγίσιμη συνάρτηση μπορούμε να κατασκευάσουμε πολυώνυμα Taylor όλων των βαθμών. Η σειρά Taylor στο σημείο x_0 εμφανίζεται ως το τυπικό όριο αυτών των πολυωνύμων καθώς ο βαθμός τους τείνει στο άπειρο, δηλαδή

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n.$$

.

Ενώ αυτός ο ορισμός μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε μια δυναμοσειρά χρησιμοποιώντας πληροφορίες από τη συνάρτηση f, δεν γνωρίζουμε ακόμη αν αυτή η σειρά ορίζει μια συνάρτηση που ισούται με την f. Τα επόμενα δύο θεωρήματα τακτοποιούν αυτό το ζήτημα.

Θεώρημα 2.7.3 Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor Αν η $f(x)$ αναπαρίσταται από μια δυναμοσειρά με κέντρο στο x_0 σε ένα διάστημα $|x - x_0| < R$ με $R > 0$, τότε αυτή η δυναμοσειρά είναι η σειρά Taylor

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Στην ειδική περίπτωση $x_0 = 0$, η F ονομάζεται επίσης *σειρά Maclaurin*.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

Θεώρημα 2.7.4 Υπόλοιπο Lagrange και σύγκλιση σειράς Taylor στη συνάρτηση) Έστω ότι I είναι ένα διάστημα, x_0 είναι ένα εσωτερικό σημείο του I και $f(x)$ είναι μια συνάρτηση η οποία είναι απείρως παραγωγίσιμη στο I. Αν F είναι η σειρά Taylor της $f(x)$ με κέντρο το x_0 και $R_k(x)$ το υπόλοιπο Lagrange τάξης k της $f(x)$ στο x_0, τότε η F συγκλίνει στην $f(x)$ για $\forall x \in I$ αν και μόνο αν

$$\lim_{k \to \infty} R_k(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Στην περίπτωση αυτή, γράφουμε

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x).$$

Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι απείρως παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα I και F είναι η σειρά Taylor της γύρω από κάποιο σημείο του I, τότε είναι σημαντικό να εξετάσουμε αν η σειρά F συγκλίνει στη συνάρτηση $f(x)$ σε όλο το διάστημα. Αν αυτό συμβαίνει, γράφουμε $f(x) = F$, γεγονός που αποτελεί επιθυμητή ιδιότητα για τη συνάρτηση και τη σειρά της.

Παράδειγμα 2.7.5 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$. Να αναπτυχθεί η σειρά Taylor F στην περιοχή του σημείου $x_0 = 1$ και να βρεθεί η αντίστοιχη ακτίνα σύγκλισής της.

Λύση. Θα ξεκινήσουμε με την ανάπτυξη της F υπολογίζοντας αρχικά τις παραγώγους $f^{(n)}(x)$ και τα $f^{(n)}(1)$, $n \geq 0$:

$$\text{Για } n = 0, \quad f^{(0)}(x) = f(x) = \ln x.$$

$$\text{Για } n = 1, \quad f^{(1)}(x) = \frac{1}{x} = (-1)^{1+1}\frac{(1-1)!}{x^1}.$$

$$\text{Για } n = 2, \quad f^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2} = (-1)^{2+1}\frac{(2-1)!}{x^2}.$$

$$\text{Για } n = 3, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} = (-1)^{3+1}\frac{(3-1)!}{x^3}.$$

$$\text{Για } n = 4, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} = (-1)^{4+1}\frac{(4-1)!}{x^4}.$$

$$\text{Για } n = 5, \quad f^{(5)}(x) = \frac{24}{x^5} = (-1)^{5+1}\frac{(5-1)!}{x^5}.$$

Με βάση τα παραπάνω, υποθέτουμε ότι, για $n = k \geq 1$,

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{x^k}.$$

Θα αποδείξουμε ότι, για $n = k+1$,

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+2}\frac{k!}{x^{k+1}}.$$

Πράγματι:

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = (-1)^{k+1}(k-1)!\left(\frac{1}{x^k}\right)'$$

$$= (-1)^{k+1}(k-1)!(-k)\frac{1}{x^{k+1}} = (-1)^{k+2}\frac{k!}{x^{k+1}}.$$

Συνεπώς, η σειρά Taylor θα είναι η

$$F = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 + \dots.$$

Για την μελέτη της σύγκλισης η F μετασχηματίζεται ως εξής:

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n.$$

Θα εξετάσουμε την σύγκλιση της F.

1ος τρόπος: Με βάση το Κριτήριο d'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}(x-1)^{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} n (x-1)^{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)(x-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1}(x-1)^{n+1} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} |(x-1)| \right) = |(x-1)| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |(x-1)| \cdot \lambda \text{ (με } \lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1).$$

2ος τρόπος: Με βάση το Κριτήριο Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n}(x-1)^n \right|} = |(x-1)| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = |(x-1)| \cdot \lambda,$$

$$(\text{με } \lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1).$$

Η συνέχεια είναι ανεξάρτητη από το ποιο κριτήριο σύγκλισης χρησιμοποιήσαμε. Η F θα συγκλίνει, σύμφωνα με το κριτήριο, όταν $|x-1| \cdot \lambda < 1$ δηλαδή $|x-1| < \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1} = 1$.

Επομένως, η F θα συγκλίνει αν $|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$. Το $r = \frac{1}{\lambda} = 1$ είναι η ακτίνα σύγκλισης.

Στον επόμενο ορισμό παρουσιάζεται η έννοια της αναλυτικής συνάρτησης.

Ορισμός 2.7.6 Αναλυτικές πραγματικές συναρτήσεις Μια πραγματική συνάρτηση $f(x)$ λέγεται *αναλυτική* σε ένα ανοιχτό διάστημα I αν για κάθε $x_0 \in I$, υπάρχει ένα ανοιχτό υποδιάστημα $J \subseteq I$ που περιέχει το x_0 τέτοιο ώστε $\forall x \in J$, το ανάπτυγμα Taylor F της f στην περιοχή του σημείου x_0 να συγκλίνει στην f, δηλαδή

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x).$$

Σημείωση 2.7.7 Η αναλυτικότητα μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα I εγγυάται την σύγκλιση της αντίστοιχης σειράς Taylor στις τιμές της f στο αντίστοιχα διάστημα. Αν και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σειρά Taylor με κέντρο x_0 για να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση f σε άλλα σημεία του διαστήματος, πρέπει να θυμόμαστε ότι η σειρά Taylor είναι κυρίως ένα εργαλείο τοπικής προσέγγισης. Όσο πιο μακριά βρίσκεται ένα σημείο x από το κέντρο x_0, τόσο περισσότερους όρους της σειράς θα χρειαστούμε για να διατηρήσουμε υψηλή ακρίβεια στον υπολογισμό της τιμής της $f(x)$.

Παράδειγμα 2.7.8 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $\ln x$ είναι αναλυτική στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$ και το σημείο $x_0 = 1 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Η συνάρτηση $\ln x$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και οι παράγωγοί της δίνονται από τον τύπο

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}, \qquad n \geq 1.$$

Η σειρά Taylor της f γύρω από το σημείο $x_0 = 1$ είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n.$$

Θα δείξουμε ότι το υπόλοιπο Taylor τείνει στο μηδέν για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Το υπόλοιπο Lagrange τάξης k της $f(x) = \ln x$ στο σημείο $x_0 = 1$ είναι

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-1)^{k+1},$$

όπου ξ είναι κάποιο σημείο μεταξύ των x και 1. Επειδή

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}},$$

προκύπτει ότι

$$R_k(x) = (-1)^k \frac{1}{k+1}\frac{(x-1)^{k+1}}{\xi^{k+1}}.$$

Μένει να δείξουμε ότι το υπόλοιπο Lagrange τείνει στο μηδέν για κάθε σταθερό $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Από τον τύπο του υπολοίπου έχουμε

$$|R_k(x)| = \frac{1}{k+1}\frac{|x-1|^{k+1}}{\xi^{k+1}},$$

όπου ξ είναι κάποιο σημείο μεταξύ x και 1.

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

1. Ισχύει $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$. Τότε, επειδή $|x-1| \leq 1$ και $\xi \geq 1$ έχουμε ότι

$$\left|\frac{x-1}{\xi}\right| \leq 1.$$

Τότε

$$|R_k(x)| = \tfrac{1}{k+1}\left(\tfrac{x-1}{\xi}\right)^{k+1} \leq \tfrac{1}{k+1} \cdot 1^{k+1} = \tfrac{1}{k+1}.$$

Επειδή

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k+1} = 0,$$

από το *Κριτήριο Παρεμβολής (Squeeze Theorem)* έχουμε

$$\lim_{k \to +\infty} |R_k(x)| = 0.$$

2.
Εφόσον το ξ μπορεί να είναι οριακά μεγαλύτερο από το x, η συνθήκη αυτή ικανοποιείται όταν $x > \frac{1}{2}$. Επομένως πάλι έχουμε

$$\lim_{k \to +\infty} |R_k(x)| = 0.$$

Σχόλιο 2.7.9 Η αναλυτικότητα είναι μια τοπική ιδιότητα. Από τη στιγμή που αποδείχθηκε ότι το υπόλοιπο $R_k(x) \to 0$ για $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (χρησιμοποιώντας τη μορφή Lagrange ή Cauchy), συμπεραίνουμε ότι η f είναι αναλυτική στο σημείο $x_0 = 1$. Επειδή το ξ εξαρτάται από το x και το k ($\xi_{x,k}$), η κίνησή του εντός του διαστήματος σύγκλισης εγγυάται ότι η προσέγγιση είναι έγκυρη τοπικά. Με δεδομένο ότι η f είναι συνεχής και άπειρες φορές παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}^+$, μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία για οποιοδήποτε $x_0 \in (0, +\infty)$, καλύπτοντας έτσι ολόκληρο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Έτσι για την συνάρτηση $f(x) = \ln(x)$ βλέπουμε ότι είναι αναλυτική στο $(0, +\infty)$ διότι:

- Για κάθε $a \in (0, +\infty)$, η f μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor γύρω από το a:

$$\ln(x) = \ln(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot a^k}(x-a)^k$$

- Η σειρά αυτή συγκλίνει για $|x-a| < a$, δηλαδή στο διάστημα $(0, 2a)$.

- Εφόσον για κάθε σημείο του $\mathbb{R}^+$ υπάρχει περιοχή όπου η f ταυτίζεται με το ανάπτυγμα Taylor, η f είναι αναλυτική στο $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 2.7.10 Για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ να απαντηθούν τα ακόλουθα:

(a) Να βρεθεί το πολυώνυμο Maclaurin τέταρτης τάξης της f και να εκτιμηθεί το αντίστοιχο σφάλμα προσέγγισης για $-4 < x < 4$.

(b) Να υπολογιστεί μια προσέγγιση του αριθμού $\sqrt{e}$ με ακρίβεια καλύτερη του 10^{-2}.

(c) Να δειχθεί ότι η σειρά Maclaurin της f είναι

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

(d) Να αποδειχθεί ότι η f είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{R}$.

Λύση.

(a) Η προσέγγιση τέταρτης τάξης της f είναι το πολυώνυμο Taylor

$$T_4(x) = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4.$$

Έχουμε ότι

$$f^{(5)}(x) = e^x,$$

η οποία είναι παντού συνεχής, άρα και συνεχής στο $(-4,4)$.

Συνεπώς, για το αντίστοιχο υπόλοιπο της σειράς Taylor, υπάρχει $\xi \in (-4,4)$ τέτοιο ώστε

$$R_4(x) = \frac{e^{\xi}}{5!} x^5.$$

Καθώς για $-4 < x < 4$ ισχύει

$$e^x \le e^4 = M,$$

έχουμε

$$|R_4(x)| \le \frac{e^4}{5!} |x|^5 < \frac{e^4}{5!} 4^5 = 465.9.$$

(b) Παρατηρούμε ότι

$$\sqrt{e} = e^{1/2},$$

άρα αν ο αριθμός αυτός προσεγγισθεί από ένα πολυώνυμο Taylor k-βαθμού της f, θα έχουμε

$$e^{1/2} = P_k\left(\frac{1}{2}\right) + R_k\left(\frac{1}{2}\right),$$

όπου $R_k(x)$ είναι το αντίστοιχο υπόλοιπο Lagrange. Συνεπώς αρκεί να βρούμε ένα k τέτοιο ώστε

$$\left|R_k\left(\frac{1}{2}\right)\right| < 10^{-2}.$$

Με βάση το Θεώρημα Taylor, υπάρχει ένα

$$\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

τέτοιο ώστε

$$R_k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\xi}}{(k+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

Η τελευταία ποσότητα είναι μεγαλύτερη του 0, άρα

$$\left|R_k\left(\frac{1}{2}\right)\right| = R_k\left(\frac{1}{2}\right).$$

Επίσης, λόγω της μονοτονίας της e^x, έχουμε

$$e^{\xi} \leq e^{1/2} < e^1 < 3.$$

Άρα

$$R_k\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\xi}}{(k+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{3}{(k+1)!\,2^{k+1}}.$$

Για $k = 3$, έχουμε

$$R_3\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{3}{4!\,2^4} = \frac{3}{384} = \frac{1}{128} < \frac{1}{100}.$$

Συνεπώς, το $P_3\left(\frac{1}{2}\right)$ θα μας δώσει την κατάλληλη προσέγγιση για το $e^{1/2}$. Δηλαδή,

$$e^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{1!2^1} + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} = 1.64583,$$

ενώ με τη βοήθεια ενός υπολογιστή παίρνουμε την τιμή

$$e^{1/2} \approx 1.64872.$$

(c) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$f^{(n)}(x) = e^x.$$

Επομένως,

$$f^{(n)}(0) = 1 \quad \text{για κάθε } n.$$

Ο τύπος Maclaurin δίνει

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Μένει να δείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει για κάθε x. Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Επειδή το όριο είναι μηδέν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε x. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι άπειρη και η σειρά Maclaurin της e^x είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

.

(d) Για να αποδείξουμε ότι η f είναι αναλυτική στο X, δηλαδή ότι για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

αρκεί να δείξουμε ότι το υπόλοιπο του τύπου Taylor τείνει στο μηδέν. Εφαρμόζουμε τον τύπο Taylor με υπόλοιπο Lagrange γύρω από το σημείο 0. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x),$$

όπου

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x. Επειδή για κάθε k ισχύει

$$f^{(k)}(x) = e^x,$$

παίρνουμε

$$f^{(k)}(0) = 1.$$

Άρα

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Μένει να δείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Για σταθερό x, έχουμε

$$|R_n(x)| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

Επειδή $e^{\xi} \leq e^{|x|}$, προκύπτει

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο λόγου στη σειρά

$$\frac{|x|^n}{n!}$$

παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}/(n+1)!}{|x|^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Άρα

$$\frac{|x|^n}{n!} \to 0 \quad \Rightarrow \quad R_n(x) \to 0.$$

Συνεπώς,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2.8 Αξιοσημείωτα όρια

$$(1)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad (2)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0, \quad (3)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0, \quad (4)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

$$(5)\ \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a,$$ όπου $n \in \mathbb{N}$, a πραγματική σταθερά και e ο αριθμός του Euler.

Παράδειγμα 2.8.1 Με βάση το προηγούμενο παράδειγμα η ανάπτυξη της σειράς Taylor για την συνάρτηση $f(x) = \ln x$ στο $x = x_0$ είναι

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n,$$

όπου και συγκλίνει για κάθε $x \in (0,2)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο διάστημα $(0,2)$.

Λύση. Το υπόλοιπο Lagrange τάξης k της $f(x)$ στο $x_0 = 1$ είναι το

$$R_k(x) = \frac{(-1)^{k+2}\frac{k!}{\xi_k^{k+1}}}{(k+1)!}(x-1)^{k+1} = \frac{(-1)^{k+2}}{k+1}\left(\frac{x-1}{\xi_k}\right)^{k+1},$$

για κάποιο ξ_k μεταξύ των $x, 1$. Οπότε

$$|R_k(x)| = \left| \frac{(-1)^{k+2}}{k+1} \left(\frac{x-1}{\xi_k} \right)^{k+1} \right| = \frac{1}{k+1} \left| \frac{x-1}{\xi_k} \right|^{k+1}.$$

Ισχύει ότι

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k+1} = 0.$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{|x-1|}{\xi_k} < 1.$$

Ανάλογα με την τιμή του x, εξετάζουμε τις δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $0 < x < 1$.
Εδώ ισχύει ότι $x < \xi_k < 1$, οπότε ξ_k είναι θετικός αριθμός στο διάστημα $(x, 1)$. Επειδή το $x-1$ είναι αρνητικό και το ξ_k είναι θετικό, έχουμε:

$$0 < \left| \frac{x-1}{\xi} \right| = \frac{1-x}{\xi_k}.$$

Εφόσον $1-x$ είναι μικρότερο από ξ_k, προκύπτει ότι:

$$0 < \frac{1-x}{\xi_k} < 1.$$

Περίπτωση 2: $1 < x < 2$.

Εδώ ισχύει ότι $1 < \xi_k < x$, οπότε το $x-1$ είναι θετικό. Επειδή $\xi_k > 1$, προκύπτει ότι:

$$\frac{x-1}{\xi_k} < x-1.$$

Επειδή $x-1 < 1$ για $x < 2$, έχουμε:

$$0 < \tfrac{x-1}{\xi_k} < 1.$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$0 < \left| \frac{x-1}{\xi_k} \right| < 1.$$

Συνεπώς

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{|x-1|}{\xi} \right)^{k+1} = 0 \text{ όπου σε συνδιασμό με } \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k+1} = 0$$

έχουμε ότι $\lim_{k \to \infty} R_k(x) = 0$. Άρα, η συνάρτηση $\ln x$ είναι αναλυτική στο διάστημα $(0, 2)$ και για κάθε x που ανήκει εκεί έχουμε

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n.$$

Παράδειγμα 2.8.2 1. Έστω a το τελευταίο ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^{11-a})}{x} \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+a+2}{n}\right)^n \qquad \text{(iii)} \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (a+1)^n(2a+3)^{-n}$$

2. Έστω b το προτελευταίο ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές (χωρίς να χρειάζεται να υπολογιστούν τα αθροί- σματα):

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2+n^{b+1}} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+4b}{\sqrt{n^8+bn^3+5}}$$

3. Έστω a το τελευταίο ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας και b το προτελευταίο ψηφίο του Αριθμού Μητρώου σας. Να βρεθούν όλες οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συγκλίνει η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10-a}}{2^n}(x-b-1)^n.$$

Λύση.
(1) Έχουμε (π.χ. $a = 7, b = 2$)

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^{11-a})}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x^4)}{x^4}x^3\right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Εναλλακτικά, το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)}{x}$ είναι απροσδιόριστη μορφή, άρα από τον κανόνα L'Hôpital, ισούται με

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^3\cos(x^4)}{1} = 0 \cdot 1 = 0.$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+a+2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+9}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{9}{n}\right)^n = e^9.$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (a+1)^n(2a+3)^{-n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} 8^n 17^{-n}$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{8}{17}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{17}\right)^n.$$

Αφού $\frac{8}{17} \in (-1, 1)$, ο τύπος του αθροίσματος της γεωμετρικής σειράς δίνει ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{17}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{8}{17}} = \frac{17}{9}.$$

(2) (a) Έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2+n^{b+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2+n^3},$$

η οποία είναι απολύτως συγκλίνουσα, άρα και συγκλίνουσα, καθώς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2+n^3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+n^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \quad \text{και η} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \text{ συγκλίνει.}$$

Εναλλακτικά, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2+n^3}$$

είναι εναλλασσούσα σειρά. Πράγματι,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+n^3} = 0$$

και

$$\frac{1}{2+n^3} \geq \frac{1}{2+(n+1)^3}, \quad \forall n,$$

άρα, από το κριτήριο του Leibniz, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2+n^3}$$

συγκλίνει.

(b) Έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4b}{\sqrt{n^8+bn^3+5}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+8}{\sqrt{n^8+2n^3+5}}.$$

Αφού

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3+8}{\sqrt{n^8+2n^3+5}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n=1}\frac{n^4+8}{\sqrt{n^8+2n^3+5}} = 1$$

Κριτήριο Οριακής Σύγκρισης

Έστω $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ θετικές ακολουθίες. Υποθέστε ότι υπάρχει το παρακάτω όριο:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Τότε ισχύουν:

- Αν $L > 0$ με $L \in \mathbb{R}$, τότε οι δύο σειρές έχουν την ίδια συμπεριφορά ως προς την σύγκλιση.
- Αν $L = \infty$ και η $\sum b_n$ αποκλίνει, τότε και η $\sum a_n$ αποκλίνει.
- Αν $L = 0$ και η $\sum b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum a_n$ συγκλίνει.

3. Έστω η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10-a}}{2^n}(x-b-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}(x-3)^n.$$

Αν $a_n = \dfrac{n^3}{2^n}$, τότε βάση το Κριτήριο d'Alembert:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}}\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{2}|x-3|.$$

'Αρα για να συγκλίνει η δυναμοσειρά πρέπει $\frac{1}{2}|x-3| < 1$, δηλαδή, $|x-3| < 2$. Συνεπώς, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς ισούται με 2. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει στο διάστημα $(1,5)$ και αποκλίνει στο $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$.
Απομένει να εξεταστεί η σύγκλιση της δυναμοσειράς στα άκρα του διαστήματος $[1,5]$. Για $x = 1$, η δυναμοσειρά είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^3$$

και αποκλίνει, καθώς το όριο $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n^3$ δεν υπάρχει. Όμοια, για $x = 5$, η δυναμοσειρά είναι $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$, η οποία αποκλίνει, καθώς $\lim_{n\to\infty} n^3 = +\infty$.

Συνοψίζοντας, η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}(x-3)^n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $x \in (1,5)$.

Παράδειγμα 2.8.3 1. Να εξεταστεί αν η σειρά

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

συγκλίνει και, αν ναι, να βρεθεί μια τιμή του $k \in \mathbb{N}_0$ ώστε το μερικό άθροισμα k τάξης της

S να προσεγγίζει την τιμή της με ακρίβεια 0.02.

2. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n+1}n^2}{5^n(n+1)} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}-1}{5^n} \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{3^n n^{n^2+1}}$$

Λύση.

1. Παρατηρούμε ότι η S είναι εναλλάσσουσα, άρα θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Leibniz. Η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

είναι:

(a) Θετικών όρων, αφού $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Φθίνουσα, αφού $a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n+2}} \Leftrightarrow \sqrt{n+2} > \sqrt{n+1} \Leftrightarrow n+2 > n+1 \Leftrightarrow 2 > 1$, το οποίο είναι αληθές.

(c) Μηδενική, αφού, με βάση το κριτήριο παρεμβολής, $0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ και οι ακολουθίες $b_n = 0$ και $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ είναι μηδενικές.

Συνεπώς, η S συγκλίνει και

$$\left| S - \sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n \right| \leq a_{k+1}, \quad \text{για κάθε } k \geq 1.$$

Για να έχουμε σφάλμα μικρότερο του 0.02, αρκεί

$$a_{k+1} < 0.02 \Leftrightarrow \tfrac{1}{\sqrt{k+2}} < 0.02 \Leftrightarrow 0.02\sqrt{k+2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{k+2} > 50 \Leftrightarrow k+2 > 2500 \Leftrightarrow k > 2498.$$

Συνεπώς, αρκεί να πάρουμε μερικό άθροισμα τάξης τουλάχιστον 2499.

2. (a) Η ακολουθία στην οποία βασίζεται αυτή η σειρά είναι η

$$a_n = \frac{6^{n+1}n^2}{5^n(n+1)}, \quad n \geq 1.$$

Εξετάζουμε αν αυτή είναι μηδενική χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου για ακολουθίες:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{6^{n+2}(n+1)^2}{5^{n+1}(n+2)} \cdot \frac{5^n(n+1)}{6^{n+1}n^2} = \frac{6}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^2(n+2)}$$

$$= \frac{6}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3}{n^3\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} = \frac{6}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3}{1+\dfrac{2}{n}} = \frac{6}{5} > 1.$$

Άρα η a_n δεν είναι μηδενική. Συνεπώς, η σειρά μας δεν συγκλίνει.

(b) Η σειρά μας γράφεται ως εξής:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}-1}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n-1}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}9^n5^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty}5^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{5}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{5}\right)^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ είναι γεωμετρικές. Για την πρώτη έχουμε ότι $\left|\frac{9}{5}\right| > 1$, άρα αυτή αποκλίνει. Για τη δεύτερη έχουμε ότι $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, άρα αυτή συγκλίνει. Συνεπώς, η αρχική σειρά, ως διαφορά μιας αποκλίνουσας και μιας συγκλίνουσας σειράς, αποκλίνει.

iii) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(n+1)^{n^2}}{3^n n^{n^2+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{3^n n^{n^2+1}}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}n}}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}n}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}n}}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot e\cdot 1 = \frac{e}{3} < 1.$$

Συνεπώς, η σειρά μας συγκλίνει.

Σημείωση 2.8.4 Για να το αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ γράφουμε την παράσταση με εκθετική μορφή:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = n^{-\frac{1}{n}}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$$

Άρα

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{n}\ln n)} = e^0 = 1$$

$$(\text{ L'Hôpital: } \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0).$$

Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Παράδειγμα 2.8.5 1. Να βρεθούν όλες οι πραγματικές τιμές του x για τις οποίες συγκλίνει η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}(x-1)^n.$$

2. Να υπολογισθεί η σειρά Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = 2^x$ και να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισής της.
3. Το ανάπτυγμα Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = \ln(1+x)$ είναι το

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n.$$

Χρησιμοποιώντας το S να υπολογισθεί το αντίστοιχο ανάπτυγμα για την $g(x) = \ln(1+2x)$ και την $h(x) = x\ln(1+x)$.

Λύση.
1. Θέτοντας $y = x-1$, η σειρά μας γίνεται

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}y^n.$$

Θα εξετάσουμε πότε αυτή συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο του d'Alembert. Είναι:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)y^{n+1}}{n+2}}{\frac{(-1)^n n y^n}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^2}{n+2}\cdot\frac{y^{n+1}}{(-1)^n n y^n}\right|$$

$$= |y|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-1(n+1)^2}{n(n+2)}\right| = |y|\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = |y|.$$

Συνεπώς, αυτή η σειρά συγκλίνει όταν $|y| < 1$. Οπότε η αρχική δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$. Για $x = 0$ και $x = 2$, η δυναμοσειρά γίνεται αντίστοιχα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}(0-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}(2-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}.$$

Για την 1η από αυτές τις σειρές, έχουμε ότι η ακολουθία $\frac{n}{n+1}$, $n = 1,2,...$, που την παράγει συγκλίνει στο 1, άρα δεν είναι μηδενική. Επομένως, αυτή η σειρά αποκλίνει. Για τη 2η σειρά, έχουμε ότι η ακολουθία $\frac{(-1)^n n}{n+1}$, $n = 1,2,...$, που την παράγει αποτελείται από 2 άπειρες υπακολουθίες:

$$\frac{(-1)^{2n} 2n}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1},$$

η οποία έχει όριο το 1, και την

$$\frac{(-1)^{2n-1}(2n-1)}{2n+1+1} = -\frac{2n-1}{2n+2} = -\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}$$

η οποία έχει όριο το -1. Επειδή αυτές οι υπακολουθίες έχουν διαφορετικά όρια η $\frac{(-1)^n n}{n+1}$ δεν συγκλίνει. Αφού αυτή η ακολουθία δεν είναι μηδενική η 2η σειρά επίσης αποκλίνει. Συνεπώς, η αρχική σειρά συγκλίνει μόνο για $x \in (0,2)$.

2. Για να υπολογίσουμε τις παραγώγους n-τάξης της $f(x)$, $n \geq 0$, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Παρατηρούμε ότι, για

$$n = 0, \quad f^{(0)}(x) = f(x) = 2^x = 2^x \ln^0 2,$$

$$n = 1, \quad f^{(1)}(x) = [2^x]' = 2^x \ln 2 = 2^x \ln^1 2,$$

$$n = 2, \quad f^{(2)}(x) = [2^x \ln 2]' = 2^x \ln 2 \ln 2 = 2^x \ln^2 2,$$

$$n = 3, \quad f^{(3)}(x) = [2^x \ln_2 2]' = 2^x \ln 2 \ln^2 2 = 2^x \ln^3 2.$$

Με βάση τα παραπάνω, υποθέτουμε ότι, για $n = k$, $f^{(k)}(x) = 2^x \ln^k 2$ και θα αποδείξουμε ότι για $n = k+1$, $f^{(k+1)}(x) = 2^x \ln^{k+1} 2$. Πράγματι,

$$f^{(k+1)}(x) = \left[f^{(k)}(x)\right]' = \left(2^x \ln^k 2\right)' = 2^x \ln 2 \ln^k 2 = 2^x \ln^{k+1} 2.$$

Άρα, αποδείξαμε ότι $f^{(n)}(x) = 2^x \ln^n 2, \forall n \geq 0$. Αντίστοιχα, θα έχουμε ότι οι τιμές αυτών των παραγώγων στο σημείο $x = 0$ είναι ίσες με

$$f^{(n)}(0) = 2^0 \ln^n 2 = \ln^n 2, \quad \forall n \geq 0.$$

Άρα η σειρά Maclaurin της $f(x)$ θα είναι η

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 2}{n!}x^n.$$

Θα εξετάσουμε την σύγκλιση της S με βάση το κριτήριο του d'Alembert:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\ln^{n+1}2}{(n+1)!}x^{n+1}}{\frac{\ln^n 2}{n!}x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n!\ln^{n+1}2}{(n+1)!\ln^n 2}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2}{n+1}=|x|\cdot r.$$

Η S θα συγκλίνει, σύμφωνα με το κριτήριο, όταν $|x|\cdot r<1\Leftrightarrow |x|<\frac{1}{r}=\frac{1}{0}=\infty$. Δηλαδή, η ακτίνα σύγκλισης της S ισούται με ∞. Η S θα συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

3. Καθώς $f(x)=\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$, αντικαθιστώντας στο S όπου x το $2x$, το ανάπτυγμα Maclaurin της $g(x)=\ln(1+2x)$ θα είναι το

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(2x)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}x^n.$$

Επίσης, το ανάπτυγμα της $h(x)=x\ln(1+x)$ θα είναι το

$$x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n+1}.$$

Παράδειγμα 2.8.6 1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{3x^2}\qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n)}{n^2+1}\qquad \text{(iii)}\ \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{7^n}{9^n}$$

2. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές (χωρίς να χρειάζεται να υπολογιστούν τα αθροίσματα):

$$\text{(i)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{e^n+n}\qquad \text{(ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^3+6)}{n^2}$$

3. Να βρεθούν όλες οι τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες συγκλίνει η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n\sqrt{n}}(x+2)^n.$$

Λύση.

1. (i) Το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{3x^2}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, άρα, από τον κανόνα L'Hôpital ισούται με $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{6x}$ το οποίο είναι επίσης απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα L'Hôpital ακόμα μια φορά, το ζητούμενο όριο ισούται με $\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{6}=\frac{1}{6}$.

(ii) Επειδή $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ και $|\sin(n)| \leq 1$, για κάθε n, έχουμε γινόμενο φραγμένης ακολουθίας με μηδενική ακολουθία, άρα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n^2+1} = 0.$$

(iii) Αφού $\frac{7}{9} \in (-1,1)$, έχουμε

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{7^n}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{7}{9}} = \frac{9}{2},$$

από τον τύπο του αθροίσματος της γεωμετρικής σειράς.

Θεώρημα 2.8.7 Κριτήριο αναγκαίας συνθήκης σύγκλισης Αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, τότε ο γενικός της όρος ικανοποιεί τη σχέση:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή, αν $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, αυτό δεν συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει (π.χ., η αρμονική σειρά αποκλίνει).

2. (i) Το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+x}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$, άρα από τον κανόνα L'Hôpital, ισούται με

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n+n} = 1 \neq 0,$$

συνεπώς η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{e^n+n}$$

αποκλίνει.

(ii) Αφού

$$\left|\frac{\cos(n^3+6)}{n^2}\right| = \frac{|\cos(n^3+6)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

συγκλίνει, έπεται, από το κριτήριο σύγκρισης σειρών, ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^3+6)}{n^2}$$

είναι απολύτως συγκλίνουσα, άρα και συγκλίνουσα.

3. Έστω $a_n = \dfrac{1}{6^n\sqrt{n}}$. Έχουμε

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{1}{6^{n+1}\sqrt{n+1}}}{\dfrac{1}{6^n\sqrt{n}}}\right||x+2|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{6\sqrt{n+1}}|x+2| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} = \frac{1}{6}|x+2|.$$

’Αρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς ισούται με 6. Επομένως, η δυναμοσειρά συγκλίνει στο διάστημα $(-8,4)$ και αποκλίνει στο $(-\infty,-8)\cup(4,+\infty)$.

Απομένει να εξεταστεί η σύγκλιση της δυναμοσειράς στα άκρα του διαστήματος $[-8,4)$. Για $x=-8$, η δυναμοσειρά ισούται με

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}},$$

η οποία είναι εναλλάσσουσα σειρά. Προφανώς έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \text{για κάθε } n,$$

άρα, από το κριτήριο του Leibniz, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$$

συγκλίνει.

Για $x=4$, η δυναμοσειρά ισούται με

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},$$

η οποία αποκλίνει.

Συνοψίζοντας, η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n \sqrt{n}} (x+2)^n$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $x \in [-8,4)$.