ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

"Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ'αυτό μένειν"
Ηράκλειτος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Το παρόν υλικό διατίθεται αποκλειστικά για τους φοιτητές του μαθήματος Γενικά Μαθηματικά Ι του Τμήματος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών..

Δεκέμβρης 2025

Περιεχόμενα

I

1 Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά

Το φως αποτέλεσε για αιώνες ένα μυστήριο για τον άνθρωπο. Στα έργα των ανθρώπων, όπως στους μύθους, στις επιστήμες, ακόμη και στις θρησκείες, το φως έπαιζε πάντοτε ιδιαίτερο ρόλο. Οι πρώτες εικόνες που υπέπεσαν στην αντίληψη του ανθρώπου ήταν οι ευθύγραμμες ακτίνες του φωτός και ο κυκλικός δίσκος του Ήλιου και των πλανητών του. ’Ηταν φυσικό λοιπόν όταν η Γεωμετρία μπήκε στη ζωή των ανθρώπων με την εμπειρική της μορφή, τα πρώτα γεωμετρικά σχήματα που κατασκευάστηκαν να είναι η ευθεία και ο κύκλος. Έτσι φθάσαμε στο σημείο η ευθεία και ο κύκλος να αποκτήσουν ιδιαίτερη σημασία, ιδίως μετά την ανακάλυψη της απόδειξης όπου θεωρούνταν ανεπίτρεπτη η επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος χωρίς την χρήση του χάρακα και του διαβήτη. Η εισαγωγή της Γεωμετρίας άλλαξε την ποιότητα της ανθρώπινης σκέψης και την οδήγησε από την πρακτική στη θεωρητική αντιμετώπιση των πραγμάτων και στην παραγωγή της γνώσης. Η φύση λοιπόν σηματοδότησε την πρώτη μεγάλη ερευνητική διείσδυση της ανθρώπινης σκέψης για την ερμηνεία και την κατανόηση της φυσικής πραγματικότητας. Οι πραγματείες του Αριστοτέλη και η θεμελίωση της Γεωμετρίας από τον Ευκλείδη δημιούργη- σαν το υπόβαθρο στο οποίο βασίστηκαν μετά απο πολλούς αιώνες ο Γαλιλαίος και ο Νεύτωνας, προκειμένου να διαμορφώσουν τη σύγχρονη αντίληψη της Φυσικής δίνοντας με αυτό τον τρόπο το έναυσμα στην εξέλιξη της μαθηματικής Επιστήμης, η οποία με αυτόν τον τρόπο εξελίσσεται μέσα απο μια σειρά σκέψεων και πράξεων που κάθε μια οικοδομείται επάνω στις προηγούμενες. Πολλοί αρχαίοι λαοί όπως οι Σουμέριοι, οι Αιγύπτιοι, οι Κινέζοι και άλλοι χρησιμοποιούσαν άτυπες μαθηματικές πράξεις, όμως, τα μαθηματικά ως μια έννοια που δηλώνει επιστήμη εμφανίζονται για πρώτη φορά στην αρχαία ελλάδα. Ο διακεκριμένος Γάλλος ιστορικός Αρνό Ρεϋμόν έγραψε: «*Σε σύγκριση με τις εμπειρικές και σκόρπιες γνώσεις που οι λαοί της Ανατολής συγκέντρωσαν με τη δουλειά τους στη διάρκεια πολλών αιώνων, η ελληνική επιστήμη είναι ένα θαύμα. Εδώ για πρώτη φορά η ανθρώπινη σκέψη κατανόησε ότι πρέπει να καθορίσει έναν αριθμό γενικών αρχών και να βγάλει απ’ αυτές ορισμένες αλήθειες που είναι τ’ αναγκαίο αποτέλεσμά τους*». Δυο είναι τα στοιχεία που υπονοεί ο Ρεϋμόν και έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην πορεία της εξέλιξης των μαθηματικών, η έννοια απόδειξης, και η ιδέα της αξιωματικής θεμελίωσης. Η έννοια της απόδειξης ξεκίνησε από τον Θαλή, αναπτύχθηκε από τον Πυθαγόρα και συστηματοποιήθηκε και τελειοποιήθηκε από τον Πλάτωνα, τον Αριστοτέλη, τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη. Η σύλληψη της ιδέας της αξιωματικής θεμελίωσης οφείλεται στους αρχαίους Έλληνες. Κλασικό παράδειγμα είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία, η αρχιτεκτονική της αποδεικτικής διαδικασίας απο τον Αριστοτέλη και τον Πυθαγόρα και τους υποστηρικτές του που ονομάστηκαν Πυθαγόρειοι, κ.α.λ. Τα έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών έβαλαν τα θεμέλια και αποτέλεσαν την βάση για την πιό πέρα εξέλιξη των μαθηματικών επιστημών, όπως Θεωρίας Αριθμών, μαθηματικής Λογικής, Αλγεβρας και Απειροστικού Λογισμού. Στο πλαίσιο μιας σφαιρικής πραγμάτευσης των μαθηματικών και με κίνητρο την καταννόησή τους, δίνουμε μερικά στοιχεία της κατηγοριοποίησης των μαθηματικών απο το 3000 π.Χ μέχρι και τον Έκτο αιώνα μ.Χ, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν υπάρχουν αλληλεπικαλύψεις μεταξύ διαφορετικών κατηγοριών.

2 Διαφορικός Λογισμός Μιας Μεταβλητής

2.1 Εισαγωγή

Θεώρημα 2.1.1 Συνέχεια της σύνθετης συνάρτησης. Αν η g είναι συνεχής στο $x = x_0$ και η f είναι συνεχής στο $y = g(x_0)$, τότε η σύνθετη συνάρτηση $F(x) = f(g(x))$ είναι συνεχής στο $x = x_0$.

Γενικότερα, μια *στοιχειώδης συνάρτηση* είναι μια συνάρτηση που κατασκευάζεται από βασικές συναρτήσεις χρησιμοποιώντας τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης και της σύνθεσης. Εφόσον οι βασικές συναρτήσεις είναι συνεχείς (στο πεδίο ορισμού τους), μια στοιχειώδης συνάρτηση είναι επίσης συνεχής στο πεδίο ορισμού της από τους κανόνες της συνέχειας. Ένα παράδειγμα στοιχειώδους συνάρτησης είναι η

$$F(x) = \tan^{-1}\left(\frac{x^2 + \cos(2^x + 9)}{x - 8}\right)$$

Αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της το οποίο είναι $D_f = \{x : x \neq 8\}$.

Αντικατάσταση: υπολογισμός ορίων χρησιμοποιώντας τη συνέχεια

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε ένα όριο όταν η εμπλεκόμενη συνάρτηση είναι γνωστό ότι είναι συνεχής. Σε αυτή την περίπτωση το όριο εξ ορισμού είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ονομάζουμε αυτή τη διαδικασία *μέθοδο αντικατάστασης* επειδή το όριο υπολογίζεται αντικαθιστώντας το $x = x_0$ στην $f(x)$.

Παράδειγμα 2.1.2 Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{a)}\ \lim_{y \to \frac{\pi}{3}} \sin y \qquad \text{b)}\ \lim_{x \to -1} \frac{3^x}{\sqrt{x+5}}$$

Λύση. a) Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση επειδή η $f(y) = \sin y$ είναι συνεχής:

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{3}} \sin y = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3^x}{\sqrt{x+5}}$ είναι συνεχής στο $x=-1$ επειδή ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι και οι δύο συνεχείς στο $x=-1$ και ο παρονομαστής $\sqrt{x+5}$ είναι μη μηδενικός στο $x=-1$. Ως εκ τούτου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση:

$$\lim_{x\to-1}\frac{3^x}{\sqrt{x+5}} = \frac{3^{-1}}{\sqrt{-1+5}} = \frac{1}{3\cdot 2} = \frac{1}{6}$$

Περίληψη 2.1.3

- Ορισμός: Η f είναι *συνεχής* στο $x=x_0$ αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Αυτό σημαίνει ότι το $f(x_0)$ υπάρχει, το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσα.
- Αν το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει ή αν υπάρχει αλλά δεν είναι ίσο με $f(x_0)$, τότε η f είναι *ασυνεχής* στο $x=x_0$.
- Αν η f είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, τότε η f λέγεται απλά *συνεχής*.
- *Συνέχεια από δεξιά* στο $x=x_0$: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- *Συνέχεια από αριστερά* στο $x=x_0$: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- Τρεις συνηθισμένες μορφές ασυνεχειών:
  - *Αιρόμενη ασυνέχεια*: το όριο υπάρχει, αλλά είτε το όριο δεν είναι ίσο με την τιμή $f(x_0)$ ή η $f(x_0)$ δεν ορίζεται.
  - *Ασυνέχεια άλματος*: Τα πλευρικά όρια υπάρχουν αλλά δεν είναι ίσα.
  - *Άπειρη ασυνέχεια*: Το όριο είναι άπειρο καθώς το x τείνει στο x_0 από τη μία ή και από τις δύο πλευρές.
- *Κανόνες συνέχειας*: Αθροίσματα, γινόμενα, πολλαπλάσια, αντίστροφες συναρτήσεις και συνθέσεις συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις. Τα ίδια ισχύουν για ένα πηλίκο f/g στα σημεία όπου $g(x)\neq 0$.
- Οι βασικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους όπου οι βασικές συναρτήσεις είναι πολυώνυμα, ρητές συναρτήσεις, n-οστές ρίζες και αλγεβρικές συναρτήσεις, τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφες συναρτήσεις τους, εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις.
- *Μέθοδος αντικατάστασης*: Αν η f είναι γνωστό ότι είναι συνεχής στο $x=x_0$, τότε η τιμή του ορίου $\lim_{x\to x_0} f(x)$ είναι $f(x_0)$.

Λυμένες ασκήσεις 2.1.4

1. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις

(a) $f(x) = x + \sin x$ (b) $f(x) = x \sin x$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - \cos x}{3 + \cos x}$ (d) $f(x) = e^x \cos 3x$.

είναι συνεχείς.

2. Να προσδιορίσετε τα σημεία ασυνέχειας των παρακάτω συναρτήσεων. Να αναφέρετε το είδος της ασυνέχειας (αιρόμενη, άλματος) και πότε η συνάρτηση είναι συνεχής από αριστερά ή από δεξιά.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{|x-2|} & \text{αν } x \neq 2 \\ -1 & \text{αν } x = 2. \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - e^{-x}}$. (d) $f(x) = \ln |x - 4|$.

Λύση.

1. (a) Η συνάρτηση x είναι πολυωνυμική και άρα συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$. Το ίδιο ισχύει και για την συνάρτηση $\sin x$ που είναι επίσης συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$. Επίσης το άθροισμα δύο συνεχών συναρτήσεων είναι επίσης συνεχής. Συνεπώς η $f(x) = x + \sin x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

   (b) Οι συναρτήσεις x και $\sin x$ είναι συνεχείς σε όλο το $\mathbb{R}$. Συνεπώς, το γινόμενο δύο συνεχών συναρτήσεων είναι επίσης μια συνεχής συνάρτηση.

   (c) Η συνάρτηση $f(x)$ έχει παρονομαστή $3 + \cos x$. Επειδή $3 + \cos x \neq 0$ η συνάρτηση είναι ορισμένη για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ο αριθμητής $x^2 - \cos x$ είναι διαφορά συνεχών συναρτήσεων και συνεπώς είναι συνεχής συνάρτηση. Ο παρονομαστής είναι επίσης συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν μηδενίζεται πουθενά. Αφού ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται η συνάρτηση $f(x)$ είναι πηλίκο συνεχών συναρτήσεων με μη μηδενικό παρονομαστή. Συνεπώς η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - \cos x}{3 + \cos x}$$

   είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

   (d) Η συνάρτηση e^x είναι η εκθετική συνάρτηση και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $\cos 3x$ είναι η σύνθεση της συνεχούς συνάρτησης $\cos x$ και της πολυωνυμικής συνάρτησης $3x$ που είναι συνεχής. Άρα το $\cos 3x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Το γινόμενο δύο συνεχών συναρτήσεων είναι επίσης συνεχής συνάρτηση. Επομένως, η συνάρτηση $f(x) = e^x \cos 3x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

2. (a) Θα υπολογίσουμε πρώτα το όριο από αριστερά στο σημείο $x = 2$: Για $x < 2$ το $|x - 2| =$

$-(x-2)$ και επομένως

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{|x-2|}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{-(x-2)}=-1.$$

Για $x>2$ το $|x-2|=x-2$, άρα έχουμε

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{|x-2|}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}=1.$$

Τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, επομένως υπάρχει ασυνέχεια άλματος στο $x=2$.

(b) Η συνάρτηση $\cos\frac{1}{x}$ είναι ορισμένη για όλα τα $x\in\mathbb{R}\setminus\emptyset$. Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\quad\text{και}\quad y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{2}},\ \text{όπου}\ n\in\mathbb{Z}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)=\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1\quad\text{και}\quad\sin\left(\frac{1}{y_n}\right)=\sin\left(2n\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=-1.$$

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα **??** η συνάρτηση f δεν συγκλίνει.

(c) Για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{e^x-e^{-x}}$ πρέπει ο παρονομαστής e^x-e^{-x} να είναι διάφορος του μηδενός, δηλαδή $e^x-e^{-x}\neq 0$. Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση έχουμε $e^x=e^{-x}\implies e^{2x}=1\implies 2x=0\implies x=0$. Άρα η συνάρτηση $f(x)$ δεν είναι ορισμένη στο $x=0$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Για να εξετάσουμε το όριο καθώς $x\to 0$, υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια. Όταν $x\to 0^-$ τότε το e^x-e^{-x} x είναι αρνητικό. Επομένως

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{e^x-e^{-x}}=-\infty.$$

Όταν $x\to 0^+$ τότε το e^x-e^{-x} x είναι θετικό. Επομένως

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x-e^{-x}}=+\infty.$$

Άρα η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{e^x-e^{-x}}$ παρουσιάζει άπειρη ασυνέχεια στο $x=0$.

(d) Η λογαριθμική συνάρτηση $\ln x$ είναι ορισμένη για $x>0$. Επομένως η $\ln|x-4|$ είναι ορισμένη όταν:

$$|x-4|>0\implies x\neq 4.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $D_f=\mathbb{R}\setminus\{4\}$.
Το όριο της f από δεξιά είναι

$$\lim_{x\to 4^+}\ln|x-4|=\ln(x-4)\to-\infty.$$

Το όριο της f από αριστερά είναι

$$\lim_{x\to 4^+}\ln|x-4|=\ln(4-x)\to-\infty.$$

Το όριο της συνάρτησης καθώς $x\to 4$ δεν είναι πεπερασμένο αλλά τείνει στο $-\infty$. Άρα, η συνάρτηση παρουσιάζει *άπειρη ασυνέχεια* στο $x=4$.

Σημείωση 2.1.5 Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει μια *άπειρη ασυνέχεια* στο $x = x_0$ αν ένα ή και τα δύο πλευρικά όρια είναι άπειρα (ακόμα και αν η $f(x)$ δεν ορίζεται στο $x = x_0$). Όπως στην ασυνέχεια άλματος, σε αυτή την περίπτωση η f δεν είναι συνεχής στο $x = x_0$ επειδή το όριο

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

δεν υπάρχει.

Ασκήσεις 2.1.6

3. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς (a, b ή c) ώστε οι παρακάτω συναρτή- σεις να είναι συνεχείς.

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - c, & x < 5 \\ 4x + 2c, & x \geq 5 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 9x^{-1}, & x \leq 3 \\ -4x + c, & x > 3 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & x < -1 \\ ax + b, & -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x^{-1}, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$

4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, & \text{αν } x \neq 4, \\ 10, & \text{αν } x = 4 \end{cases}$ έχει μία αιρόμενη ασυνέχεια στο $x = 4$.

5. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{για } x < -1, \\ cx, & \text{για } -1 \leq x \leq 2, \\ x + 2, & \text{για } x > 2. \end{cases}$ Να βρεθεί η τιμή του c ώστε η g να είναι

   (a) συνεχής από αριστερά,
   (b) συνεχής από δεξιά.

   Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g.

6. Να υπολογίσετε τα όρια χρησιμοποιώντας αντικατάσταση:

   (a) $\lim\limits_{x \to -1} (2x^3 - 4)$

   (b) $\lim\limits_{x \to 2} (5x - 12x^{-2})$

   (c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x + 2}{x^2 + 2x}$

   (d) $\lim\limits_{x \to \pi} \sin\left(\dfrac{x}{2} - \pi\right)$

   (e) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan(3x)$

   (f) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1}{\cos x}$

   (g) $\lim\limits_{x \to 4} x^{-5/2}$

   (h) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^3 + 4x}$

   (i) $\lim\limits_{x \to 3} 10^{x^2 - 2x}$

2.2 Απροσδιόριστες μορφές

Η αντικατάσταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε όρια όταν η υπό μελέτη συνάρτηση είναι γνωστό ότι είναι συνεχής. Όταν θα μελετήσουμε τις παραγώγους θα αντιμετωπίσουμε όρια $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ όπου η τιμή $f(x_0)$ δεν ορίζεται. Σε τέτοιες περιπτώσεις η αντικατάσταση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας. Ωστόσο, πολλά από αυτά τα όρια μπορούν να υπολογιστούν αν χρησιμοποιήσουμε την άλγεβρα για να ξαναγράψουμε τον τύπο της $f(x)$.

Ορισμός 2.2.1 Αν δίνεται μια συνάρτηση f της οποίας ο τύπος παράγει μια απροσδιόριστη έκφραση για το $f(x)$ σε μία από τις μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$ ή $\infty - \infty$, τότε λέμε ότι η $f(x)$ έχει *απροσδιόριστη μορφή* (ή είναι *απροσδιόριστη*) στο $x = x_0$.

Μία απροσδιόριστη μορφή, όπως υποδηλώνει και το όνομά της, δείχνει ότι το όριο δεν μπορεί να προσδιοριστεί από τη μορφή της συνάρτησης. Αυτό δεν σημαίνει ότι το όριο δεν υπάρχει. 'Οταν η $f(x)$ έχει μια απροσδιόριστη μορφή στο $x = x_0$ μία στρατηγική είναι να μετασχηματίσου- με αλγεβρικά την $f(x)$, αν είναι δυνατόν, σε μία νέα έκφραση που ορίζεται και είναι συνεχής στο $x = x_0$ και έπειτα να υπολογίσουμε το όριο με αντικατάσταση. Το κρίσιμο βήμα στα περισσότερα παραδείγματα είναι η απλοποίηση ενός κοινού παράγοντα από τον αριθμητή και τον παρονομαστή την κατάλληλη στιγμή, το οποίο αίρει την απροσδιοριστία.

Περίληψη 2.2.2

- Όταν η f είναι γνωστό ότι είναι συνεχής στο $x = x_0$, τότε το όριο μπορεί να υπολογιστεί με αντικατάσταση
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$
- Αν ο τύπος για το $f(x_0)$ οδηγεί σε μια απροσδιόριστη έκφραση της μορφής
$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty \cdot 0, \quad \infty - \infty$$
τότε λέμε ότι η $f(x)$ είναι απροσδιόριστη ή έχει απροσδιόριστη μορφή στο $x = x_0$.
- Αν η $f(x)$ είναι απροσδιόριστη στο $x = x_0$ δοκιμάζουμε να την μετασχηματίσουμε αλγεβρικά σε μια νέα έκφραση όπου ορίζεται και είναι συνεχής στο $x = x_0$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το όριο με αντικατάσταση.

Παράδειγμα 2.2.3 Απλοποίηση κλάσματος με παραγοντοποίηση Να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 12}.$$

Λύση. Η συνάρτηση έχει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ στο $x = 3$. 'Εχουμε

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-12} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+4)} = \frac{x-1}{x+4}, \quad \text{για } x \neq 3.$$

Επειδή η έκφραση στο δεξιό μέλος της εξίσωσης είναι συνεχής στο $x=3$, υπολογίζουμε το όριο ως ακολούθως:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2+x-12} = \lim_{x\to 3} \frac{x-1}{x+4} = \frac{3-1}{3+4} = \frac{2}{7}$$

Παράδειγμα 2.2.4 Πολλαπλασιασμός με τον συζυγή Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$.

Λύση. Το όριο έχει την απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$, αφού $x-9 \to 0$ και $\sqrt{x}-3 \to 0$ όταν $x \to 9$.

Για να απλοποιήσουμε την έκφραση, πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με το συζυγές του παρονομαστή:

$$\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9}.$$

Απλοποιώντας τον κοινό παράγοντα $x-9$ (για $x \neq 9$) έχουμε

$$\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \sqrt{x}+3.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \sqrt{9}+3 = 3+3 = 6.$$

Ασκήσεις 2.2.5 1. Να δείξετε ότι το όριο οδηγεί σε μία απροσδιόριστη μορφή. Έπειτα να ακολουθήσετε τη διαδικασία δύο βημάτων. Μετασχηματίστε αλγεβρικά τη συνάρτηση και υπολογίστε χρησιμοποιώντας τη συνέχεια.

(a) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x^2-36}{x-6}$ (b) $\lim\limits_{h\to 3} \dfrac{9-h^2}{h-3}$ (c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$

(d) $\lim\limits_{t\to 9} \dfrac{2t-18}{5t-45}$.

2. Να υπολογίσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια. Αν δεν υπάρχουν, να προσδιορίσετε αν υπάρχουν πλευρικά όρια (πεπερασμένα ή άπειρα).

(a) $\lim_{x\to 7} \frac{x-7}{x^2-49}$ (d) $\lim_{x\to 8} \frac{x^3-64x}{x-8}$ (g) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\right)$

(b) $\lim_{x\to 8} \frac{x^2-64}{x-9}$ (e) $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{x-4}-2}{x-8}$ (h) $\lim_{x\to 5} \frac{2x^2-9x-5}{x^2-25}$

(c) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x+2}$ (f) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{5-x}-1}{2-\sqrt{x}}$ (i) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{2x+1}{2x^2+3x+1}$

3. Τα ακόλουθα όρια έχουν όλα την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Ένα από τα όρια δεν υπάρχει, ένα είναι ίσο με 0 και ένα είναι μη μηδενικό. Να υπολογίσετε κάθε όριο αλγεβρικά, αν είναι εφικτό.

(a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x+2}$ (b) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^{-1}}{x-2+x^{-1}}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-e^x}$

4. Τα ακόλουθα όρια έχουν όλα την απροσδιόριστη μορφή ∞/∞. Ένα από τα όρια δεν υπάρχει, ένα είναι ίσο με 0 και ένα είναι μη μηδενικό. Να υπολογίσετε κάθε όριο αλγεβ- ρικά, αν είναι εφικτό, ή αλλιώς να το διερευνήσετε αριθμητικά.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^{-4}}{4+x^{-1}}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{3\cot x}{\csc x}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^4}}$

5. Να υπολογίσετε τα όρια χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ (c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x^3-1}$ (e) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1}$

(b) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$ (d) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2+6x+8}$ (f) $\lim_{x\to 27} \frac{x-27}{x^{1/3}-3}$

6. Να υπολογίσετε τα όρια συναρτήσει της σταθεράς a.

(a) $\lim_{x\to 0}(2a+x)$

(b) $\lim_{h\to -2}(4ah+7a)$

(c) $\lim_{t\to -1}(4t-2at+3a)$

(d) $\lim_{x\to a}\dfrac{(x+a)^2-4x^2}{x-a}$

(e) $\lim_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

(f) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{a+2h}-\sqrt{a}}{h}$

(g) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(x+a)^3-a^3}{x}$

(h) $\lim_{h\to a}\dfrac{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}{h-a}$

7. Να βρείτε όλες τις τιμές του c για τις οποίες υπάρχει το όριο.

(a) $\lim_{x\to c}\dfrac{x^2-5x-6}{x-c}$

(b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+c}{x-1}$

(c) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{c}{x^3-1}\right)$

(d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1+cx^2-\sqrt{1+x^2}}{x^4}$

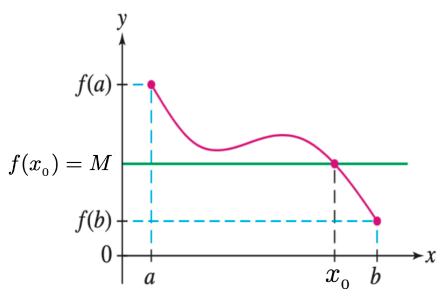
2.3 θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών (ΘΕΤ) αναφέρει ότι αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα, τότε παίρνει όλες τις τιμές ανάμεσα στις τιμές που παίρνει στα άκρα του διαστήματος. Για παράδειγμα, αν μια συνάρτηση περιγράφει το ύψος ενός αεροπλάνου από τη στιγμή της απογείωσης μέχρι να φτάσει σε ένα μέγιστο ύψος, τότε το αεροπλάνο πρέπει να περάσει από κάθε ύψος μεταξύ του ελάχιστου και του μέγιστου ύψους, χωρίς να παραλείψει καμία τιμή.

Με απλά λόγια, αν ξεκινήσεις από ένα σημείο και φτάσεις σε ένα άλλο, τότε πρέπει να έχεις περάσει από όλα τα ενδιάμεσα σημεία, αρκεί η διαδρομή σου να είναι συνεχής και χωρίς “άλματα”.

Θεώρημα 2.3.1 Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$, τότε για κάθε τιμή M, αυστηρά μεταξύ του $f(a)$ και του $f(b)$, υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή $x_0 \in (a,b)$ τέτοια ώστε $f(x_0)=M$.

Γραφικά, όπως στο Σχήμα 2.1, το αποτέλεσμα φαίνεται προφανές. Για μια συνεχή συνάρτηση κάθε οριζόντια ευθεία σε ύψος M μεταξύ του $f(a)$ και του $f(b)$ είναι υποχρεωμένη να συναντήσει τη γραφική παράσταση και επομένως πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή x_0 στο (a,b) τέτοια ώστε $f(x_0)=M$.



Σχήμα 2.1 *Για κάθε M μεταξύ του $f(a)$ και του $f(b)$ υπάρχει κάποιο x_0 μεταξύ του a και του b τέτοιο ώστε $f(x_0)=M$.*

Πόρισμα 2.3.2 ’Υπαρξη ριζών (Bolzano) Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$. Αν

$$f \text{ είναι συνεχής στο } [a,b] \text{ και, επιπλέον, ισχύει}$$

$$f(a)\cdot f(b) < 0,$$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Δηλαδή, υπάρχει μία, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοιχτό διάστημα (a,b).

Παράδειγμα 2.3.3 Να δείξετε ότι η $f(x) = \dfrac{x^2}{x^7+1}$ παίρνει την τιμή 0.4.

Λύση. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) = 0.4$. Δηλαδή,

$$\frac{x^2}{x^7+1} = 0.4.$$

Πολλαπλασιάζουμε και τις δύο πλευρές με τον παρονομαστή x^7+1 (υποθέτοντας $x^7+1 \neq 0$) θα έχουμε

$$x^2 = 0.4(x^7+1) \Rightarrow x^2 - 0.4x^7 - 0.4 = 0.$$

Η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 0.4x^7 - 0.4$ είναι συνεχής, επειδή είναι πολυωνυμική. Εξετάζουμε αν το $g(x)$ αλλάζει πρόσημο σε ένα διάστημα. Έχουμε

- Για $x = 0$: $g(0) = 0^2 - 0.4(0)^7 - 0.4 = -0.4$ (αρνητικό).
- Για $x = 1$: $g(1) = 1^2 - 0.4(1)^7 - 0.4 = 1 - 0.4 - 0.4 = 0.2$ (θετικό).

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή $x \in (0,1)$ για την οποία $g(x) = 0$. Επομένως, η $f(x)$ παίρνει την τιμή 0.4.

Παράδειγμα 2.3.4 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,3)$.

Λύση. Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται

$$f(x) = x \iff f(x) - x = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή η f διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,1)$, ισχύει ότι

$$f(1) = 2 \quad \text{και} \quad f(3) = 1.$$

Η f είναι συνεχής στο $[1,3] \subseteq \mathbb{R}$ από υπόθεση. Άρα, και η $g(x) = f(x) - x$ είναι συνεχής, καθώς είναι πράξη συνεχών συναρτήσεων. Επίσης, έχουμε

$$g(1) = f(1) - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ και g(3) = f(3) - 3 = 1 - 3 = -2.}$$

Άρα, ισχύει ότι:

$$g(1) \cdot g(3) = 1 \cdot (-2) = -2 < 0.$$

Από το Θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \iff f(x_0) - x_0 = 0 \iff f(x_0) = x_0.$$

2.4 Παραγώγιση

Η *παράγωγος* αποτελεί θεμελιώδη έννοια στον διαφορικό λογισμό και στα μαθηματικά γενικότερα. Η μελέτη της παραγώγου επικεντρώνεται στον *ρυθμό μεταβολής* μιας ποσότητας καθώς και στην κλίση μιας εφαπτόμενης ευθείας σε ένα σημείο της συνάρτησης. Η παράγωγος είναι το όριο του πηλίκου των διαφόρων τιμών που προκύπτουν σε πολύ μικρές μεταβολές και εκφράζει πόσο γρήγορα αλλάζει μία συνάρτηση. Η έννοια της παραγώγου αναπτύχθηκε ανεξάρτητα από δύο κορυφαίους μαθηματικούς του 17ου αιώνα: τον Ισαάκ Νεύτωνα και τον Gottfried Wilhelm Leibniz. Ο Νεύτωνας (1642-1727), Άγγλος μαθηματικός και φυσικός, ανέπτυξε την έννοια της παραγώγου στο πλαίσιο της θεωρίας των ροών εστιάζοντας στην έννοια της κίνησης και του ρυθμού. Από την άλλη ο Leibniz (1646-1716), Γερμανός μαθηματικός και φιλόσοφος, διατύπωσε τις θεμελιώδεις αρχές του διαφορικού λογισμού εισάγοντας την έννοια των απείρως μικρών μεταβολών. Παρά τη διαμάχη για την πατρότητα της θεωρίας και οι δύο αναγνωρίζονται σήμερα ως συνδημιουργοί του διαφορικού λογισμού. Σήμερα η παράγωγος αποτελεί ένα εργαλείο που μας επιτρέπει να αναλύουμε και να κατανοούμε την κίνηση και τον ρυθμό μεταβολής σε φυσικά και κοινωνικά φαινόμενα και χρησιμοποιείται είτε για την κατανόηση φυσικών διεργασιών είτε για τη μοντελοποίηση οικονομικών και βιολογικών προβλημάτων, και γενικότερα, μας επιτρέπει να μελετήσουμε τον ρυθμό με τον οποίο αλλάζουν τα πράγματα γύρω μας. Στη φύση η παράγωγος εμφανίζεται σε πολλές διαδικασίες. Για παράδειγμα, όταν ένα σώμα κινείται η ταχύτητά του υπολογίζεται ως η παράγωγος της θέσης του ως προς τον χρόνο. Αν ρίξουμε μια πέτρα από ένα ύψος, η ταχύτητά της αυξάνεται σταδιακά καθώς πέφτει ενώ η επιτάχυνση της πτώσης εκφράζεται επίσης μέσω παραγώγων. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η ροή του νερού σε ένα ποτάμι. Όταν η στάθμη του νερού ανεβαίνει η ταχύτητα της ροής αυξάνεται και αυτό περιγράφεται με την παράγωγο. Αντίστοιχα, στα φυτά η παράγωγος δείχνει τον ρυθμό με τον οποίο απορροφούν διοξείδιο του άνθρακα ανάλογα με την ένταση του φωτός που δέχονται. Περνώντας στην πραγματική ζωή η έννοια της παραγώγου είναι εξίσου σημαντική. Στην οικονομία, η παράγωγος χρησιμοποιείται για να μετρήσει τον ρυθμό αύξησης των τιμών ενός προϊόντος ή τον πληθωρισμό. Όταν οι τιμές αυξάνονται γρήγορα μπορούμε να κατανοήσουμε πόσο απότομα μεταβάλλεται η οικονομία. Στην υγεία ο καρδιακός ρυθμός, δηλαδή ο αριθμός των παλμών ανά λεπτό, εκφράζεται με την παράγωγο και μπορεί να αποκαλύψει πότε το σώμα βρίσκεται υπό έντονη δραστηριότητα ή άγχος. Ακόμη και η κίνηση στον δρόμο περιγράφεται μέσω παραγώγων. Η κυκλοφοριακή ροή, δηλαδή η ταχύτητα με την οποία κινούνται τα οχήματα σε έναν αυτοκινητόδρομο, αλλάζει όταν αυξάνεται ο αριθμός των αυτοκινήτων ή υπάρχει συμφόρηση. Τέλος, στην καθημερινότητα, η παράγωγος χρησιμοποιείται για να μελετήσει τον ρυθμό με τον οποίο αλλάζει ο πληθυσμός μιας πόλης, πόσο γρήγορα αναπτύσσεται μία καλλιέργεια ή ακόμη και τον ρυθμό αναγέννησης των κυττάρων του ανθρώπινου δέρματος. Η παράγωγος είναι λοιπόν ένα πολύτιμο εργαλείο που μας βοηθά να κατανοούμε τις μεταβολές που συμβαίνουν γύρω μας. Επομένως η παράγωγος μας επιτρέπει να περιγράφουμε με ακρίβεια τον κόσμο και να προβλέπουμε τις αλλαγές που συμβαίνουν σε αυτόν.

2.4.1 Ορισμός της παραγώγου

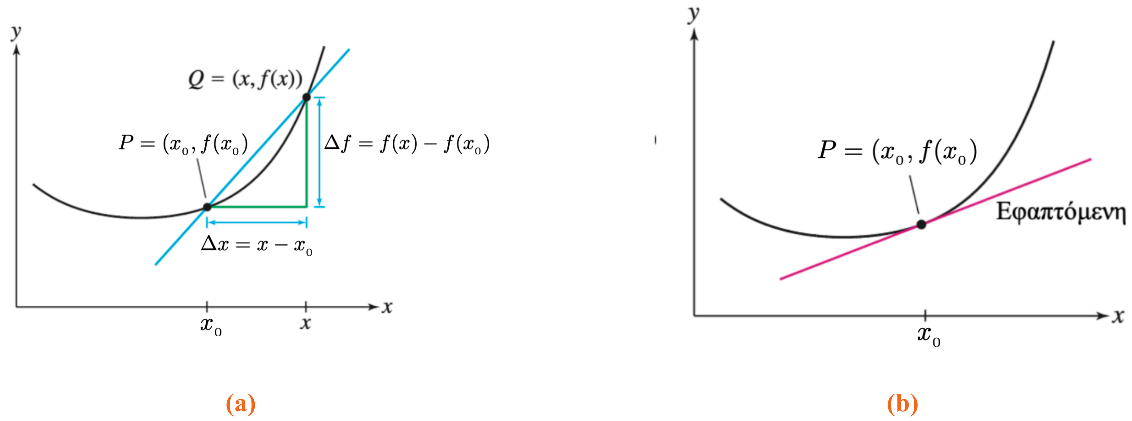
Στη μελέτη των συναρτήσεων και της μεταβολής τους υπάρχει μια βασική ερώτηση: Πώς μπορούμε να μετρήσουμε τον ρυθμό με τον οποίο αλλάζει μια συνάρτηση; Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, ας ξεκινήσουμε με την έννοια της *τέμνουσας ευθείας της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης* f. Όταν έχουμε δύο σημεία $P = (x_0, f(x_0))$ και $Q = (x, f(x))$ σε μια καμπύλη, μπορούμε να ενώσουμε τα σημεία αυτά με μια ευθεία. Η κλίση της τέμνουσας ευθείας που δίνεται από τον λόγο των μεταβολών

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

μας δείχνει πόσο αυξάνεται ή μειώνεται η τιμή της συνάρτησης καθώς το x αλλάζει. Η παραπάνω έκφραση ονομάζεται *πηλίκο διαφορών*. Το $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ εκφράζει τη μεταβολή της τιμής της συνάρτησης, ενώ το $\Delta x = x - x_0$ εκφράζει τη μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής. Η τέμνουσα ευθεία είναι μια *πρόχειρη προσέγγιση* της κλίσης της καμπύλης (Σχήμα 2.3(a)). Όμως, τι συμβαίνει αν φέρουμε το σημείο Q όλο και πιο κοντά στο σημείο P; Όσο το x πλησιάζει το x_0, η τέμνουσα ευθεία μετατρέπεται σε *εφαπτόμενη ευθεία*, η οποία είναι μια ακριβής προσέγγιση της κλίσης της καμπύλης στο σημείο P. Η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας ορίζεται ως το όριο του πηλίκου διαφορών όταν το x τείνει στο x_0:

$$\textit{Κλίση} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Αυτή η κλίση αποτελεί τον *ρυθμό μεταβολής* της συνάρτησης στο σημείο P και είναι γνωστή ως *παράγωγος* της συνάρτησης (Σχήμα 2.3(b)). Η παράγωγος είναι ένα πανίσχυρο εργαλείο που χρησιμοποιείται για να περιγράψει πόσο γρήγορα αλλάζουν οι τιμές μιας συνάρτησης είτε αυτή αναφέρεται στη θέση ενός κινούμενου σώματος είτε στην ανάπτυξη ενός φυτού ή ακόμα και στις τιμές των μετοχών σε μια οικονομία.



Σχήμα 2.2 *Η τέμνουσα ευθεία έχει κλίση* $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. *Ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο* $(x_0, f(x_0))$.

Ορισμός 2.4.1 Η παράγωγος Η *παράγωγος* της f σε ένα σημείο x_0 είναι το όριο του πηλίκου διαφορών (αν υπάρχει):

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ή ισοδύναμα

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Όταν το όριο υπάρχει, λέμε ότι η f είναι *παραγωγίσιμη* στο x_0.

Ορισμός 2.4.2 Η πλευρική παράγωγος Έστω μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$.

(1) Η f ονομάζεται *παραγωγίσιμη από αριστερά* στο x_0 αν υπάρχει το πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Σε αυτή την περίπτωση το όριο λέγεται *παράγωγος* της f *από αριστερά* στο x_0 και συμβολίζεται με $f'_-(x_0)$.

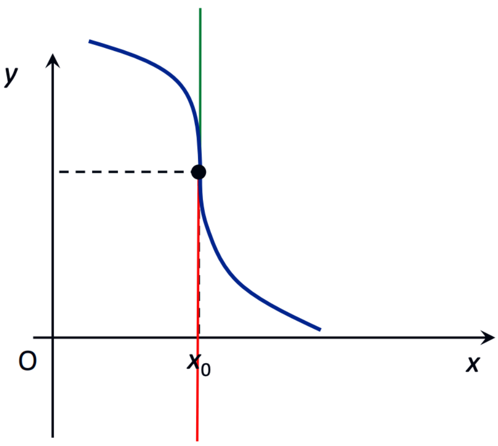
(2) Η f ονομάζεται *παραγωγίσιμη από δεξιά* στο x_0 αν υπάρχει το πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

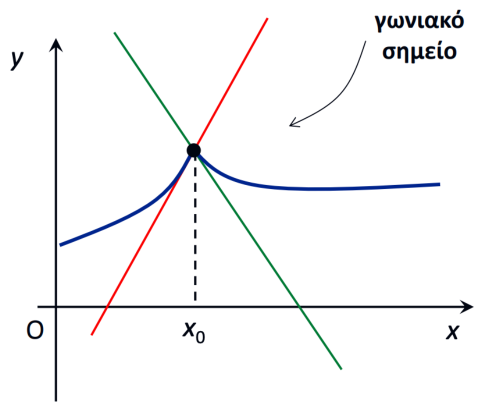
Σε αυτή την περίπτωση το όριο λέγεται *παράγωγος* της f *από δεξιά* στο x_0 και συμβολίζεται με $f'_+(x_0)$.

Αν συμβολίσουμε με h την διαφορά $x - x_0$ τότε θα έχουμε

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{και} \quad f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



(a) $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = -\infty$



(b) $f'_-(x_0) = a \neq f'_+(x_0) = b,\ a, b \in \mathbb{R}$

Σχήμα 2.3 *Πλευρικές παράγωγοι.*

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε την εφαπτόμενη ευθεία με πιο αυστηρό τρόπο ως την ευθεία με κλίση $f'(x_0)$ που διέρχεται από το σημείο $P = (x_0, f(x_0))$.

Ορισμός 2.4.3 Εφαπτόμενη ευθεία Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο a. Η *εφαπτόμενη ευθεία* στο σημείο $P = (x_0, f(_0))$ της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ είναι η ευθεία που διέρχεται από το P και έχει κλίση $f'(x_0)$.
Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας σε μορφή σημείου-κλίσης δίνεται από τον τύπο:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $P = (a, b)$ με κλίση λ σε μορφή σημείου-κλίσης είναι:

$$y - b = \lambda(x - a)$$

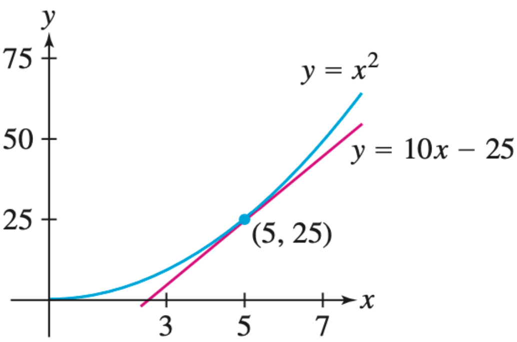
Παράδειγμα 2.4.4 Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 \text{ στο } x = 5.$$

Λύση. Αρχικά, πρέπει να υπολογίσουμε το $f'(5)$. Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε:

$$f'(5) = \lim_{x\to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

Αυτό το όριο είναι στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Μπορούμε να απλοποιήσουμε και μετά να υπολογίσουμε με αντικατάσταση:



Σχήμα 2.4 *Εφαπτόμενη ευθεία της $y = x^2$ στο $x = 5$.*

$$f'(5) = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x - 5} = \lim_{x\to 5}(x + 5) = 10.$$

Η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας είναι $\lambda = f'(5) = 10$. Χρησιμοποιούμε τον τύπο της ευθείας σημείου-κλίσης $y - b = \lambda(x - a)$, όπου $P = (5, 25)$, $\lambda = 10$ και έχουμε

$$y - 25 = 10(x - 5) \text{ ή } y = 10x - 25.$$

Στο επόμενο παράδειγμα θα κάνουμε την παραγώγιση χρησιμοποιώντας την δεύτερη εξίσωση του ορισμού της παραγώγου.

Παράδειγμα 2.4.5 Να υπολογίσετε την $f'(3)$, όπου $f(x) = x^2 - 8x$.

Λύση. Χρησιμοποιώντας την δεύτερη εξίσωση του ορισμού της παραγώγου στο σημείο $x_0 = 3$ έχουμε:

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(3+h)^2 - 8(3+h)] - (3^2 - 8.3)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(9 + h^2 + 6h - 24 - 8h - 9 + 24)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - 2h}{h} = \lim_{h\to 0}(h - 2) = -2.$$

Επομένως $f'(3) = -2$.

Θεώρημα 2.4.6 *Η παραγωγισιμότητα συνεπάγεται τη συνέχεια* Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$, τότε η f είναι συνεχής στο $x = x_0$.

Απόδειξη. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$, τότε υπάρχει το παρακάτω όριο:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, επειδή αυτός είναι ο ορισμός της συνέχειας στο $x = x_0$.

Για να συνδέσουμε τα δύο όρια θεωρήστε την εξίσωση (ισχύει για $x \neq x_0$)

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Και οι δύο όροι στο δεξί μέλος τείνουν σε ένα όριο καθώς $x \to x_0$, επομένως:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = \lim_{x \to x_0} \left((x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right).$$

Αυτό οδηγεί στο:

$$\left(\lim_{x \to x_0} (x - x_0)\right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) = 0 \cdot f'(x_0) = 0.$$

Τέλος, από τον κανόνα του αθροίσματος για τα όρια:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) = 0 \;\text{ ή }\; \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0.\right.$$

$\square$

2.4.2 Ο συμβολισμός του Leibniz για την παράγωγο

Ο συμβολισμός του Leibniz για την παράγωγο, δηλαδή το $\frac{dy}{dx}$ αποτελεί μία από τις πιο σημαντικές και χρήσιμες σημειολογικές αναπαραστάσεις στα μαθηματικά και τη φυσική. Ο συμβολισμός αυτός εισήχθη από τον Gottfried Wilhelm Leibniz και παρέμεινε διαχρονικός χάρη στην ευελιξία και τη σαφήνεια που προσφέρει.

Ορισμός 2.4.7 Η παράγωγος σύμφωνα με τον ορισμό του Leibniz γράφεται ως

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{ή} \quad \frac{d}{dx}f(x)$$

και διαβάζεται ως «*η παράγωγος του y ως προς το x*».

Αν έχουμε τη συνάρτηση: $y = x^{-2}$ τότε η παράγωγος είναι $\dfrac{dy}{dx} = -2x^{-3}$.

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Leibniz, για συγκεκριμένη τιμή $x = x_0$ γράφουμε:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \quad \text{ή} \quad \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=x_0}.$$

Σημείωση 2.4.8 Δεν πρέπει να θεωρούμε το $\dfrac{dy}{dx}$ ως πηλίκο. Οι όροι dy και dx ονομάζονται *διαφορικά* και παίζουν σημαντικό ρόλο σε πολλές εφαρμογές, όπως τη γραμμική προσέγγιση και τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

Ο συμβολισμός του Leibniz χρησιμοποιείται ευρέως για διάφορους λόγους:

1. Υπενθυμίζει ότι η παράγωγος $\dfrac{df}{dx}$ είναι το όριο του λόγου $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.
2. Επιτρέπει τον διαχωρισμό των μεταβλητών όταν μελετάμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.
3. Θεωρείται χρήσιμος όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή αλλάζει, π.χ., αν αντί για x έχουμε t τότε γράφουμε:
$$\frac{df}{dt}.$$
4. Επιτρέπει την ευκολότερη εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας στη μελέτη παραγώγων.

Ο συμβολισμός του Leibniz λοιπόν παρέχει ένα πολύτιμο εργαλείο για την ανάλυση και τη μελέτη αλλαγών σε συναρτήσεις.

2.4.3 Η παράγωγος ως συνάρτηση

Στην προηγούμενη ενότητα υπολογίσαμε την παράγωγο $f'(x_0)$ για συγκεκριμένες τιμές του x_0. Είναι χρήσιμο επίσης να δούμε την παράγωγο ως μία συνάρτηση f', της οποίας οι τιμές $f'(x)$ ορίζονται από τον ορισμό της παραγώγου με βάση το όριο

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Αν $y = f(x)$, γράφουμε επίσης y' ή $y'(x)$ για την $f'(x)$.
Το πεδίο ορισμού της f' αποτελείται από όλες τις τιμές του x στο πεδίο ορισμού της f για τις οποίες υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Λέμε ότι η f είναι *παραγωγίσιμη* στο (a,b) αν υπάρχει η $f'(x)$ για κάθε x στο (a,b). Όταν η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε x στο διάστημα ή στα διαστήματα στα οποία ορίζεται η f, τότε λέμε απλά ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

Παράδειγμα 2.4.9 Να αποδείξετε ότι η $f(x) = x^{-2}$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογίσετε την f'.

Λύση. Το πεδίο ορισμού της $f(x) = x^{-2}$ είναι το $\{x : x \neq 0\}$, οπότε υποθέτουμε ότι $x \neq 0$. Έχουμε

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}.$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2} \right).$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{-h(2x+h)}{x^2(x+h)^2} \right) = \lim_{h\to 0} -\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2} \quad (\text{Απαλοιφή του } h)$$

$$= -\frac{2x+0}{x^2(x+0)^2} = -\frac{2x}{x^4} = -2x^{-3}.$$

Το όριο υπάρχει για κάθε $x \neq 0$, οπότε η $y = x^{-2}$ είναι παραγωγίσιμη και $y' = -2x^{-3}$.

2.5 Διαφορικό

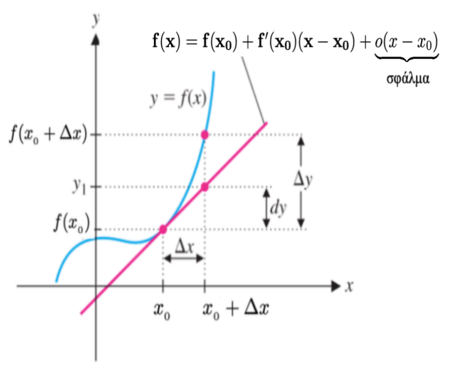
Ανάλυοντας την παράγωγο ως τοπικό μέτρο μεταβολής μιας συνάρτησης, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η παράγωγος σε ένα σημείο είναι μια τοπική ιδιότητα που εξαρτάται από τη συμπεριφορά της συνάρτησης στη γειτονιά του συγκεκριμένου σημείου. Συγκεκριμένα, η τιμή της παραγώγου στο x_0 δεν μπορεί να υπολογιστεί αν έχουμε γνώση μόνο της τιμής της συνάρτησης στο x_0 καθώς απαιτούνται πληροφορίες για τη συμπεριφορά της στη γύρω περιοχή. Αντίστροφα, η τιμή της παραγώγου στο x_0 δεν επαρκεί για να προσδιοριστεί η τιμή της συνάρτησης στο ίδιο σημείο. Μέσω της γεωμετρικής αναπαράστασης της παραγώγου ως κλίση της εφαπτομένης στο σημείο x_0, μπορούμε να κατανοήσουμε ότι αν γνωρίζουμε μόνο ένα σημείο του γραφήματος, δεν είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε την εξίσωση της εφαπτομένης. Επίσης αν γνωρίζουμε την κλίση της εφαπτομένης, αυτό από μόνο του δεν μας επιτρέπει να καθορίσουμε πού ακριβώς βρίσκεται τοποθετημένη. Παρόμοιες αρχές ισχύουν και στη Φυσική. Για παράδειγμα, η γνώση της θέσης ενός κινητού δεν είναι επαρκής για να καθορίσει την ταχύτητά του όπως και η γνώση της ταχύτητάς του δεν αρκεί για να υπολογιστεί η θέση του. Παρότι το διαφορικό συνδέεται με την παράγωγο, είναι διαφορετική έννοια. Το διαφορικό αποτελεί μια προσέγγιση της μεταβολής μιας συνάρτησης βασισμένη στην παράγωγο και χρησιμοποιείται κυρίως για τον υπολογισμό μικρών μεταβολών. Έτσι, ενώ η παράγωγος είναι ένα εργαλείο για την περιγραφή του ρυθμού μεταβολής, το διαφορικό μας παρέχει έναν πρακτικό τρόπο για την εκτίμηση μικρών αλλαγών στις τιμές μιας συνάρτησης.

Το διαφορικό λοιπόν μας εξασφαλίζει μια *μέθοδο εκτίμησης* της επίπτωσης που έχει στο y μια μεταβολή του x ίση με $dx = \Delta x$. Το Δy είναι η *ακριβής* μεταβολή του y ενώ το dy είναι η *κατά προσέγγιση* μεταβολή του y . Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5 η μεταβολή της τιμής της συνάρτησης μεταξύ των x και του x_0 δίνεται από την διαφορά $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, ενώ αν προσεγγίσουμε την συνάρτηση με την εφαπτομένη της στο x_0 , η διαφορά αυτή ισούται με $dy = f'(x_0)(x - x_0)$.

Ορισμός 2.5.1 Το διαφορικό μίας συνάρτησης στο σημείο x_0 ορίζεται από τον τύπο

$$df(x_0) = f'(x_0)\, dx.$$

Καθώς το x πλησιάζει το x_0 η προσέγγιση του γραφήματος από την εφαπτομένη στο σημείο x_0 βελτιώνεται και στο όριο, καθώς το $x \to x_0$, η προσεγγιστική σχέση



Σχήμα 2.5

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{o(x - x_0)}_{\text{σφάλμα}}$$

αντικαθίσταται από τη σχέση ορισμού του διαφορικού

$$dy = df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Δηλαδή το διαφορικό στο σημείο x_0 καθορίζει μία γραμμική σχέση μεταξύ τοπικών μεταβολών της ανεξάρτητης μεταβλητής dx και της εξαρτημένης μεταβλητής dy. Η παράγωγος της f στο x_0 αποτελεί το συντελεστή αναλογίας μεταξύ των δύο αυτών μεταβολών. Ειδικά, αν η f είναι η ταυτοτική συνάρτηση

$$f(x) = x$$

τότε

$$dy = dx.$$

Αυτό αποδεικνύεται και αναλυτικά πολύ απλά γιατί αν η f δίνεται από την $f(x) = x$ τότε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Άρα, η παράγωγος της $f(x) = x$ είναι παντού ίση με τη μονάδα.

Στον Πίνακα 2.1 που ακολουθεί παρουσιάζονται συνοπτικά οι βασικές διαφορές μεταξύ της παραγώγου και του διαφορικού προσφέροντας μια συνοπτική αλλά κατανοητή σύγκριση των δύο εννοιών.

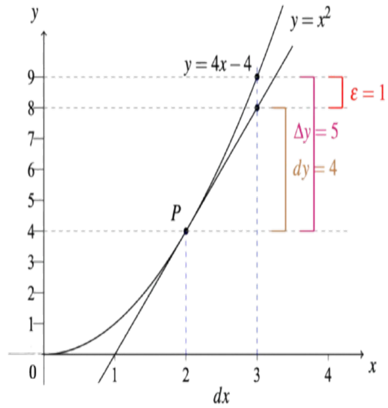
Πίνακας 2.1 Σύγκρισης παραγώγου και διαφορικού.

Χαρακτηριστικό	*Παράγωγος* ($f'(x)$)	*Διαφορικό* ($dy = f'(x)dx$)
Ορισμός	Ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης.	Προσεγγιστική μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής.
Μορφή	Ένα αριθμητικό μέγεθος (κλίση).	Μια εξίσωση που περιλαμβάνει dx.
Σχέση με τη μεταβολή	Περιγράφει την αλλαγή γενικά.	Προσεγγίζει μικρές αλλαγές (Δy).
Εφαρμογές	Γεωμετρικές/μαθηματικές αναλύσεις.	Προσεγγιστικοί υπολογισμοί σε φυσικές επιστήμες και μηχανική.

Παράδειγμα 2.5.2 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Θα δούμε τι σημαίνει η παράγωγος και τι το διαφορικό χρησιμοποιώντας το σημείο $x_0 = 2$ της συνάρτησης. Έχουμε ότι $f'(x) = 2x$ και συνεπώς η η παράγωγος στο 2 είναι $f'(2) = 4$. Δηλαδή η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό είναι ίση με 4. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο $x_0 = 2$ είναι $y - 4 = 4(x-2)$ που συνεπάγεται ότι $y = 4x - 4$. Το διαφορικό dy προσεγγίζει τη μεταβολή της συνάρτησης Δy για μια μικρή μεταβολή dx στο x. Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$, το διαφορικό είναι$dy = f'(x) \cdot dx$. Όταν $x_0 = 2$, έχουμε $f'(2) = 4$. Αν η μεταβολή στο x είναι $dx = 1$, τότε

$$dy = f'(2) \cdot dx = 4 \cdot 1 = 4.$$

Για $x_0 = 2$ και $dx = 1$ η πραγματική μεταβολή της συνάρτησης Δy υπολογίζεται ως:



Σχήμα 2.6

$$\Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0) = f(3) - f(2) = 9 - 4 = 5.$$

Παρατηρούμε ότι $dy = 4$ ενώ $\Delta y = 5$. Το διαφορικό dy είναι μια γραμμική προσέγγιση της πραγματικής μεταβολής Δy και είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για μικρές μεταβολές του dx.

Παράδειγμα 2.5.3 1) Να προσεγγίσετε με τη βοήθεια του διαφορικού την τιμή της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ στις τιμές $x_1 = 1.2$, $x_2 = 1.1$ και $x_3 = 1.01$.

Λύση. Η παράγωγος της $f(x) = x^{-3}$ είναι

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{-3}\right) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}.$$

Το διαφορικό υπολογίζεται από τη σχέση

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Για $x_0 = 1$ έχουμε

$$\Delta x_1 = 0.2, \Delta x_2 = 0.1 \text{ και } \Delta x_3 = 0.01.$$

Επομένως

$$dy_1 = f'(1) \cdot \Delta x_1 = -3 \cdot 0.2 = -0.6, \ dy_2 = f'(1) \cdot \Delta x_2 = -3 \cdot 0.1 = -0.3 \text{ και}$$

$$dy_3 = f'(1) \cdot \Delta x_3 = -3 \cdot 0.01 = -0.03.$$

Άρα

$$f(1.2) \approx f(1) + dy_1 = \frac{1}{1^3} - 0.6 = 1 - 0.6 = 0.4,$$

$$f(1.1) \approx f(1) + dy_2 = \frac{1}{1^3} - 0.3 = 1 - 0.3 = 0.7,$$

και

$$f(1.01) \approx f(1) + dy_3 = \frac{1}{1^3} - 0.03 = 1 - 0.03 = 0.97.$$

Οι ακριβείς τιμές της συνάρτησης $f(1.2)$, $f(1.1)$ και $f(1.001)$ της συνάρτησης υπολογίζονται ως εξής

$$f(1.2) = \frac{1}{(1.2)^3} \approx 0.5787,$$

$$f(1.1) = \frac{1}{(1.1)^3} \approx 0.7513,$$

και

$$f(1.01) = \frac{1}{(1.01)^3} \approx 0.9703.$$

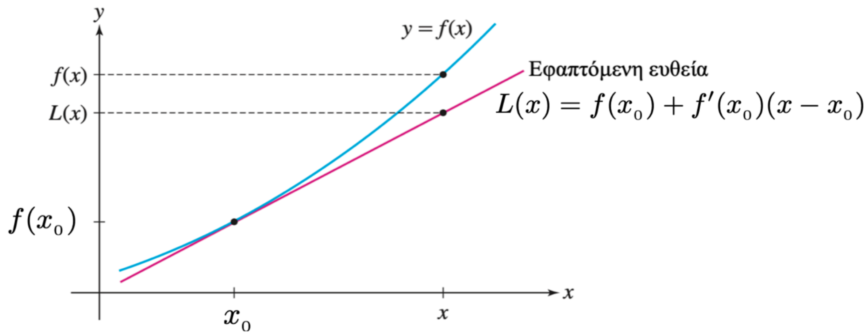
Παρατηρούμε ότι οι προσεγγίσεις μέσω του διαφορικού dy είναι κοντά στις πραγματικές τιμές, ειδικά για μικρές τιμές του Δx.

2.6 Γραμμικοποίηση συνάρτησης

Η γραμμικοποίηση μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι μια τοπική προσέγγιση της συνάρτησης με μια ευθεία στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Βασίζεται στην εξίσωση της εφαπτομένης στο x_0 και είναι έγκυρη μόνο για τιμές x κοντά στο x_0 . Όσο πιο μακριά βρίσκεται το x από το x_0 , τόσο μεγαλύτερο είναι το σφάλμα της προσέγγισης. Συγκεκριμένα, ορίζεται ως:

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Η γραμμικοποίηση χρησιμοποιείται για να προσεγγίσουμε την ίδια τη συνάρτηση $f(x)$ και όχι τη μεταβολή Δf που κάνουμε στο διαφορικό. Το $L(x)$, που έχει ως κέντρο το x_0 αποτελεί μια καλή προσέγγιση της $f(x)$ για τιμές του x κοντά στο x_0. Παρατηρήστε ότι η $y = L(x)$ είναι η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $x = x_0$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.7.



Σχήμα 2.7

2.6.1 Σχέση Γραμμικοποίησης και Διαφορικού

Παρά τις διαφορές στη χρήση η γραμμικοποίηση και το διαφορικό είναι στενά συνδεδεμένα καθώς και τα δύο βασίζονται στην παράγωγο. Εν ολίγοις το διαφορικό περιγράφει τη μικρή αλλαγή της συνάρτησης $f(x)$ ενώ η γραμμικοποίηση προσεγγίζει τη συνάρτηση με μια ευθεία κοντά σε ένα συγκεκριμένο σημείο.

Θεώρημα 2.6.1 Προσέγγιση της f από τη γραμμικοποίησή της Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και το x είναι κοντά στο x_0, τότε $f(x) \approx L(x)$, οπότε

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Στον Πίνακα 2.2 που ακολουθεί παρουσιάζονται συνοπτικά οι βασικές διαφορές μεταξύ της γραμμικοποίησης και του διαφορικού προσφέροντας μια συνοπτική αλλά κατανοητή σύγκριση των δύο εννοιών.

Πίνακας 2.2 Σύγκρισης γραμμικοποίησης και διαφορικού.

Χαρακτηριστικό	*Διαφορικό*	*Γραμμικοποίηση*
Εννοιολογικός στόχος	Προσεγγίζει την αλλαγή στη συνάρτηση f	Προσεγγίζει τη συνάρτηση f με ευθεία
Μαθηματικός τύπος	$df = f'(x)dx$	$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
Εφαρμογή	Περιγράφει τη μικρή αλλαγή της συνάρτησης	Προσεγγίζει τη συνάρτηση κοντά στο x_0
Απαιτήσεις	Μόνο η παράγωγος $f'(x)$	Παράγωγος $f'(x_0)$ και τιμή $f(x_0)$
Πλαίσιο χρήσης	Διαφορικός λογισμός.	Μοντέλα φυσικής, προσομοιώσεις, μαθηματικά μοντέλα.

Παράδειγμα 2.6.2 Βρείτε τον προσεγγιστικό τύπο για την $f(x) = \sqrt{x}e^{x-1}$ που προκύπτει από τη γραμμικοποίηση στο $x_0 = 1$.

Λύση. Η γραμμικοποίηση στο $x_0 = 1$ είναι ο προσεγγιστικός τύπος που δίνεται από

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1).$$

Σημειώστε ότι $f(1) = \sqrt{1}e^{1-1} = 1$. Οπότε, χρησιμοποιώντας τον κανόνα του γινομένου για τον υπολογισμό της παραγώγου παίρνουμε

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}e^{x-1} + x^{1/2}e^{x-1} = \left(\frac{1}{2}x^{-1/2} + x^{1/2}\right)e^{x-1}.$$

Για $x = 1$

$$f'(1) = \left(\frac{1}{2} + 1\right)e^0 = \frac{3}{2}.$$

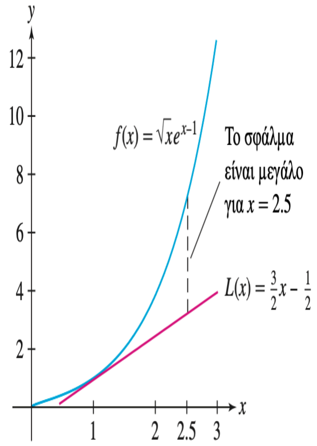
Έτσι η γραμμικοποίηση δίνει

$$f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + \frac{3}{2}(x-1) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Αυτό μας δίνει τον προσεγγιστικό τύπο που ισχύει για x κοντά στο 1

$$\sqrt{x}e^{x-1} \approx \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Στο διπλανό σχήμα συγκρίνονται οι τιμές από τη γραμμικοποίηση με τις τιμές της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}e^{x-1}$ του προηγούμενου παραδείγματος που πήραμε με μια αριθμομηχανή. Παρατηρήστε ότι το σφάλμα είναι μεγάλο για $x = 2.5$, όπως αναμενόταν, διότι το 2.5 δεν είναι κοντά στο κέντρο της γραμμικοποίησης $x_0 = 1$ (Σχήμα 2.8).



Σχήμα 2.8 *Γραφική παράσταση της* $f(x) = \sqrt{x}e^{x-1}$ *και της γραμμικοποίησής της στο* $x_0 = 1$.

2.7 Κανόνες και τύποι παραγώγισης

Η διαδικασία της παραγώγισης βασίζεται σε ορισμένους θεμελιώδεις κανόνες, οι οποίοι επιτρέπουν τον υπολογισμό παραγώγων για πιο σύνθετες συναρτήσεις. Μερικοί από τους βασικούς κανόνες είναι οι εξής:

- *Κανόνας σταθεράς:* Η παράγωγος μιας σταθερής συνάρτησης είναι μηδέν, δηλαδή

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

όπου c σταθερά.

- *Κανόνας δύναμης:* Η παράγωγος του x^n είναι

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

είναι πραγματικός αριθμός.

- *Γραμμικός συνδυασμός:* Η παράγωγος του αθροίσματος ή της διαφοράς συναρτήσεων είναι

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x).$$

- *Κανόνας γινομένου:* Η παράγωγος του γινομένου δύο συναρτήσεων είναι:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

- *Κανόνας πηλίκου:* Η παράγωγος του πηλίκου δύο συναρτήσεων είναι:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \quad g(x) \neq 0.$$

Αυτοί οι κανόνες αποτελούν τη βάση για την εύρεση παραγώγων, ενώ επεκτείνονται με τον κανόνα της αλυσίδας για σύνθετες συναρτήσεις. Με την εφαρμογή αυτών των κανόνων μπορούμε να υπολογίσουμε παραγώγους για οποιαδήποτε συνδυαστική συνάρτηση.

Παράδειγμα 2.7.1 Να βρείτε την παράγωγο της $h(x) = x^2(9x+2)$.

Λύση. Αυτή η συνάρτηση είναι ένα γινόμενο

$$h(x) = \overbrace{x^2}^{\text{Πρώτη}} \cdot \overbrace{(9x+2)}^{\text{Δεύτερη}}$$

Από τον κανόνα του γινομένου (με τον συμβολισμό του Leibniz) έχουμε

$$h'(x) = \overbrace{\frac{d}{dx}(x^2)}^{(\text{Πρώτη})'} \cdot \overbrace{(9x+2)}^{(\text{Δεύτερη})} + \overbrace{x^2}^{(\text{Πρώτη})} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(9x+2)}^{(\text{Δεύτερη})'}.$$

Επειδή

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \quad \text{και} \quad \frac{d}{dx}(9x+2) = 9 \text{ έχουμε}$$

$$h'(x) = 2x(9x+2) + 9x^2 = 18x^2 + 4x + 9x^2 = 27x^2 + 4x.$$

Παράδειγμα 2.7.2 Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Λύση. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του πηλίκου:

$$f'(x) = \frac{\overbrace{\frac{d}{dx}(x)}^{(\text{Αριθμητής})'} \cdot \overbrace{(1+x^2)}^{\text{Παρονομαστής}} - \overbrace{x}^{\text{Αριθμητής}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(1+x^2)}^{(\text{Παρονομαστής})'}}{\overbrace{(1+x^2)^2}^{\text{Παρονομαστής στο Τετράγωνο}}}.$$

Έχουμε

$$\frac{d}{dx}(x) = 1, \quad \frac{d}{dx}(1+x^2) = 2x.$$

Επομένως

$$f'(x) = \frac{(1)(1+x^2)-(x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

2.7.1 Ο κανόνας της αλυσίδας

Στον πραγματικό κόσμο οι συναρτήσεις σπάνια είναι απλές. Συνήθως αποτελούνται από πολλαπλά επίπεδα σχέσεων και εξαρτήσεων όπως συμβαίνει στη φυσική, την οικονομία ή τη βιολογία και άλλες επιστήμες. Για παράδειγμα στη φυσική μπορεί να περιγράψει πώς η θέση ενός κινούμενου αντικειμένου επηρεάζει την ενέργειά του. Στη βιολογία βοηθά στη μοντελοποίηση του ρυθμού ανάπτυξης ενός οργανισμού με βάση τις μεταβαλλόμενες περιβαλλοντικές συνθήκες. Στην οικονομία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναλυθεί πώς μια αύξηση στη ζήτηση επηρεάζει την τιμή ενός προϊόντος, λαμβάνοντας υπόψη παράγοντες όπως το κόστος παραγωγής και οι τάσεις της αγοράς. Η κατανόηση αυτών των σύνθετων σχέσεων μας επιτρέπει να μελετούμε και να προβλέπουμε πώς αλληλεπιδρούν διαφορετικά συστήματα σε πραγματικές συνθήκες. Η κατανόηση του κανόνα της αλυσίδας μας επιτρέπει να ξεδιαλύνουμε αυτές τις πολύπλοκες σχέσεις και να ανακαλύψουμε βαθύτερες γνώσεις σχετικά με το πώς αλλάζουν και αλληλεπιδρούν τα συστήματα. Η μαθηματική εργαλειοθήκη για την ανάλυση τέτοιων φαινομένων απαιτεί τον κανόνα της αλυσίδας για τον υπολογισμό της παραγώγου μιας σύνθετης συνάρτησης που διατυπώνουμε παρακάτω.

Θεώρημα 2.7.3 *Ο κανόνας της αλυσίδας* Αν η f και η g είναι παραγώγίσιμες, τότε η σύνθετη συνάρτηση

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)}.$$

Ο κανόνας της αλυσίδας λέει
$(f(g(x)))' =$
εξωτερική$'$(εσωτερική) $\cdot$
εσωτερική$'$
Με λόγια είναι «Η παράγωγος της εξωτερικής συνάρτησης στην εσωτερική συνάρτηση επί την παράγωγο της εσωτερικής συνάρτησης».

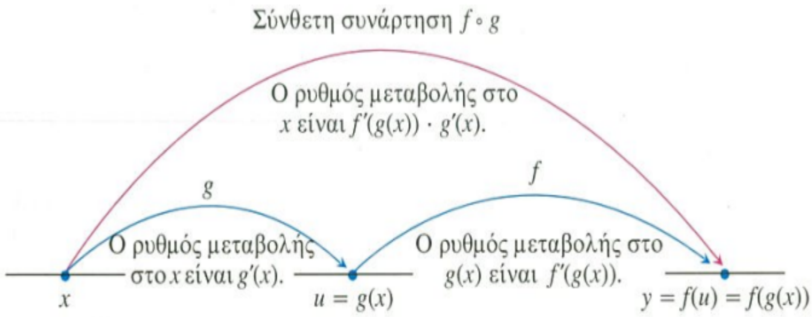
Κανόνας της Αλυσίδας με τον Τύπο του Leibniz

Η παράγωγος της σύνθεσης $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ δίνεται από τον τύπο

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

όπου

$$u = g(x).$$



Σχήμα 2.9

Παραδείγματα 2.7.4

1. Να υπολογίσετε την παράγωγο της $y = \cos(x^3)$.
2. Να υπολογιστεί η παράγωγος της $y = \sqrt{x^4+1}$.
3. Να υπολογιστεί η παράγωγος της $y = \tan(\theta + \cos\theta)$.
4. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $y = \sqrt{t^2+9}$.

Λύση.

1. Όπως σημειώσαμε παραπάνω, η $y = \cos(x^3)$ είναι η σύνθεση $f(g(x))$, όπου
$$u = g(x) = x^3, f(u) = \cos u$$
$$g'(x) = 3x^2, f'(u) = -\sin u$$
Αφού $u = x^3$ έχουμε:
$$f'(g(x)) = f'(u) = f'(x^3) = -\sin(x^3).$$
Οπότε από τον κανόνα της αλυσίδας:
$$\frac{d}{dx}\cos(x^3) = \underbrace{-\sin(x^3)}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{(3x^2)}_{g'(x)} = -3x^2\sin(x^3).$$

2. Η δοσμένη συνάρτηση είναι $y = \sqrt{x^4+1}$, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως
$$y = (x^4+1)^{\frac{1}{2}}.$$
Για να υπολογίσουμε την παράγωγο, εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας. Η εσωτερική συνάρτηση είναι $u = g(x) = x^4 + 1$ με παράγωγο:
$$g'(x) = 4x^3.$$
Η εξωτερική συνάρτηση είναι $f(u) = u^{\frac{1}{2}}$ με παράγωγο

$$f'(u) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^4+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Συνεπώς, η παράγωγος της y δίνεται από

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Αντικαθιστούμε και βρίσκουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^4+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x^3 = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}.$$

3. Η συνάρτηση $y = \tan(\theta + \cos\theta)$ είναι σύνθετη. Η εσωτερική συνάρτηση είναι $u = g(\theta) = \theta + \cos\theta$ ενώ η εξωτερική συνάρτηση είναι $f(u) = \tan u$.

   Η παράγωγος της u ως προς θ είναι

   $$u' = g'(\theta) = \frac{d}{d\theta}(\theta) + \frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = 1 - \sin\theta.$$

   και η παράγωγος της $\tan u$ είναι

   $$g'(u) = \sec^2 u$$

   Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

   $$\frac{dy}{d\theta} = f'(u) \cdot u' = \sec^2(\theta + \cos\theta) \cdot (1 - \sin\theta).$$

4. Η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως:

   $$y = (t^2+9)^{1/2}.$$

   Για τη συνάρτηση $y = f(u) = u^{1/2}$ όπου $u = g(t) = t^2 + 9$ η παράγωγος είναι

   $$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}u^{-1/2} \cdot u',$$

   όπου u' είναι η παράγωγος της εσωτερικής συνάρτησης u. Η εσωτερική συνάρτηση είναι

   $$u = t^2 + 9.$$

   Επομένως η παράγωγος ως προς t είναι:

   $$u' = g'(t) = \frac{d}{dt}(t^2+9) = 2t.$$

   Άρα

   $$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}(t^2+9)^{-1/2} \cdot 2t = \frac{t}{\sqrt{t^2+9}}.$$

2.7.2 Ο κανόνας της εκθετικής συνάρτησης

Ο κανόνας για την παράγωγο της εκθετικής συνάρτησης είναι ένας από τους σημαντικότερους και πιο χρήσιμους κανόνες στον διαφορικό λογισμό. Συγκεκριμένα, για την εκθετική συνάρτηση e^x ισχύει:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Αυτό σημαίνει ότι η παράγωγος της e^x παραμένει η ίδια με την αρχική συνάρτηση. Η ιδιότητα αυτή καθιστά τη συνάρτηση e^x μοναδική και ιδιαίτερα χρήσιμη σε εφαρμογές των μαθηματικών, της φυσικής και της μηχανικής, καθώς προκύπτει συχνά σε προβλήματα που περιλαμβάνουν ρυθμούς μεταβολής και εκθετική ανάπτυξη. Ο συγκεκριμένος κανόνας μπορεί να επεκταθεί και σε πιο σύνθετες εκθετικές συναρτήσεις, όπως αυτές της μορφής $e^{f(x)}$, όπου $f(x)$ είναι μια συνάρτηση του x. Σε αυτήν την περίπτωση, χρησιμοποιούμε τον **κανόνα της αλυσίδας** και έχουμε:

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x).$$

Παράδειγμα 2.7.5 Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = e^{\frac{1-x}{x}}.$$

Λύση. Η συνάρτηση είναι μια εκθετική σύνθεση με εκθέτη την συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1-x}{x}$. Έχουμε $g'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{d}{dx}(1) = -\dfrac{1}{x^2}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα της εκθετικής συνάρτησης $f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$ και έχουμε

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1-x}{x}}.$$

Θεώρημα 2.7.6 Γενικοί κανόνες δύναμης και εκθετικών Αν η g είναι παραγωγίσιμη, τότε

$$\frac{d}{dx}g(x)^n = n(g(x)^{n-1}g'(x) \quad \text{(για κάθε αριθμό } n\text{)}.$$

Παράδειγμα 2.7.7 Να βρείτε τις παραγώγους των

$$\text{(α) } y = (x^2+7x+2)^{-1/3}, \quad \text{(β) } y = e^{\cos t}.$$

Λύση.

$$\text{(a)} \quad \frac{d}{dx}(x^2+7x+2)^{-1/3} = -\frac{1}{3}(x^2+7x+2)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2+7x+2) =$$

$$-\frac{1}{3}(x^2+7x+2)^{-4/3}(2x+7).$$

(b) $$\frac{d}{dt}e^{\cos t} = e^{\cos t}\frac{d}{dt}(\cos t) = -(\sin t)e^{\cos t}.$$

Παράδειγμα 2.7.8 Να υπολογίσετε την $\dfrac{d}{dx}\sqrt{1+\sqrt{x^2+1}}$.

Λύση. Στον υπολογισμό που ακολουθεί εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας πρώτα στην τετραγωνική ρίζα της εσωτερικής συνάρτησης $u = 1+\sqrt{x^2+1}$ και στη συνέχεια στην παράγωγο της εσωτερικής συνάρτησης:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(1+(x^2+1)^{1/2}\right)^{1/2} &= \frac{1}{2}\left(1+(x^2+1)^{1/2}\right)^{-1/2}\frac{d}{dx}\left(1+(x^2+1)^{1/2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1+(x^2+1)^{1/2}\right)^{-1/2}\left(\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}(2x)\right)\\ &= \frac{1}{2}x(x^2+1)^{-1/2}\left(1+(x^2+1)^{1/2}\right)^{-1/2}.\end{aligned}$$

Θεώρημα 2.7.9 Παράγωγοι των συνήθων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x, \qquad \frac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x$$

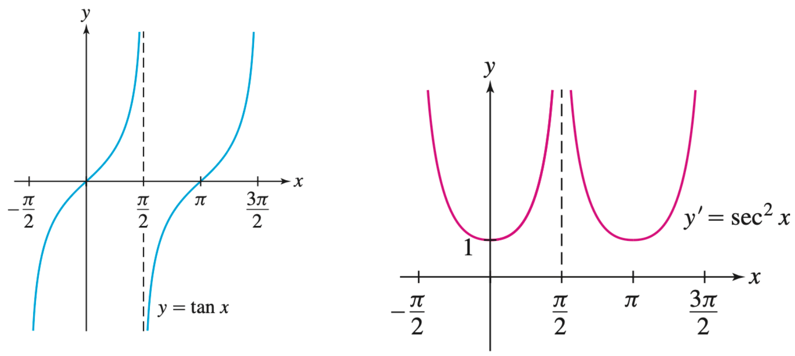
$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x, \qquad \frac{d}{dx}\csc x = \csc x\cot x$$

Παράδειγμα 2.7.10 Να εξάγετε τον τύπο $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$ (Σχήμα 2.10).

Λύση. Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του πηλίκου και την ταυτότητα $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\cdot(\sin x)' - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} == \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$



Σχήμα 2.10

Θεώρημα 2.7.11 Έστω f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα I και γνησίως μονότονη. Αν $f^{-1}(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε y του $f(I)$ και $f'(x) \neq 0$, τότε:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad x \in f(I).$$

Λύση. Ξεκινάμε από τη βασική σχέση

$$y = f(x) \quad \text{και} \quad f^{-1}(y) = x$$

Παραγωγίζουμε και τις δύο πλευρές της εξίσωσης $f(f^{-1}(y)) = y$ ως προς y:

$$\frac{d}{dy} f\left(f^{-1}(y)\right) = \frac{d}{dy} y$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας στην αριστερή πλευρά:

$$f'\left(f^{-1}(y)\right) \cdot \frac{d}{dy} f^{-1}(y) = 1$$

Λύνοντας ως προς $\frac{d}{dy} f^{-1}(y)$ έχουμε

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} \;\text{ ή }\; \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x))}.$$

Θεώρημα 2.7.12 Παράγωγοι των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}\cos^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x) = \frac{1}{x^2+1}, \qquad \frac{d}{dx}\cot^{-1}(x) = -\frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \qquad \frac{d}{dx}\csc^{-1}(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Παράδειγμα 2.7.13 Να υπολογίσετε την $\left.\frac{d}{dx}\csc^{-1}(e^x+1)\right|_{x=0}$.

Λύση. Θέτουμε $e^x+1=u$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$\frac{d}{du}\csc^{-1}u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \,.\, u' =$$

$$= -\frac{1}{|e^x+1|\sqrt{(e^x+1)^2-1}} \cdot \frac{d}{dx}(e^x+1)$$

$$= -\frac{e^x}{(e^x+1)\sqrt{e^{2x}+2e^x}}.$$

Αντικαθιστούμε την $|e^x+1|$ με e^x+1 επειδή είναι θετική ποσότητα και έχουμε

$$\left.\frac{d}{dx}\csc^{-1}(e^x+1)\right|_{x=0} = -\frac{e^0}{(e^0+1)\sqrt{e^0+2e^0}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Θεώρημα 2.7.14 Παράγωγος του φυσικού λογάριθμου

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \quad \text{για } x>0.$$

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Παράδειγμα 2.7.15 Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων
(a) $y=\ln(x^3+1)$ και (b) $y=\ln(\sqrt{\sin x})$.

Λύση.

$$\text{(a)}\ \frac{d}{dx}\ln(x^3+1) = \frac{(x^3+1)'}{x^3+1} = \frac{3x^2}{x^3+1}.$$

$$\text{(b)}\ \frac{d}{dx}\ln(\sqrt{\sin x}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(\sin x) = \frac{1}{2}\frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{2}\cot x.$$

Θεώρημα 2.7.16 Παράγωγος της $f(x) = b^x$ και της $f(x) = \log_b x$

$$\frac{d}{dx}b^x = (\ln b)b^x, \qquad \frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{x\ln b}$$

$$\frac{d}{dx}b^{f(x)} = (\ln b)b^{f(x)}f'(x), \qquad \frac{d}{dx}\log_b f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)\ln b}.$$

Παράδειγμα 2.7.17 Να παραγωγίσετε τις συναρτήσεις:

(a) $f(x) = 4^{3x}$ και (b) $f(x) = \log_2(x^2+1)$.

Λύση.

$$\text{a)}\ \frac{d}{dx}4^{3x} = \left(\frac{d}{dx}4^{3x}\right)(3x)' = 3(\ln 4)4^{3x}.$$

$$\text{b)}\ \frac{d}{dx}\log_2(x^2+1) = \frac{1}{\ln 2(x^2+1)}(x^2+1)' = \frac{2x}{(x^2+1)\ln 2}.$$

Θεώρημα 2.7.18 Παράγωγοι υπερβολικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \qquad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x,$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = -\sinh x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x,$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x, \qquad \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x, \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x\tanh x, \qquad \frac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x\coth x, \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x\cot x.$$

Υπενθύμιση

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Παράδειγμα 2.7.19 Να επιβεβαιώσετε ότι
$$\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x.$$

Λύση. Από τον κανόνα του πηλίκου και την ταυτότητα $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ έχουμε
$$\frac{d}{dx}\coth x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right) = \frac{(\sinh x)(\cosh x)' - (\cosh x)(\sinh x)'}{\sinh^2 x}.$$
$$= \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{csch}^2 x.$$

Παράδειγμα 2.7.20 Να υπολογίσετε τις παραγώγους: (a) $\frac{d}{dx}\cosh(3x^2+1)$, (b) $\frac{d}{dx}(\sinh x \tan x)$.

Λύση. (a) Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε,
$$\frac{d}{dx}\cosh(3x^2+1) = -6x\sinh(3x^2+1).$$

(b) Από τον κανόνα του γινομένου έχουμε,
$$\frac{d}{dx}(\sinh x \tan x) = (\sinh x)' \tan x + (\tan x)' \sinh x,$$
$$= \cosh x \tan x + \sec^2 x \sinh x = \sinh x \sec^2 x + \cosh x \tan x.$$

2.8 Λογαριθμική παραγώγιση

Η λογαριθμική παραγώγιση μετατρέπει σε σχετικά πιο εύκολη διαδικασία την παραγώγιση μιας έκφρασης που θα ήταν πιο επίπονο να πραγματοποιηθεί με πολλαπλή εφαρμογή των κανόνων γινομένου και πηλίκου. Στη λογαριθμική παραγώγιση παραγωγίζουμε καταρχήν την $\ln(f(x))$ παρά την ίδια την $f(x)$. Κατόπιν χρησιμοποιούμε την εξίσωση $\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Το επόμενο παράδειγμα επιδεικνύει την *λογαριθμική παραγώγιση*.

Παράδειγμα 2.8.1 Να εφαρμόσετε λογαριθμική παραγώγιση για τη συνάρτηση
$$y = x^3 \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{e^x}{\sin x}.$$

Εφαρμόζουμε λογαριθμική παραγώγιση. Πρώτα παίρνουμε τον φυσικό λογάριθμο
$$\ln f(x) = \ln(x^3) + \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + \ln(e^x) - \ln(\sin x).$$
και απλοποιούμε σε
$$\ln f(x) = 3\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + x - \ln(\sin x).$$

Κατόπιν παραγωγίζουμε ως προς x, δηλαδή,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \cot x.$$

Συνεπώς

$$f'(x) = f(x)\left(\frac{3}{x} + \frac{x}{x^2+1} + 1 - \cot x\right) \text{ όπου } f(x) = x^3\sqrt{x^2+1}\frac{e^x}{\sin x}.$$

Ασκήσεις 2.8.2 Να υπολογίσετε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων.

1. (a) $f(x) = (x^3+5)(x^3+x+1)$
   (b) $f(x) = (4e^x - x^2)(x^3+1)$,
   (c) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=3}$, $\quad y = \dfrac{1}{x+10}$
   (d) $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=-2}$, $\quad z = \dfrac{x}{3x^2+1}$
   (e) $f(x) = (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$
   (f) $f(x) = \dfrac{9x^{5/2}-2}{x}$
   (g) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2}$, $\quad y = \dfrac{x^4-4}{x^2-5}$
   (h) $f(x) = \dfrac{x^4+e^x}{x+1}$
   (i) $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$
   (j) $f(x) = \dfrac{3x^3-x^2+2}{\sqrt{x}}$
   (k) $h(t) = \dfrac{t}{(t+1)(t^2+1)}$
   (l) $f(x) = x^{3/2}(2x^4-3x+x^{-1/2})$
   (m) $f(x) = x^2e^2$
   (n) $h(x) = \pi^2(x-1)$
   (o) $f(x) = (x+3)(x-1)(x-5)$
   (p) $f(x) = e^x(x^2+1)(x+4)$
   (q) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$
   (r) $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$

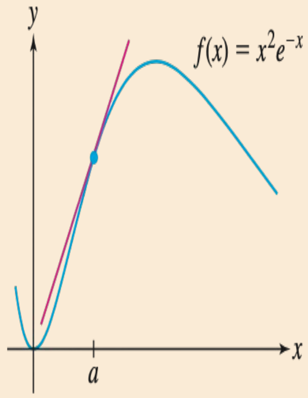
2. Έστω $f(x) = (x+\sin x)^{-1}$. Να υπολογίσετε την $f'(x)$ ανεξάρτητα χρησιμοποιώντας τον κανόνα του πηλίκου και τον κανόνα της αλυσίδας. Δείξτε ότι τα αποτελέσματα συμπίπτουν.

3. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $f(u) = u^q$ και $g(x) = x^{p/q}$. Υποθέστε ότι η g είναι παραγωγίσιμη.
   (α) Δείξτε ότι $f(g(x)) = x^p$ (θυμηθείτε τους κανόνες των εκθετών).
   (β) Εφαρμόστε τον κανόνα της αλυσίδας και τον κανόνα της δύναμης για εκθέτες που είναι φυσικοί αριθμοί προκειμένου να δείξετε ότι
   $$f'(g(x))g'(x) = px^{p-1}.$$

4. Να βρείτε το $a > 0$ έτσι ώστε η εφαπτόμενη ευθεία στη γραφική παράσταση της

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

στο $x = a$ να περνά από την αρχή των αξόνων (Σχήμα 2.11).



Σχήμα 2.11

5. Να χρησιμοποιήσετε τον κανόνα του γινομένου για να δείξετε ότι

$$\left(f^2\right)' = 2ff'.$$

6. Να δείξετε ότι

$$\left(f^3\right)' = 3f^2 f'.$$

7. Να χρησιμοποιήσετε τον κανόνα της αλυσίδας για να υπολογίσετε τις παραγώγους:

(a) $y = \sin(x^2)$

(b) $y = \sin^2 x$

(c) $y = \sqrt{t^2+9}$

(d) $y = (t^2+3t+1)^{-5/2}$

(e) $y = (x^4-x^3-1)^{2/3}$

(f) $y = (\sqrt{x+1}-1)^{3/2}$

(g) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4$

(h) $y = \cos^3(12\theta)$

(i) $y = \sec\frac{1}{x}$

(j) $y = \tan(\theta^2 - 4\theta)$

(k) $y = \tan(\theta + \cos\theta)$

(l) $y = e^{2x^2}$

(m) $y = e^{2-9t^2}$

(n) $y = \cos^3(e^{4\theta})$.

8. Στις παρακάτω συναρτήσεις να υπολογίσετε την παράγωγο.

(a) $y = \sin^{-1}(7x)$

(b) $y = \arctan\left(\frac{x}{3}\right)$

(c) $y = \cos^{-1}(x^2)$

(d) $y = \sec^{-1}(t+1)$

(e) $y = x\tan^{-1} x$

(f) $y = e^{\cos^{-1} x}$

(g) $y = \arcsin(e^x)$

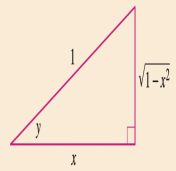
(h) $y = \csc^{-1}(x^{-1})$

(i) $y = \sqrt{1-t^2} + \sin^{-1} t$

(j) $y = \tan^{-1}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$.

9. Να χρησιμοποιήσετε το Σχήμα 2.12 για να αποδείξετε ότι

$$\left(\cos^{-1} x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



Σχήμα 2.12 *Ορθογώνιο τρίγωνο με $y = \cos^{-1} x$*

10. Να υπολογίσετε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

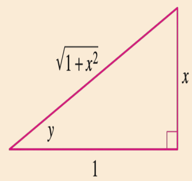
(a)

(1) $f(x) = \log_2 x$ (2) $f(x) = \log_5 x$

(3) $\dfrac{d}{dt}\log_3(\sin t)$ (4) $\dfrac{d}{dt}\log_{10}(t+2^t)$

(5) $f(t) = t\ln t - t$ (6) $f(x) = \ln(x^5)$

(7) $f(t) = \ln(t\,5^t)$ (8) $f(x) = x^2 \ln x$



Σχήμα 2.13 *Ορθογώνιο τρίγωνο με $y = \tan^{-1} x$*

11. Δείξτε ότι $\left(\tan^{-1} x\right)' = \cos^2\left(\tan^{-1} x\right)$ και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε το Σχήμα 2.13 για να αποδείξετε ότι

$$\left(\tan^{-1} x\right)' = \left(x^2+1\right)^{-1}.$$

12. Να υπολογίσετε την παράγωγο στις παρακάτω συναρτήσεις:

(1) $f(x) = \sinh(9x)$ (2) $f(x) = \sinh(x^2)$

(3) $f(t) = \cosh^2(9-3t)$ (4) $f(t) = \tanh(t^2+1)$

(5) $f(x) = \sqrt{\cosh x + 1}$ (6) $f(x) = \sinh x \tanh x$

13. Στις παρακάτω συναρτήσεις να υπολογίσετε την $\dfrac{dy}{dx}$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό με βάση το όριο.

$$(1)\ f(x) = 4 - x^2 \qquad (2)\ f(x) = \sqrt{2x+1}$$

$$(3)\ f(x) = \frac{1}{2-x} \qquad (4)\ f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

14. Στις παρακάτω συναρτήσεις να εκφράσετε το όριο ως μια παράγωγο.

(a)

$$(1)\ \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \qquad (2)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3+1}{x+1}$$

$$(3)\ \lim_{t\to \pi} \frac{\sin t \cos t}{t-\pi} \qquad (4)\ \lim_{\theta\to \pi} \frac{\cos\theta - \sin\theta + 1}{\theta - \pi}$$

15. Να βρείτε την παράγωγο χρησιμοποιώντας λογαριθμική παραγώγιση. allowdisplaybreaks

(a)

$$(1)\ f(x) = (x-1)(x-12)(x+7) \qquad (2)\ f(x) = \frac{x(x+1)^3}{(3x-1)^2}$$

$$(3)\ f(x) = \frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x+1}} \qquad (4)\ f(x) = (2x+1)(4x^2)\sqrt{x-9}$$

$$(5)\ f(x) = \sqrt{\frac{x(x+2)}{(2x+1)(3x+2)}} \qquad (6)\ f(x) = (x^3+1)(x^4+2)(x^5+3)^2$$

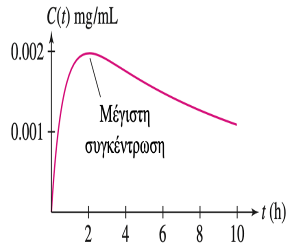
16. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 4$ όπου η εφαπτόμενη ευθεία έχει κλίση 10.

17. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ όπου η εφαπτόμενη ευθεία έχει κλίση 1.

18. Να βρείτε το x_0 έτσι ώστε οι εφαπτόμενες ευθείες στην $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ στα $x = x_0$ και $x = x_0 + 1$ να είναι παράλληλες.

2.9 Ακρότατες τιμές

Σε πολλές εφαρμογές, είναι σημαντικό να εντοπίσουμε τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή μιας συνάρτησης. Για παράδειγμα, ένας γιατρός μπορεί να χρειάζεται να υπολογίσει τη μέγιστη συγκέντρωση ενός φαρμάκου στο αίμα ενός ασθενούς μετά τη χορήγησή του. Αυτό αντιστοιχεί στο να βρούμε το σημείο στη γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τη μέγιστη συγκέντρωση του φαρμάκου σε σχέση με το χρόνο (Σχήμα 2.14). Οι μέγιστες (max) και ελάχιστες (min) τιμές μιας συνάρτησης ονομάζονται *ακρότατα* και η διαδικασία εύρεσής τους αποκαλείται *βελτιστοποίηση*. Συχνά μας ενδιαφέρει να βρούμε το ελάχιστο ή το μέγιστο της συνάρτησης σε ένα συγκεκρι- μένο διάστημα αντί να εξετάσουμε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της.



Σχήμα 2.14 *Συγκέντρωση φαρμάκου στο αίμα*

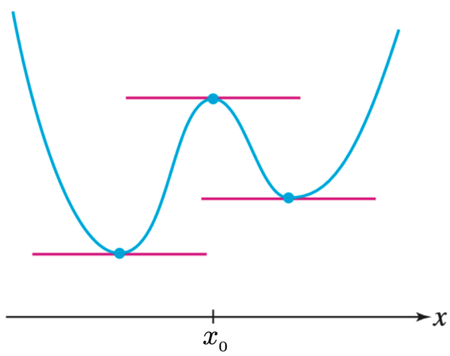
Θεώρημα 2.9.1 Ακρότατες τιμές σε ένα διάστημα Έστω f μια συνάρτηση σε ένα διάστημα I και έστω $x_0 \in I$. Λέμε ότι το $f(x_0)$ είναι

- *Ολικό ελάχιστο* της f στο I αν $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in I$.
- *Ολικό μέγιστο* της f στο I αν $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε $x \in I$.

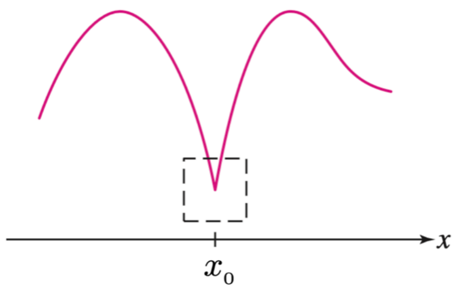
Θεώρημα 2.9.2 Υπαρξη ακροτάτων σε ένα κλειστό διάστημα Μια συνεχής συνάρτηση f σε ένα κλειστό (φραγμένο) διάστημα $I = [a, b]$ παίρνει και ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο I.

Θεώρημα 2.9.3 Τοπικά ακρότατα Λέμε ότι το $f(x_0)$ είναι ένα:

- *Τοπικό ελάχιστο* που παρατηρείται στο $x = x_0$ αν το $f(x_0)$ είναι η ελάχιστη τιμή της f σε κάποιο ανοικτό διάστημα (στο πεδίο ορισμού της f) που περιέχει το x_0.
- *Τοπικό μέγιστο* που παρατηρείται στο $x = x_0$ αν το $f(x_0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f σε κάποιο ανοικτό διάστημα (στο πεδίο ορισμού της f) που περιέχει το x_0.



(a) *Η εφαπτόμενη ευθεία είναι οριζόντια στα τοπικά ακρότατα*



(b) *Αυτό το τοπικό ελάχιστο παρατηρείται σε ένα σημείο όπου η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη*

Σχήμα 2.15

Πώς βρίσκουμε τα τοπικά ακρότατα; Η κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι η εφαπτόμενη ευθεία σε ένα τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο είναι οριζόντια (Σχήμα 2.15a). Με άλλα λόγια, αν το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο, τότε $f'(x_0) = 0$.

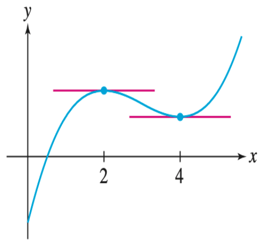
Όμως, αυτό προϋποθέτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Διαφορετικά, η εφαπτόμενη ευθεία μπορεί να μην υπάρχει, όπως στο Σχήμα 2.15b. Για να λάβουμε υπόψη και τις δύο δυνατότητες, ορίζουμε την έννοια του κρίσιμου σημείου.

Σχήμα 2.16 *Στην περιοχή που περιβάλλει το Denali στην Αλάσκα υπάρχουν πολλά τοπικά μέγιστα αλλά υπάρχει ένα ολικό μέγιστο, η κορυφή του Denali.*

Θεώρημα 2.9.4 Κρίσιμα σημεία Ένας αριθμός x_0 στο πεδίο ορισμού της f ονομάζεται *κρίσιμο σημείο* αν $f'(x_0) = 0$ ή $f'(x_0)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 2.9.5 Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$.

Λύση. Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη (Σχήμα 2.17. Επομένως, τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις της $f'(x) = 0$:



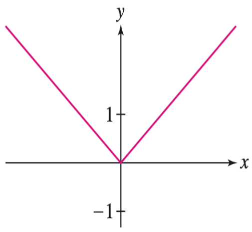
Σχήμα 2.17 *Γραφική παράσταση της* $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$.

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8) = 3(x-2)(x-4).$$

Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία λύνουμε την $3(x-2)(x-4) = 0$ και συνεπώς έχουμε $x = 2$ και $x = 4$.

Παράδειγμα 2.9.6 Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = |x|$.

Λύση. Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 2.18, $f'(x) = -1$ για $x < 0$ και $f'(x) = 1$ για $x > 0$. Επομένως η $f'(x) = 0$ δεν έχει λύσεις για $x \neq 0$.



Σχήμα 2.18 *Γραφική παράσταση της* $f(x) = |x|$.

Όμως η $f'(0)$ δεν υπάρχει. Έτσι το $x_0 = 0$ είναι ένα κρίσιμο σημείο.
Το επόμενο θεώρημα αναφέρει ότι μπορούμε να βρούμε τοπικά ακρότατα λύνοντας ως προς τα κρίσιμα σημεία. Είναι ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα στον Λογισμό.

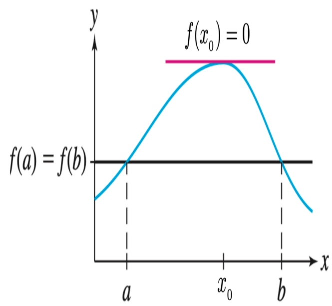
Θεώρημα 2.9.7 Θεώρημα του Fermat για τοπικά ακρότατα Αν το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο, τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f.

2.10 Το θεώρημα Rolle

Το θεώρημα του Rolle που ακολουθεί αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη αποτελέσματα του Διαφορικού Λογισμού, καθώς συνδέει τη συμπεριφορά μιας συνεχούς και παραγωγίσιμης συνάρτησης με την ύπαρξη στάσιμων σημείων στο εσωτερικό του διαστήματος ορισμού της.

Θεώρημα 2.10.1 Θεώρημα Rolle Υποθέστε ότι η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει ένας αριθμός x_0 μεταξύ των a και b τέτοιος ώστε $f'(x_0) = 0$.

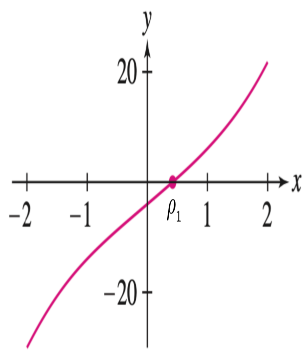
Αν η f είναι παραγώγιμη και παίρνει την ίδια τιμή σε δύο διαφορετικά σημεία a και b ($f(a) = f(b)$), τότε υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ όπου η παράγωγος είναι μηδέν. Γραφικά, αν η ευθεία που διέρχεται απο τα σημεία $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ είναι οριζόντια, τότε η εφοπτόμενη σε κάποιο x_0 με $a < x_0 < b$ είναι επίσης οριζόντια (Σχήμα 2.19).



Σχήμα 2.19 *Το θεώρημα Rolle: Αν $f(a) = f(b)$, τότε $f'(x_0) = 0$ για κάποιο x_0 μεταξύ των a και b.*

Παράδειγμα 2.10.2 Να δείξετε ότι η $f(x) = x^3 + 9x - 4$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Λύση. Αρχικά παρατηρούμε ότι το $f(0) = -4$ είναι αρνητικό και το $f(1) = 6$ είναι θετικό. Από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα ρ_1 στο $[0,1]$. Αν η f είχε και δεύτερη ρίζα ρ_2, τότε θα είχαμε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, θα πρέπει τότε να ισχύει $f'(x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in (\rho_1, \rho_2)$.



Σχήμα 2.20 *Το θεώρημα Rolle: Αν $f(a) = f(b)$, τότε $f'(x_0) = 0$ για κάποιο x_0 μεταξύ των a και b.*

Αυτό δεν είναι δυνατόν διότι $f'(x) = 3x^2 + 9 > 0$, οπότε η $f'(x) = 0$ δεν έχει λύσεις. Συμπεραίνουμε ότι το ρ_1 είναι η μοναδική πραγματική ρίζα της f (Σχήμα 2.20).

2.10.1 Ιστορικό Σχόλιο

Κάποια στιγμή τη δεκαετία του 1630 τη δεκαετία που γεννήθηκε ο Ισαάκ Νεύτων ο Γάλλος μαθηματικός Pierre de Fermat επινόησε μια γενική μέθοδο εύρεσης ακρότατων τιμών. Ο Fermat υποστήριξε επί της ουσίας ότι αν θέλεις να βρεις ακρότατα πρέπει να θέσεις την παράγωγο ίση με μηδέν. Επίσης περιέγραψε μια γενική μέθοδο εύρεσης των εφαπτόμενων ευθειών η οποία δεν είναι ουσιαστικά διαφορετική από τη σημερινή μέθοδο των παραγώγων. Για τον λόγο αυτό ο Fermat θεωρείται συχνά εφευρέτης του Λογισμού μαζί με τον Νεύτωνα και τον Leibniz. Περίπου την ίδια περίοδο ο René Descartes (Καρτέσιος, 1596–1650) ανέπτυξε μια διαφορετική αλλά λιγότερο αποτελεσματική μέθοδο εύρεσης εφαπτόμενων ευθειών. Ο Descartes από τον οποίον ονομάστηκαν οι καρτεσιανές συντεταγμένες ήταν ένας εμβριθής στοχαστής — ο κυρίαρχος φιλόσοφος και επιστήμονας της εποχής του στην Ευρώπη. Θεωρείται σήμερα ως ο πατέρας της σύγχρονης φιλοσοφίας και ο ιδρυτής (μαζί με τον Fermat) της αναλυτικής γεωμετρίας. Ξέσπασε μια διαμάχη όταν ο Descartes έμαθε από άλλους ότι ο Fermat είχε κάνει κρίσιμα σφάλματα για την οπτική. Ευσίασθητος και πεισματάρης ο Descartes αντέδρασε ασκώντας επίθεση στη μέθοδο του Fermat για την εύρεση εφαπτόμενων και μόνο μέσω διαμεσολάβησης από τρίτους παραδέχθηκε ότι ο Fermat ήταν σωστός. Έγραψε:

> *...Βλέποντας την τελευταία μέθοδο που χρησιμοποιείτε για την εύρεση εφαπτομένων σε καμπύλες γραμμές, δεν μπορώ να απαντήσω με άλλον τρόπο παρά να πω ότι είναι πολύ καλή και αν την είχατε εξηγήσει με αυτόν τον τρόπο εξ αρχής, δεν θα είχα αντιπαρατεθεί καθόλου.*

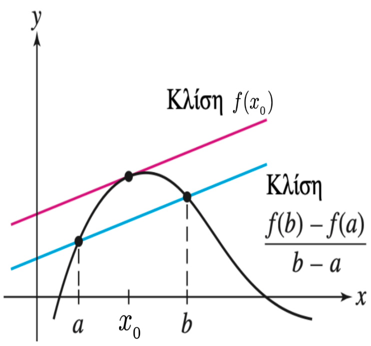
Όμως, σε επόμενη ιδιωτική αλληλογραφία ο Descartes ήταν λιγότερο γενναιόδωρος, αναφερόμενος σε κάποιο σημείο σε εργασία του Fermat ως *«le galimatias le plus ridicule»*, που σημαίνει «οι πιο γελοίες ασυναρτησίες». Σήμερα, ο Fermat αναγνωρίζεται ως ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς της εποχής του, ο οποίος είχε σπουδαία συνεισφορά σε αρκετές περιοχές των μαθηματικών.

2.11 Το θεώρημα μέσης τιμής και η μονοτονία

Έχουμε πάρει ως δεδομένο ότι αν η $f'(x)$ είναι θετική η συνάρτηση f είναι αύξουσα και αν η $f'(x)$ είναι αρνητική η f είναι φθίνουσα. Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε αυτή την υπόθεση αυστηρά χρησιμοποιώντας ένα σημαντικό αποτέλεσμα που ονομάζεται θεώρημα μέσης τιμής (ΘΜΤ). Στη συνέχεια, αναπτύσσουμε μια μέθοδο για να «ελέγξουμε» τα κρίσιμα σημεία, δηλαδή για να προσδιορίσουμε αν αντιστοιχούν σε τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα ή τίποτα από τα δύο.

Σύμφωνα με το ΘΜΤ μία τέμνουσα ευθεία μεταξύ δύο σημείων $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ σε μια γραφική παράσταση είναι παράλληλη σε τουλάχιστον μία εφαπτόμενη ευθεία στο διάστημα (a,b) (Σχήμα 2.21). Αφού η τέμνουσα ευθεία μεταξύ του $(a, f(a))$ και του $(b, f(b))$ έχει κλίση

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Σχήμα 2.21 *Από το ΘΜΤ υπάρχει τουλάχιστον μία εφαπτόμενη ευθεία παράλληλη στην τέμνουσα.*

και αφού δύο ευθείες είναι παράλληλες αν έχουν την ίδια κλίση το ΘΜΤ ισχυρίζεται ότι υπάρχει ένα σημείο x_0 μεταξύ του a και του b τέτοιο ώστε

$$\underbrace{f'(x_0)}_{\text{Κλίση εφαπτόμενης ευθείας}} = \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{Κλίση τέμνουσας ευθείας}}$$

Θεώρημα 2.11.1 Θεώρημα μέσης τιμής Υποθέστε ότι η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή x_0 στο (a,b) τέτοια ώστε

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Παράδειγμα 2.11.2 Να επιβεβαιώσετε το ΘΜΤ για την $f(x) = \sqrt{x}$, με $a = 1$ και $b = 9$.

Λύση. Αρχικά υπολογίζουμε την κλίση της τέμνουσας ευθείας (Σχήμα 2.22):

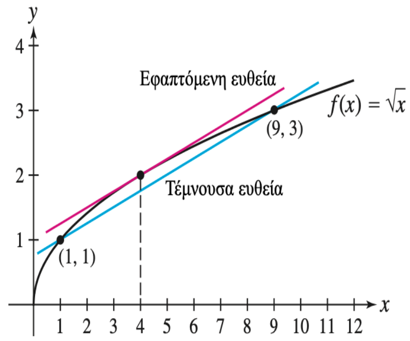
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{1}}{9-1} = \frac{3-1}{9-1} = \frac{1}{4}$$

Πρέπει να βρούμε το x_0 έτσι ώστε $f'(x_0) = \frac{1}{4}$. Η παράγωγος είναι

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

και

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{4} \implies 2\sqrt{x_0} = 4 \implies \sqrt{x_0} = 2 \implies x_0 = 4.$$



Σχήμα 2.22 *Η εφαπτόμενη ευθεία στο $x_0 = 4$ είναι παράλληλη στην τέμνουσα ευθεία.*

Η τιμή $x_0 = 4$ βρίσκεται στο $(1,9)$ και ικανοποιεί την $f'(4) = \frac{1}{4}$ που επιβεβαιώνει το ΘΜΤ.

Λυμένη άσκηση 2.11.3 Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει η ανίσωση:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Λύση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$. Στο διάστημα $[0,x]$ το Θεώρημα Μέσης Τιμής εγγυάται ότι υπάρχει κάποιο $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Δεδομένου ότι $f(0) = \ln(1) = 0$ προκύπτει ότι

$$\frac{\ln(1+x)-0}{x} = f'(\xi).$$

Η παράγωγος της $f(x)$ είναι

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Άρα:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+\xi}.$$

και επομένως:

$$\ln(1+x) = x \cdot \frac{1}{1+\xi}.$$

Γνωρίζουμε ότι $\xi \in (0,x)$, οπότε έχουμε:

$$1+x > 1+\xi > 1.$$

Αντιστρέφοντας τους όρους έχουμε

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+\xi} < 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας με x, λαμβάνουμε

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x$$

το οποίο συνεπάγεται

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Λυμένη άσκηση 2.11.4 Να βρεθούν οι τιμές των $a,b \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x + b\cos x + x, & x < \dfrac{\pi}{2} \\ x^2 + ax + b, & x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x = \dfrac{\pi}{2}$.

*Λύση.*Για να είναι η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $x = \dfrac{\pi}{2}$, πρέπει να είναι συνεχής και να έχει ίσες πλευρικές παραγώγους στο σημείο αυτό. Για να είναι η f συνεχής στο $x = \dfrac{\pi}{2}$ θα πρέπει

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Υπολογίζουμε το αριστερό όριο

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = a\sin\frac{\pi}{2} + b\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = a + \frac{\pi}{2}.$$

Υπολογίζουμε το δεξί όριο:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + a\frac{\pi}{2} + b.$$

Θέτοντας $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)$, έχουμε

$$a + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} + a\frac{\pi}{2} + b.$$

'Εχουμε ότι

$$f'(x) = \begin{cases} a\cos x - b\sin x + 1, & x < \frac{\pi}{2} \\ 2x + a, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Υπολογίζουμε την αριστερή και δεξιά παράγωγο

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f'(x) = a\cos\frac{\pi}{2} - b\sin\frac{\pi}{2} + 1 = -b + 1 \text{ και } \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f'(x) = 2\frac{\pi}{2} + a = \pi + a.$$

Θέτοντας $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f'(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f'(x)$ παίρνουμε $-b + 1 = \pi + a$.

Λύνουμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{cases} a + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} + a\frac{\pi}{2} + b \\ \\ -b + 1 = \pi + a \end{cases}$$

βρίσκουμε τις επιθυμητές τιμές.

Λυμένες ασκήσεις 2.11.5 Να υπολογισθεί η πρώτη παράγωγο των κάτωθι συναρτήσεων:

1. $h(x) = \sin(x^2)$
2. $h(t) = \sqrt{t^2 + 9}$
3. $h(x) = (x^4 - x^3 - 1)^{2/3}$
4. $h(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^4$
5. $h(x) = \sqrt{9 + x + \sin x}$

6. $h(x) = e^{8x+9}$

Λυμένη άσκηση 2.11.6 Να βρείτε τις συναρτήσεις $(f \circ g)(x)$ και $(g \circ f)(x)$ όταν

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ και $g(x) = x^{-2}$

2. $f(x) = \sqrt{x+1}$ και $g(x) = \ln x - 1$

3. $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x) = e^x + 1$

Θεώρημα 2.11.7 Το πρόσημο της παραγώγου Έστω f μια παραγώγισημη συνάρτηση σε ένα ανοιχτό διάστημα (a,b).
- Αν $f'(x) > 0$ για $x \in (a,b)$ τότε η f είναι αύξουσα στο (a,b).
- Αν $f'(x) < 0$ για $x \in (a,b)$ τότε η f είναι φθίνουσα στο (a,b).

Λύση. Υποθέτουμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Το ΘΜΤ αναφέρει ότι για οποιαδήποτε δύο σημεία $x_1 < x_2$ στο (a,b) υπάρχει x_0 μεταξύ των x_1 και x_2 τέτοιο ώστε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) > 0$$

Η ανισότητα ισχύει επειδή το $f'(x_0)$ και το $(x_2 - x_1)$ είναι και τα δύο θετικά. Επομένως, $f(x_2) > f(x_1)$ όπως απαιτούνταν. Η περίπτωση $f'(x) < 0$ είναι όμοια.

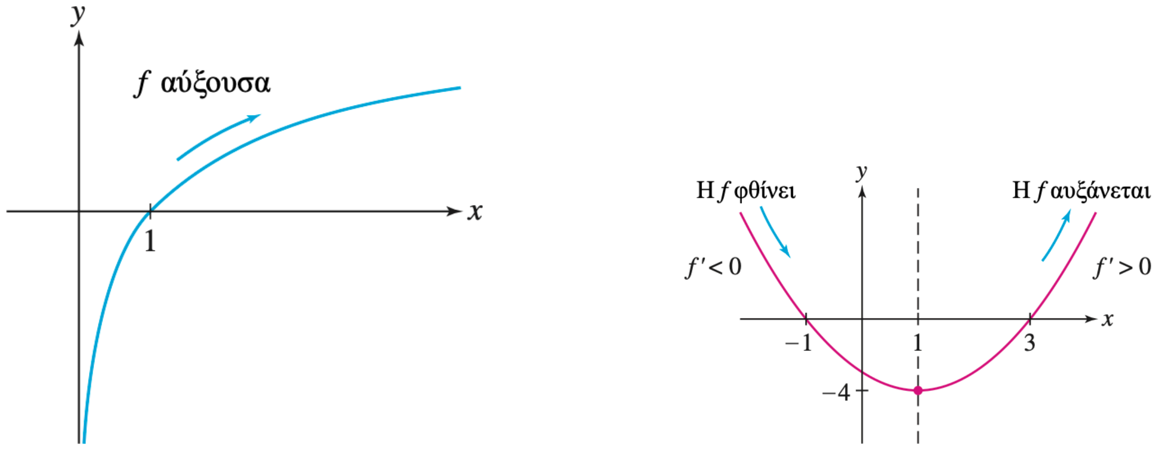
(a) *Αύξουσα συνάρτηση: Οι εφαπτόμενες ευθείες έχουν θετική κλίση*

(b) *Φθίνουσα συνάρτηση: Οι εφαπτόμενες ευθείες έχουν αρνητική κλίση*

Σχήμα 2.23

Παράδειγμα 2.11.8 Να δείξετε ότι η $f(x) = \ln x$ είναι αύξουσα.

Λύση. Η παράγωγος $f'(x) = x^{-1}$ είναι θετική στο πεδίο ορισμού $\{x : x > 0\}$ οπότε η $f(x) = \ln x$ είναι αύξουσα (Σχήμα 2.24a).



(a) *Γραφική παράσταση της* $f(x) = lnx$ **(b)** *Γραφική παράσταση της* $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Σχήμα 2.24

Παράδειγμα 2.11.9 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x - 3$ είναι μονότονη.

Λύση. Η παράγωγος $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$ είναι θετική για $x > 1$ και αρνητική για $x < 1$. Από το Θεώρημα 2.11.7 η f είναι φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1)$ και αύξουσα στο διάστημα $(1, \infty)$, όπως επιβεβαιώνεται στο Σχήμα 2.24b.

Θεώρημα 2.11.10 Κριτήριο πρώτης παραγώγου για τα κρίσιμα σημεία Έστω x_0 ένα κρίσιμο σημείο της f. Τότε:

- Αν $f'(x)$ αλλάζει από $+$ σε $-$ στο x_0, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο.
- Αν $f'(x)$ αλλάζει από $-$ σε $+$ στο x_0, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Περίληψη 2.11.11

- *Θεώρημα μέσης τιμής (ΘΜΤ)*: Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγώγισημη στο (a,b), τότε υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή x_0 στο (a,b) τέτοια ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Αυτό το συμπέρασμα γράφεται επίσης ως

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

- *Σημαντικό πόρισμα του ΘΜΤ*: Αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η f είναι σταθερή στο (a,b).

- *Το πρόσημο της $f'(x)$ καθορίζει αν η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα*:

$$f'(x) > 0 \text{ για } x \in (a,b) \implies \text{η } f \text{ είναι αύξουσα στο } (a,b)$$

$$f'(x) < 0 \text{ για } x \in (a,b) \implies \text{η } f \text{ είναι φθίνουσα στο } (a,b)$$

- Σε ένα διάστημα όπου ορίζεται η f το πρόσημο της $f'(x)$ μπορεί να αλλάξει μόνο στα κρίσιμα σημεία οπότε η f είναι μονοτονική (αύξουσα ή φθίνουσα) στα διαστήματα μεταξύ των κρίσιμων σημείων.

- Σε ένα διάστημα όπου ορίζεται η f για να βρούμε το πρόσημο της $f'(x)$ σε ένα διάστημα μεταξύ δύο κρίσιμων σημείων υπολογίζουμε το πρόσημο της $f'(x)$ σε ένα δοκιμαστικό σημείο x_0 στο διάστημα.
- *Κριτήριο πρώτης παραγώγου*: Αν η f είναι παραγώγισημη και το x_0 είναι ένα κρίσιμο σημείο τότε

Πρόσημο της $f'(x)$ στο x_0	*Είδος κρίσιμου σημείου*
Από $+$ σε $-$	Τοπικό μέγιστο
Από $-$ σε $+$	Τοπικό ελάχιστο

Παράδειγμα 2.11.12 **1.** Να βρείτε ένα σημείο x_0 που να ικανοποιεί το συμπέρασμα του ΘΜΤ για τις παρακάτω συναρτήσεις στα διαστήματα που δίνονται.

$$(1)\quad f(x)=x^{-1},\quad [2,8]\qquad (2)\quad f(x)=\cos x-\sin x,\quad [0,2\pi],$$

$$(3)\quad f(x)=\frac{x}{x+2},\quad [1,4],\quad (4)\quad f(x)=x^3,\quad [-4,5],$$

$$(5)\quad f(x)=dx\ln x,\quad [1,2],\quad (6)\quad f(x)=e^{-2x},\quad [0,3].$$

2. Να βρείτε όλα τα κρίσιμα σημεία των κάτωθι συναρτήσεων και να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για να προσδιορίσετε αν αυτά είναι τοπικά ελάχιστα ή τοπικά μέγιστα.

$$(1)\quad f(x)=4+6x-x^2\qquad (2)\quad f(x)=\frac{x^2}{x+1},$$

$$(3)\quad f(x)=x^3-12x-4,\quad (4)\quad f(x)=x^3+x^{-3},$$

2.12 Ανώτερες παράγωγοι

Οι ανώτερες παράγωγοι λαμβάνονται με διαδοχική παραγώγιση μιας συνάρτησης $y = f(x)$. Αν η f' είναι παραγώγιση, τότε η *δεύτερη παράγωγος* που συμβολίζεται με f'' ή y'', είναι η παράγωγος

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right)$$

Για παράδειγμα όταν $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ τότε έχουμε

$$f'(x) = 2x - x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad f''(x) = 2 + 2x^{-3} - \frac{1}{4}x^{-3/2}.$$

Η δεύτερη παράγωγος είναι ο ρυθμός μεταβολής της $f'(x)$, οπότε είναι ο ρυθμός μεταβολής του ρυθμού μεταβολής της f.

Η διαδικασία της παραγώγισης μπορεί να συνεχιστεί υπό την προϋπόθεση ότι οι παράγωγοι υπάρχουν. Η τρίτη παράγωγος, που συμβολίζεται ως $f'''(x)$ ή $f^{(3)}(x)$, είναι η παράγωγος της $f''(x)$. Γενικότερα, η n-οστή παράγωγος $f^{(n)}(x)$ είναι η παράγωγος της $(n-1)$-οστής παραγώγου. Χρησιμοποιούμε παρενθέσεις στον εκθέτη για την παράγωγο για να ξεχωρίζουμε την $f^{(n)}$, τη n-οστή παράγωγο της f, από την f^n, τη n-οστή δύναμη της f. Ονομάζουμε την $f(x)$ μηδενικής τάξης παράγωγο και την $f'(x)$ πρώτη παράγωγο.

Οι ανώτερες παράγωγοι λαμβάνονται με διαδοχική παραγώγιση μιας συνάρτησης $y = f(x)$. Αν η f' είναι παραγώγιση τότε η *δεύτερη παράγωγος* που συμβολίζεται με f'' ή y'' είναι η παράγωγος

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right)$$

> • *Η $\frac{dy}{dx}$ έχει τις μονάδες της y ανά μονάδα του x.*
>
> • *Η $\frac{d^2y}{dx^2}$ έχει τις μονάδες της $\frac{dy}{dx}$ ανά μονάδα της x ή τις μονάδες της y ανά μονάδα της x στο τετράγωνο.*

Για παράδειγμα όταν $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ τότε έχουμε

$$f'(x) = 2x - x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad f''(x) = 2 + 2x^{-3} - \frac{1}{4}x^{-3/2}.$$

Η δεύτερη παράγωγος είναι ο ρυθμός μεταβολής της $f'(x)$, οπότε είναι ο ρυθμός μεταβολής του ρυθμού μεταβολής της f. Στον συμβολισμό του Leibniz γράφουμε

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d^2f}{dx^2}, \quad \frac{d^3f}{dx^3}, \quad \frac{d^4f}{dx^4}, \ldots$$

Παράδειγμα 2.12.1 Να υπολογίσετε τις πρώτες τρεις παραγώγους της $f(x) = xe^x$. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε έναν γενικό τύπο για την $f^{(n)}(x)$.

Λύση. Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του γινομένου:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x,$$

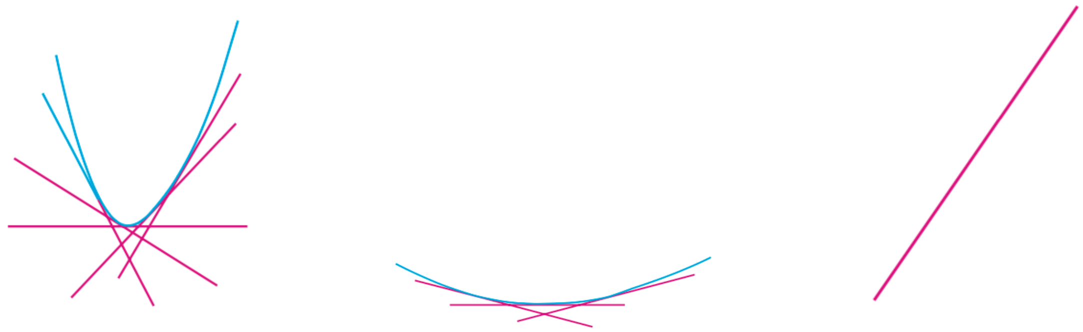
$$f''(x) = \frac{d}{dx}((1+x)e^x) = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x,$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}((2+x)e^x) = e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x,$$

Βλέπουμε ότι $f^{(n)}(x) = e^x + f^{(n-1)}(x)$, το οποίο οδηγεί στη γενική σχέση

$$f^{(n)}(x) = (n+x)e^x.$$

Εμβάθυνση στα σχήματα Μπορούμε να οπτικοποιήσουμε τον ρυθμό που εκφράζεται από την $f''(x)$; Η δεύτερη παράγωγος είναι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η $f'(x)$, οπότε η $f''(x)$ είναι μεγάλη αν οι κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών μεταβάλλονται γρήγορα, όπως στο Σχήμα 2.26(a). Ομοίως η $f''(x)$ είναι μικρή αν οι κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών μεταβάλλονται αργά. Σε αυτή την περίπτωση η καμπύλη είναι σχετικά επίπεδη όπως στο Σχήμα 2.26(b). Αν η f είναι μια γραμμική συνάρτηση (Σχήμα 2.26(c)) τότε η εφαπτόμενη ευθεία δεν μεταβάλλεται καθόλου και $f''(x) = 0$. Έτσι η $f''(x)$ μετρά την «καμπύλωση» ή κυρτότητα της γραφικής παράστασης.



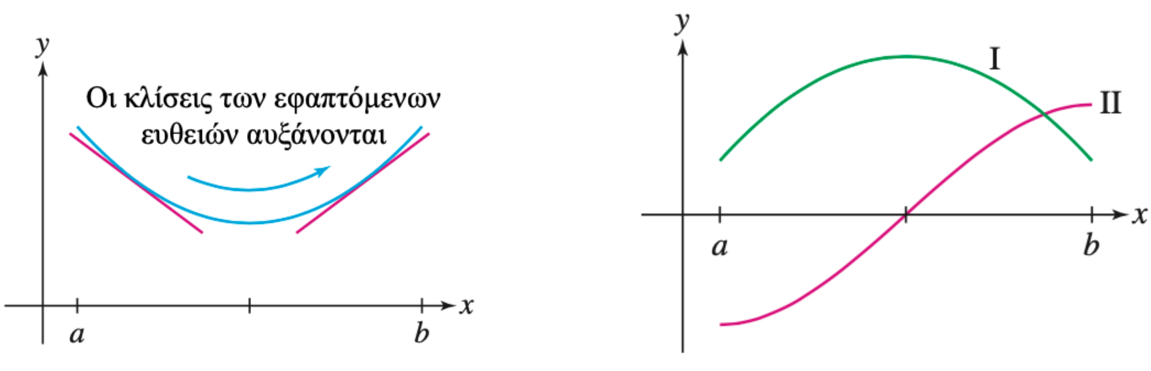
(a) *Μεγάλη δεύτερη παράγωγος: Οι εφαπτόμενες ευθείες στρίβουν απότομα*

(b) *Μικρότερη δεύτερη παράγωγος: Οι εφαπτόμενες ευθείες στρίβουν αργά*

(c) *Η δεύτερη παράγωγος είναι μηδέν: Η εφαπτόμενη ευθεία δεν μεταβάλλεται*

Σχήμα 2.25

Παράδειγμα 2.12.2 Να αναγνωρίσετε τις καμπύλες I και II στο Σχήμα 2.26(b) ως τις γραφικές παραστάσεις των f' ή f'' για τη συνάρτηση f στο Σχήμα 2.26(a).



(a) *Γραφική παράσταση της f*

(b) *Γραφικές παραστάσεις των δύο πρώτων παραγώγων*

Σχήμα 2.26

Λύση. Οι κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών στη γραφική παράσταση της f αυξάνονται στο διάστημα $[a,b]$. Επομένως, η f' είναι μια αύξουσα συνάρτηση και η γραφική της παράσταση πρέπει να είναι η II. Αφού η $f''(x)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της $f'(x)$ και η $f'(x)$ είναι αύξουσα, η $f''(x)$ είναι θετική και η γραφική της παράσταση πρέπει να είναι η I.

Περίληψη 2.12.3

- Οι ανώτερες παράγωγοι $f', f'', f''', \ldots$ ορίζονται με διαδοχική παραγώγιση

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d}{dx} f''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3}, \ldots$$

  Η n-οστή παράγωγος συμβολίζεται ως $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f}{dx^n}$.

- Η δεύτερη παράγωγος παίζει σημαντικό ρόλο: Είναι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η $f'(x)$. Γραφικά, η $f''(x)$ μετρά πόσο γρήγορα αλλάζουν κατεύθυνση οι εφαπτόμενες ευθείες και έτσι μετρά την «καμπύλωση» της γραφικής παράστασης.

- Αν $s(t)$ είναι η θέση ενός αντικειμένου τη χρονική στιγμή t, τότε η $s'(t)$ είναι η ταχύτητα και η $s''(t)$ είναι η επιτάχυνση.

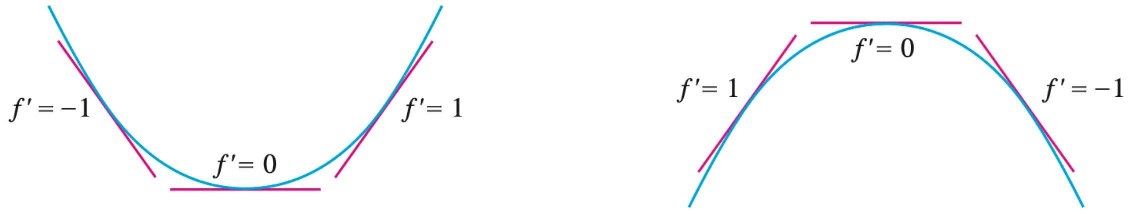
2.13 Η δεύτερη παράγωγος και η κυρτότητα

Στην προηγούμενη ενότητα εξετάσαμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης, όπως αυτή ορίζεται από το πρόσημο της πρώτης παραγώγου. Εδώ, εστιάζουμε σε μια άλλη βασική ιδιότητα, την κυρτότητα, που περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο η γραφική παράσταση «στρέφει κοίλα προς τα πάνω» ή «στρέφει κοίλα προς τα κάτω». Συγκεκριμένα, λέμε ότι μια καμπύλη είναι κυρτή όταν «στρέφτα κοίλα προς τα πάνω» και κοίλη όταν «στρέφτα κοίλα προς τα κάτω» (βλέπε Σχήμα 2.27).

(a) *Κυρτή* **(b)** *Κοίλη*

Σχήμα 2.27

Για να μελετήσουμε με ακρίβεια την έννοια της κυρτότητας, εξετάζουμε τη σχέση της με τις εφαπτόμενες ευθείες και τις παραγώγους. Σύμφωνα με το Σχήμα 2.29, όταν η συνάρτηση f «στρέφει κύλα προς τα πάνω», η πρώτη παράγωγός της f' αυξάνεται (δηλαδή, οι κλίσεις των εφαπτομένων γίνονται μεγαλύτερες καθώς κινούμαστε προς τα δεξιά). Αντίθετα, όταν η f «στρέφει κοίλα προς τα κάτω», η f' μειώνεται. Αυτό μας οδηγεί στον ορισμό που ακολουθεί.



(a) *Κοίλα άνω: Οι κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών είναι αύξουσες*

(b) *Κοίλα κάτω: Οι κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών είναι φθίνουσες*

Σχήμα 2.28

Θεώρημα 2.13.1 Κυρτότητα Έστω ότι η f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα ανοιχτό διάστημα (a,b). Τότε:

Η f είναι *κυρτή (κοίλα άνω)* στο (a,b) αν η f' είναι αύξουσα στο (a,b).

- Η f είναι *κοίλη (κοίλα κάτω)* στο (a,b) αν η f' είναι φθίνουσα στο (a,b).

Θεώρημα 2.13.2 Κριτήριο Κυρτότητας Υποθέστε ότι υπάρχει η δεύτερη παράγωγος $f''(x)$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα πάνω) στο (a,b).

- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η f είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο (a,b).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν τα σημεία σε μια γραφική παράσταση όπου αλλάζει η κυρτότητα της συνάρτησης. Ένα σημείο $P = (x_0, f(x_0))$ λέγεται *σημείο καμπής* της συνάρτησης f αν η κυρτότητα αλλάζει από κοίλη σε κυρτή ή από κυρτή σε κοίλη στο $x = x_0$.

Το σημείο καμπής βρίσκεται στο σημείο όπου ενώνονται δύο τόξα της γραφικής παράστασης:

- Το ένα τόξο είναι κοίλο.

- Το άλλο τόξο είναι κυρτό.

ΠΡΟΣΟΧΗ

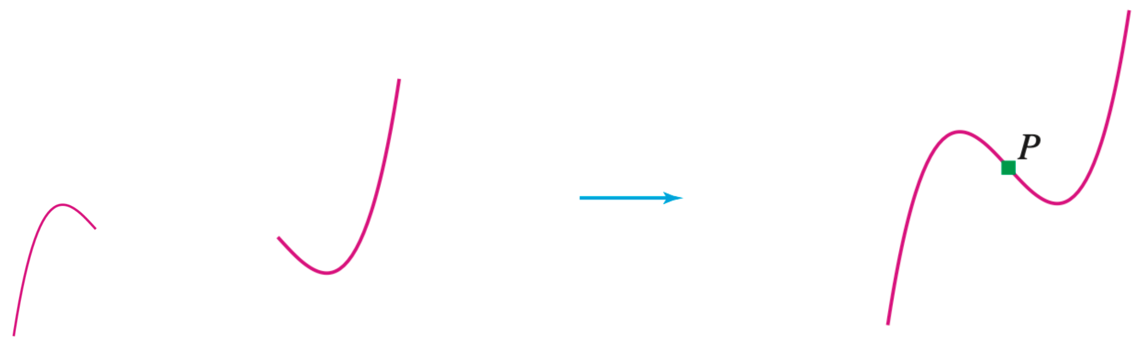
Ένα κρίσιμο σημείο x_0 είναι απλώς ένας αριθμός στη γραμμή των x-τιμών, ενώ ένα σημείο καμπής $(x_0, f(x_0))$ είναι ένα σημείο στο επίπεδο xy, που περιλαμβάνει τόσο τη συντεταγμένη x όσο και τη συντεταγμένη y.

Ορισμός 2.13.3 Κριτήριο Κυρτότητας Υποθέστε ότι υπάρχει η δεύτερη παράγωγος $f''(x)$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα πάνω) στο (a,b).

- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η f είναι κοίλη (στρέφει τα κοίλα κάτω) στο (a,b).

ΠΡΟΣΟΧΗ Ένα κρίσιμο σημείο x_0 είναι απλώς ένας αριθμός στη γραμμή των x-τιμών, ενώ ένα σημείο καμπής $(x_0, f(x_0))$ είναι ένα σημείο στο επίπεδο xy, που περιλαμβάνει τόσο τη συντεταγμένη x όσο και τη συντεταγμένη y.

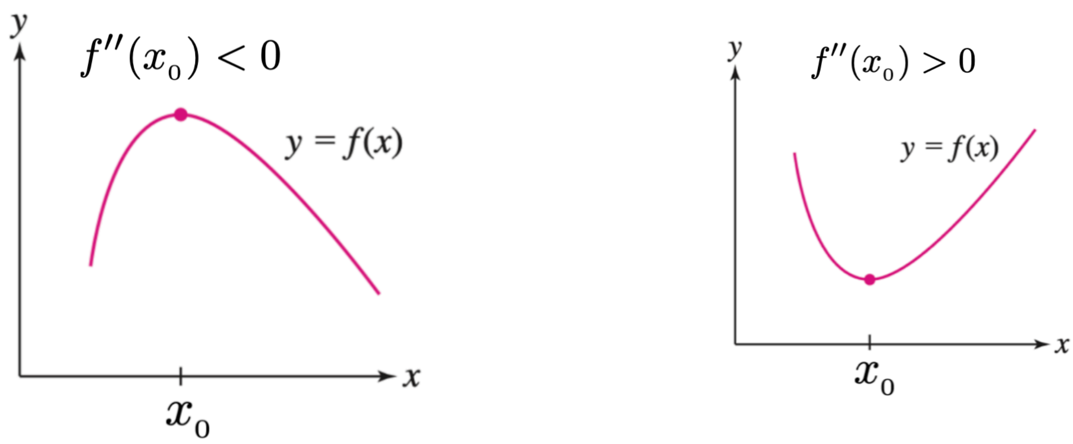


(a) *Κοίλη* **(b)** *Κυρτή* **(c)** **(d)** *P = σημείο καμπής*

Σχήμα 2.29

2.13.1 Κριτήριο Σημείων Καμπής

Αν $f''(x_0) = 0$ ή η $f''(x_0)$ δεν υπάρχει και η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο στο $x = x_0$, τότε η συνάρτηση f έχει ένα σημείο καμπής στο $x = x_0$. Υπάρχει ένα απλό κριτήριο για τα κρίσιμα σημεία που βασίζεται στην κυρτότητα. Έστω ότι $f'(x_0) = 0$. Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 2.30, το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο αν η f είναι κοίλη και τοπικό ελάχιστο αν η f είναι κυρτή. Η κυρτότητα καθορίζεται από το πρόσημο της $f''(x)$, οπότε παίρνουμε το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου στο Θεώρημα 2.13.4.



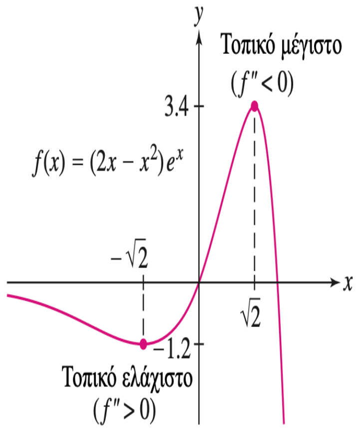
(a) *Κοίλη-τοπικό μέγιστο* **(b)** *Κυρτή - τοπικό ελάχιστο*

Σχήμα 2.30 *Η κυρτότητα καθορίζει το είδος του κρίσιμου σημείου*

Θεώρημα 2.13.4 Κριτήριο δεύτερης παραγώγου
Έστω x_0 ένα κρίσιμο σημείο της $f(x)$. Αν η $f''(x_0)$ υπάρχει, τότε αν

- $f''(x_0) > 0$ το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.
- $f''(x_0) < 0$ το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο.
- $f''(x_0) = 0$ το $f(x_0)$ είναι απροσδιόριστο: το $f(x_0)$ μπορεί να είναι τοπικό ελάχιστο,

τοπικό μέγιστο ή τίποτα από τα δύο.



Σχήμα 2.31

Παράδειγμα 2.13.5 Να αναλύσετε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = (2x - x^2)e^x$.

Λύση. Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της f:

$$f'(x) = (2x - x^2)'e^x + (2x - x^2)(e^x)' = (2 - x^2)e^x$$

Θέτοντας την $f'(x) = 0$, προκύπτει ότι $(2 - x^2)e^x = 0$, το οποίο δίνει τα κρίσιμα σημεία $x = \pm\sqrt{2}$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$f''(x) = [(2 - x^2)'e^x + (2 - x^2)(e^x)'] = (2 - 2x - x^2)e^x$$

Αξιολογούμε τη $f''(x)$ στα κρίσιμα σημεία: Για $x = -\sqrt{2}$:

$$f''(-\sqrt{2}) = (2 - 2(-\sqrt{2}) - (-\sqrt{2})^2)e^{-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} > 0$$

Άρα το $x = -\sqrt{2}$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Για $x = \sqrt{2}$:

$$f''(\sqrt{2}) = (2 - 2\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2)e^{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} < 0$$

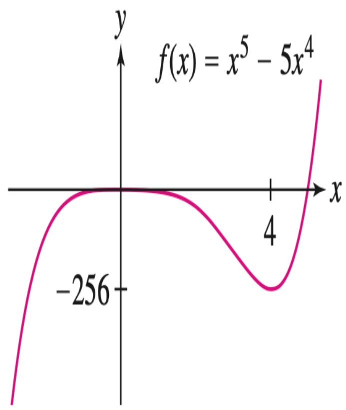
Άρα το $x = \sqrt{2}$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου. Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x = -\sqrt{2}$ και τοπικό μέγιστο στο $x = \sqrt{2}$.

Παράδειγμα 2.13.6 Απροσδιόριστο κριτήριο δεύτερης παραγώγου Να αναλύσετε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^5 - 5x^4$.

Λύση. Υπολογίζουμε τις πρώτες δύο παραγώγους

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 = 5x^3(x - 4) \text{ και } f''(x) = 20x^3 - 60x^2$$

Τα κρίσιμα σημεία της f που προκύπτουν από την εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι $x = 0$ και $x = 4$. Για το $x = 0$, έχουμε $f''(0) = 0$ και συνεπώς το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου αποτυγχάνει. Για το $x = 4$ έχουμε $f''(4) = 20(4)^3 - 60(4)^2 = 320 > 0$ και επομένως στο σημείο $x = 4$ έχουμε τοπικό ελάχιστο. Αφού το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου αποτυγχάνει στο $x = 0$, πρέπει να εξετάσουμε το πρόσημο της $f'(x)$ στα αριστερά και στα δεξιά του σημείου. Ελέγχουμε δύο δοκιμαστικές τιμές: Για $x = -1$ και για για $x = 1$.



Σχήμα 2.32

Για $x = -1$ έχουμε $f'(-1) = 5(-1)^4 - 20(-1)^3 = 25 > 0$. Η $f'(x)$ είναι θετική στο $(-\infty, 0)$ και για για $x = 1$ έχουμε $f'(1) = 5(1)^4 - 20(1)^3 = -15 < 0$. Η $f'(x)$ είναι αρνητική στο $(0, 4)$.

Επομένως, η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο από θετικό σε αρνητικό στο $x = 0$, που σημαίνει ότι το $f(0)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Περίληψη 2.13.7 Μια παραγώγιμη συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα (a, b) αν η πρώτη παράγωγος f' είναι αύξουσα, και κοίλη αν η f' είναι φθίνουσα στο (a, b).

Πληροφορίες από τις παραγώγους

- *Πρώτη παράγωγος:*
  - Αν $f'(x) > 0$, τότε η f είναι αύξουσα.
  - Αν $f'(x) < 0$, τότε η f είναι φθίνουσα.
- *Δεύτερη παράγωγος:*
  - Αν $f''(x) > 0$, τότε η f είναι κυρτή.
  - Αν $f''(x) < 0$, τότε η f είναι κοίλη.

Σημεία καμπής

Ένα σημείο $(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής όταν η καμπυλότητα της συνάρτησης αλλάζει από κυρτή σε κοίλη ή το αντίστροφο.

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου

Αν $f'(x_0) = 0$ και η $f''(x_0)$ υπάρχει, τότε:

- Αν $f''(x_0) < 0$, το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο.
- Αν $f''(x_0) > 0$, το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

- Αν $f''(x_0) = 0$, το κριτήριο αποτυγχάνει, και χρησιμοποιούμε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου.

2.14 Ο κανόνας L'Hôpital

Ο κανόνας L'Hôpital είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για τον υπολογισμό ορισμένων ορίων τα οποία είναι δύσκολο να υπολογισθούν διαφορετικά και είναι χρήσιμος για την κατανόηση των ασυμπτώτων και της καμπυλότητας. Χρησιμοποιείται για τον καθορισμό της «ασυμπτωτικής συμπεριφοράς» (όρια στο άπειρο) των συναρτήσεων και επιτρέπει τη διερεύνηση του πώς οι συναρτήσεις τείνουν προς ορισμένες τιμές. Συνεπώς αποτελεί ένα θεμελιώδες εργαλείο της μαθηματικής ανάλυσης, ειδικά σε περιοχές που απαιτούν τη βαθύτερη κατανόηση και μελέτη των ορίων και των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων.

Θεώρημα 2.14.1 Κανόνας Bernoulli-L'Hôpital Υποθέτουμε ότι η f και η g είναι παραγωγίσιμες σε ένα ανοικτό διάστημα I εκτός ίσως από ένα σημείο $x_0 \in I$. Επίσης, υποθέτουμε ότι $g'(x) \neq 0$

για όλα τα $x \in I - \{x_0\}$),

$$f(x_0) = g(x_0) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$$

$$\text{και υπάρχει το όριο} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Τότε,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ο κανόνας αυτός ισχύει επίσης και για τα πλευρικά όρια.

Θεώρημα 2.14.2 Κανόνας Bernoulli-L'Hôpital για όρια στο άπειρο Υποθέστε ότι η f και η g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστη- μα (b, ∞) και ότι $g'(x) \neq 0$ για $x > b$. Αν τα $\lim_{x \to \infty} f(x)$

και $\lim_{x \to \infty} g(x)$ υπάρχουν και είναι είτε και τα δύο μηδέν είτε και τα δύο άπειρα, τότε

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο στο δεξί μέλος υπάρχει. Παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει για όρια

καθώς $x \to -\infty$.

Ο κανόνας των Bernoulli-L'Hôpital εφαρμόζεται σε απροσδιόριστες μορφές $0/0$ και $\pm\infty/\infty$. Μπορεί επίσης να εφαρμοστεί σε όρια σε οποιαδήποτε από τις μορφές $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, και ∞^0, μετατρέποντας τις εκφράσεις αυτές σε κάποια άλλη μορφή $0/0$ ή $\pm\infty/\infty$. Ο κανόνας των Bernoulli- L'Hôpital εφαρμόζεται επίσης σε όρια καθώς $x \to \infty$ ή $x \to -\infty$.

Σημείωση 2.14.3 Απροσδιοριστίες για τον Κανόνα του L'Hôpital

Ο κανόνας του L'Hôpital εφαρμόζεται στις ακόλουθες απροσδιοριστίες:

Τύπος απροσδιοριστίας	Μαθηματική έκφραση
Μηδέν διά μηδενός	$\frac{0}{0}$
Άπειρο διά άπειρο	$\frac{\infty}{\infty}$ ή $\frac{-\infty}{\infty}$ ή $\frac{\infty}{-\infty}$ ή $\frac{-\infty}{-\infty}$

Υπάρχουν και άλλες απροσδιοριστίες που δεν εφαρμόζεται άμεσα ο κανόνας του L'Hôpital αλλά μπορούν να μετασχηματιστούν ώστε να εφαρμοστεί. Συγκεκριμένα, αν αντιμετωπίζουμε μία από τις παρακάτω απροσδιοριστίες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλους μετασχηματισμούς ώστε να οδηγηθούμε σε μία μορφή όπου ισχύει ο κανόνας του L'Hôpital.

Τύπος απροσδιοριστίας	Μετατροπή
$\infty - \infty$	Γίνεται κλάσμα ώστε να πάρουμε $\dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\infty}{\infty}$
$0 \cdot \infty$	Μετατρέπεται σε $\dfrac{0}{1/\infty}$ ή $\dfrac{\infty}{1/0}$
$0^0, \infty^0, 1^\infty$	Χρησιμοποιούμε λογάριθμο και μετατρέπουμε σε $0 \cdot \infty$

Παράδειγμα 2.14.4 Χρησιμοποιήστε τον κανόνα L'Hôpital για να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^4+2x-20}.$$

Λύση. Θέτουμε $f(x) = x^3 - 8$ και $g(x) = x^4 + 2x - 20$. Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες και επειδή $f(2) = g(2) = 0$, το $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι απροσδιόριστη μορφή του τύπου $\dfrac{0}{0}$ στο $a = 2$.

Επιπλέον, η $g'(x) = 4x^3 + 2$ είναι μη μηδενική κοντά στο $x = 2$, οπότε εφαρμόζεται ο κανόνας L'Hôpital. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τις παραγώγους τους και παίρνουμε

$$\underbrace{\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^4+2x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^3-8)'}{(x^4+2x-2)'}}_{\text{Κανόνας L'Hôpital}} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2}{4x^3+2} = \frac{3(2^2)}{4(2^3)+2} = \frac{12}{34} = \frac{6}{17}$$

Παράδειγμα 2.14.5 Υπολογίστε το

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}.$$

Λύση. Το πηλίκο είναι πάλι απροσδιόριστη μορφή του τύπου $\frac{0}{0}$ στο σημείο $x=\frac{\pi}{2}$ αφού

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad \text{και} \quad 1-\sin\frac{\pi}{2}=1-1=0.$$

Οι άλλες υποθέσεις ικανοποιούνται, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα L'Hôpital όπου και παίρνουμε
vs

$$\underbrace{\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\cos^2 x)'}{(1-\sin x)'}}_{\text{Κανόνας L'Hôpital}}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-2\cos x\sin x}{-\cos x}=\underbrace{\lim_{x\to\pi/2}(2\sin x)}_{\text{Απλοποιημένο}}=2.$$

Παρατηρήστε ότι το κλάσμα $\frac{-2\cos x\sin x}{-\cos x}$ είναι επίσης απροσδιόριστη μορφή στο $x=\pi/2$ το οποίο παρακάμψαμε έμμεσα απλοποιώντας τον παράγοντα $-\cos x$.

Παράδειγμα 2.14.6 Η μορφή $0\cdot\infty$ Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x.$$

Λύση. Αυτό το όριο είναι πλευρικό επειδή η $f(x)=x\ln x$ δεν ορίζεται για $x\leq 0$. Επιπλέον, καθώς $x\to 0^+$ το $\ln x$ τείνει στο $-\infty$. Οπότε, η $f(x)$ παριστάνει μια απροσδιόριστη μορφή του τύπου $0\cdot\infty$. Για να εφαρμόσουμε τον κανόνα L'Hôpital, ξαναγράφουμε τη συνάρτησή μας ως

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^{-1}}$$

έτσι ώστε η $f(x)$ να οδηγεί σε απροσδιόριστη μορφή του τύπου $-\infty/\infty$. Τότε, εφαρμόζεται ο κανόνας L'Hôpital:

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}}_{\text{Κανόνας L'Hôpital}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}=\underbrace{\lim_{x\to 0^+}(-x)}_{\text{Απλοποιημένο}}=0.$$

Παράδειγμα 2.14.7 Χρήση του κανόνα L'Hôpital δύο φορές Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{\cos x-1}.$$

*Λύση.*Το όριο είναι η απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ αφού στο $x=0$ έχουμε

$$e^x-x-1=e^0-0-1=0 \quad \text{και} \quad \cos x-1=\cos 0-1=0.$$

Η πρώτη εφαρμογή του κανόνα L'Hôpital δίνει

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-x-1)'}{(\cos x-1)'}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{-\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\sin x}.$$

Αυτό το όριο είναι εκ νέου απροσδιόριστη μορφή του τύπου $\frac{0}{0}$ οπότε εφαρμόζουμε τον κανόνα L'Hôpital για δεύτερη φορά

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{\cos x}=\frac{-e^0}{\cos 0}=\frac{-1}{1}=-1.$$

Έτσι, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{\cos x-1}=-1.$$

2.14.1 Ασύμπτωτες: Οριζόντιες, Κατακόρυφες και Πλάγιες

Ορισμός 2.14.8 Μια ευθεία $y=L$ λέγεται *οριζόντια ασύμπτωτη* μιας συνάρτησης $f(x)$ αν το όριο της $f(x)$ καθώς $x\to\infty$ ή $x\to-\infty$ είναι ίσο με L, δηλαδή,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L \text{ ή } \lim_{x\to-\infty} f(x)=L.$$

Η οριζόντια ασύμπτωτη περιγράφει τη συμπεριφορά της συνάρτησης όταν x τείνει στο άπειρο.

Μια ευθεία $x=x_0$ λέγεται *κατακόρυφη ασύμπτωτη* μιας συνάρτησης $f(x)$ αν το όριο της $f(x)$ καθώς x τείνει στο x_0 από τα δεξιά ή τα αριστερά είναι το $+\infty$ ή το $-\infty$.

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty \text{ ή } \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty.$$

Η κατακόρυφη ασύμπτωτη δείχνει πού γίνεται απεριόριστα μεγάλη ή μικρή η συνάρτηση $f(x)$ καθώς x πλησιάζει το x_0.

Μια ευθεία $y=ax+b$ ονομάζεται *πλάγια ασύμπτωτη* μιας συνάρτησης $f(x)$ αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$$

ή

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0.$$

Θεώρημα 2.14.9 Η ευθεία $y=ax+b$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b\in\mathbb{R}.$$

αντιστοίχως

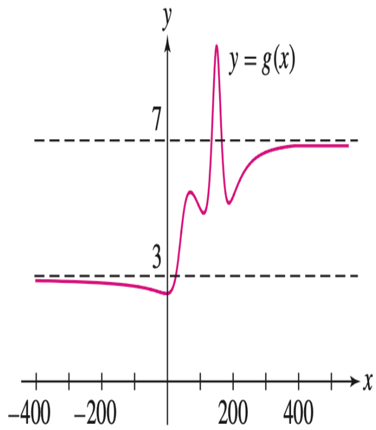
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b\in\mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 2.14.10 Να σχολιάσετε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης g στο Σχήμα 2.33.

Λύση. Η συνάρτηση g τείνει στο $L = 7$ καθώς κινούμαστε προς τα δεξιά και στο $L = 3$ καθώς κινούμαστε προς τα αριστερά, επομένως

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 7 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = 3$$

Συνεπώς, οι ευθείες $y = 7$ και $y = 3$ είναι οριζόντιες ασύμπτωτες της g.



Σχήμα 2.33

Παράδειγμα 2.14.11 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{1}{x-2}, \; g(x) = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{1}{x^2} \; \text{και} \; h(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln x.$$

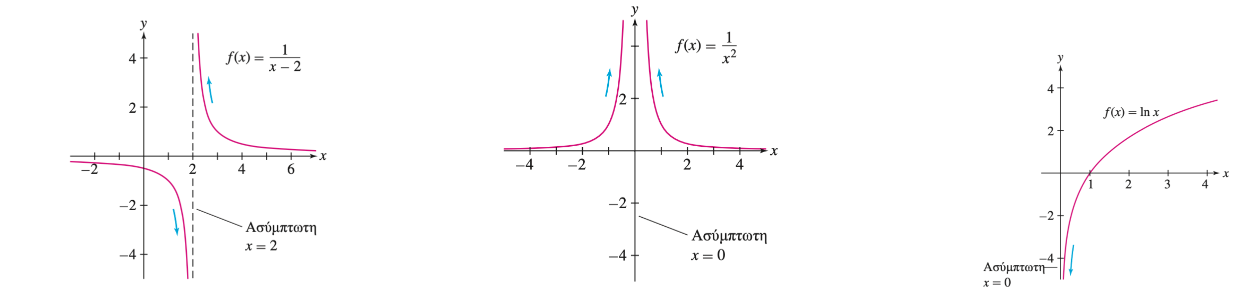
Να προσδιορίσετε το είδος των ασύμπτωτων τους.

Λύση.

- Η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη. Πράγματι, έχουμε
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty.$$
Τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά επειδή η $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ είναι αρνητική για $x < 2$ και επομένως το όριο από αριστερά είναι $-\infty$ και η $f(x)$ είναι θετική για $x > 2$ το οποίο συνεπάγεται ότι το όριο από δεξιά είναι ∞ (βλ. Σχήμα 2.36a).

- Η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη διότι
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$
Πράγματι, η $f(x) = \frac{1}{x^2}$ είναι πάντα θετική για κάθε $x \neq 0$ και γίνεται αυθαίρετα μεγάλη καθώς $x \to 0$ από κάθε πλευρά (βλ. Σχήμα 2.36b).

- Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι αρνητική για $0 < x < 1$ και τείνει στο $-\infty$ καθώς $x \to 0^+$. Δηλαδή έχουμε
$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$
Επομένως ευθεία $x = 0$ είναι μια κατακόρυφη ασύμπτωτη (βλ. Σχήμα 2.34c). επειδή Η ευθεία $x = 0$ είναι μια κατακόρυφη ασύμπτωτη.



(a) (b) (c)

Σχήμα 2.34

Παράδειγμα 2.14.12 Αν $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ όπου P και Q είναι πολυώνυμα βαθμών $m+1$ και m τότε με διαίρεση πολυωνύμων μπορούμε να γράψουμε

$$f(x) = (ax+b) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

όπου P_1 είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $< m$. Να δείξετε ότι η $y = ax+b$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της $f(x)$. Χρησιμοποιήστε αυτή τη διαδικασία για να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{α) } y = \frac{x^2}{x+2} \qquad \text{β) } y = \frac{x^3+x}{x^2+x+1}$$

Λύση. Με βάση την υπόθεση έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax+b)) = \lim_{x\to\infty} \frac{P_1(x)}{Q(x)} = 0.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = ax+b.$$

Επομένως για να βρούμε την πλάγια ασύμπτωτη μιας συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$, εκτελούμε πολυωνυμική διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή και εξετάζουμε το πηλίκο της διαίρεσης καθώς $x \to \pm\infty$.

Διαιρούμε το x^2 με το $x+2$ και παίρνουμε

$$x^2 \div (x+2) = x - 2 + \frac{4}{x+2}$$

Άρα με βάση όσα είπαμε παραπάνω η πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ είναι η ευθεία

$$y = x - 2.$$

'Ομοια για την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x^2+x+1}$ παίρνουμε

$$x^3+x \div (x^2+x+1) = x-1+\frac{x+1}{x^2+x+1},$$

που συνεπάγεται ότι η πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x^2+x+1}$ είναι η ευθεία

$$y = x-1.$$

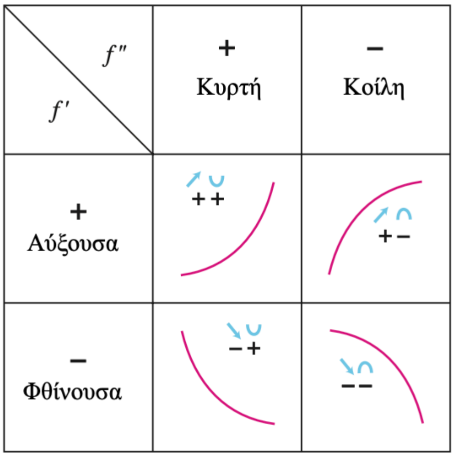
2.15 Ανάλυση και χάραξη γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων

Η παρούσα ενότητα επικεντρώνεται στη μελέτη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων, αξιοποιώντας τις πληροφορίες που παρέχουν οι πρώτες δύο παράγωγοι f' και f''. Ο στόχος είναι η κατανόηση των ιδιοτήτων μιας συνάρτησης χωρίς να απαιτείται η σχεδίαση μεγάλου αριθμού σημείων. Αν και στις μέρες μας οι περισσότερες γραφικές παραστάσεις δημιουργούνται υπολογιστικά, τα εργαλεία του διαφορικού λογισμού προσφέρουν πολύτιμες πληροφορίες που υπερβαίνουν την απλή εικόνα μιας καμπύλης στην οθόνη. Συγκεκριμένα, μελετάμε διάφορα χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης, όπως το πεδίο ορισμού της, τα διαστήματα στα οποία είναι αύξουσα ή φθίνουσα, τα ακρότατά της, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Επίσης, μας ενδιαφέρουν οι ασύμπτωτες, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες και τυχόν συμμετρίες. Η χρήση των παραγώγων επιτρέπει την ανάλυση αυτών των ιδιοτήτων με αλγεβρικές μεθόδους, χωρίς να απαιτείται η άμεση σχεδίαση. Έτσι, ο λογισμός μας δίνει τη δυνατότητα να κατανοούμε και να προβλέπουμε τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης με μεγαλύτερη ακρίβεια.

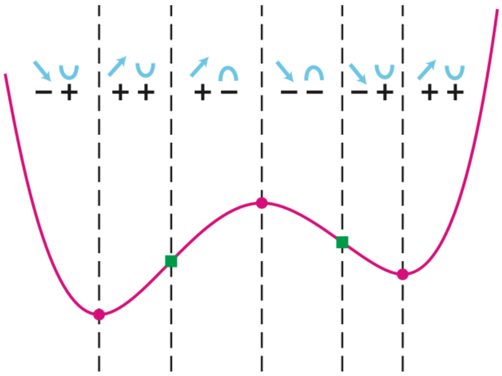
Οι συνδυασμοί προσήμων των f' και f''

$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Το πρώτο πρόσημο αναφέρεται στην πρώτη παράγωγο f' και το δεύτερο στη δεύτερη παράγωγο f''. Για παράδειγμα, το σύμβολο $(-,+)$ σημαίνει ότι $f'(x) < 0$ (η συνάρτηση είναι φθίνουσα) και $f''(x) > 0$ (η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω). Για την απεικόνιση αυτών των ιδιοτήτων χρησιμοποιούμε λοξά βέλη για να δείξουμε αν η συνάρτηση αυξάνεται ή μειώνεται και καμπύλες γραμμές για να υποδηλώσουμε την κυρτότητά της.
Οι περισσότερες γραφικές παραστάσεις αποτελούνται από μικρότερα τμήματα, τα οποία ανήκουν σε μία από τις τέσσερις βασικές κατηγορίες. Αυτές οι κατηγορίες αντιστοιχούν στους τέσσερις πιθανούς συνδυασμούς των προσήμων της πρώτης και δεύτερης παραγώγου f' και f'' (βλ. Σχήμα 2.35 Αφού κάθε μία από τις f' και f'' μπορεί να έχει πρόσημο + ή−, οι συνδυασμοί προσήμων είναι Στην ανάλυση μιας γραφικής παράστασης εστιάζουμε στα *σημεία μετάβασης*, όπου το βασικό σχήμα αλλάζει λόγω αλλαγής προσήμου είτε στην f' (τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο) είτε στην f'' (σημείο καμπής). Στο Σχήμα 2.35 τα τοπικά ακρότατα σημειώνονται με συμπαγείς κόκκινες κουκκίδες και τα σημεία καμπής σημειώνονται με συμπαγή πράσινα τετράγωνα.



(a) *Τα τέσσερα βασικά σχήματα*



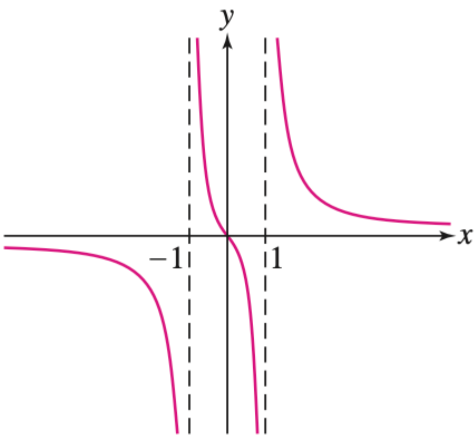
(b) *Η γραφική παράσταση της f με σημεία μετάβασης και συνδυασμούς προσήμων των f και f*

Σχήμα 2.35

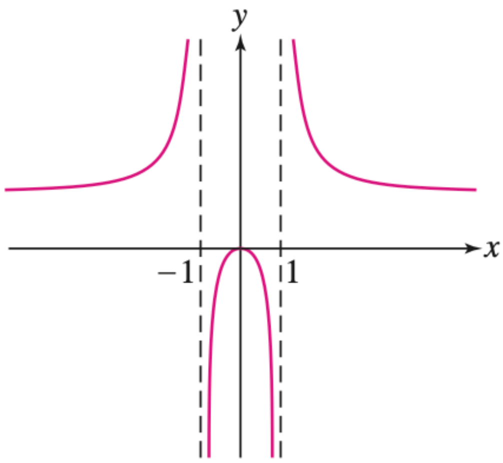
Παράδειγμα 2.15.1 Να αντιστοιχίσετε τις γραφικές παραστάσεις στο Σχήμα 2.36 με τις δύο συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{3x}{x^2-1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{3x^2}{x^2-1}.$$

Εξηγήστε:



(a)



(b)

Σχήμα 2.36

Λύση. Ο παρονομαστής της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$ μηδενίζεται στα $x = \pm 1$, άρα η συνάρτηση έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες στα $x = \pm 1$. Ο αριθμητής είναι μονώνυμο δεύτερου πρώτου βαθμού $(3x)$ και επομένως η γραφική παράσταση περνάει από την αρχή των αξόνων $(0,0)$. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά δείχνει ότι η συνάρτηση αλλάζει πρόσημο και εμφανίζει διαφορετικές τιμές για θετικά και αρνητικά x.

Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-1}$ έχει επίσης κατακόρυφες ασύμπτωτες στα $x = \pm 1$. Ο αριθμητής είναι μονώνυμο δεύτερου βαθμού $(3x^2)$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι **πάντα μη αρνητική**

($y \geq 0$). Η συμμετρία ως προς τον άξονα y σημαίνει ότι η γραφική της παράσταση έχει παρόμοια συμπεριφορά για $x > 0$ και $x < 0$.

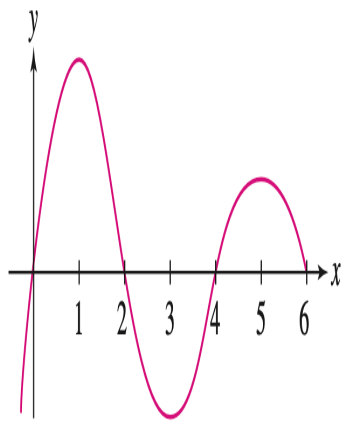
Η αντιστοίχιση με τα σχήματα είναι η ακόλουθη:

-Στο *Σχήμα (a)*, η γραφική παράσταση περνάει από το $(0,0)$ και αλλάζει πρόσημο, κάτι που ταιριάζει με τη συνάρτηση $y = \dfrac{3x}{x^2-1}$.

-Στο *Σχήμα (b)*, η γραφική παράσταση είναι πάντα μη αρνητική και συμμετρική ως προς τον άξονα y, άρα αντιστοιχεί στη συνάρτηση $y = \dfrac{3x^2}{x^2-1}$.

Παράδειγμα 2.15.2 Να δηλώσετε αν τα $f(1)$ και $f(3)$ είναι τοπικά ελάχιστα ή τοπικά μέγιστα, υποθέτοντας ότι το Σχήμα 2.37 είναι η γραφική παράσταση της f'.

Λύση Για να προσδιορίσουμε αν τα $f(1)$ και $f(3)$ είναι τοπικά ακρότατα εξετάζουμε τη συμπεριφορά της παραγώγου f': Στο $x = 1$ η f' μηδενίζεται και αλλάζει πρόσημο από θετικό σε αρνητικό που σημαίνει ότι το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο.



Σχήμα 2.37

Στο $x = 3$ η f' μηδενίζεται και αλλάζει πρόσημο από αρνητικό σε θετικό που σημαίνει ότι το $f(3)$ είναι τοπικό ελάχιστο. Επομένως το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο και το $f(3)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Παράδειγμα 2.15.3 Έστω $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ (Σχήμα 2.38). Επιβεβαιώστε τα ακόλουθα:

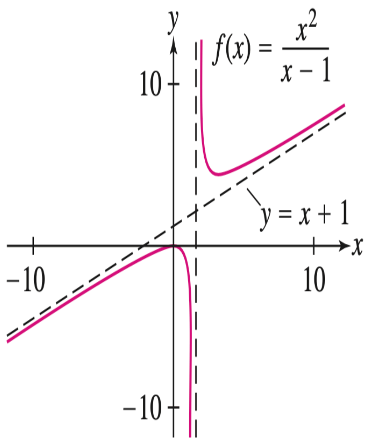
(α) Το $f(0)$ είναι τοπικό μέγιστο και το $f(2)$ τοπικό ελάχιστο.

(β) Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1)$ και κυρτή στο $(1, \infty)$.

(γ) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \infty$.

(δ) Η $y = x+1$ είναι μια *πλάγια ασύμπτωτη* της f καθώς $x \to \pm\infty$.

(ε) Η πλάγια ασύμπτωτη βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f για $x < 1$ και κάτω από αυτή για $x > 1$.



Σχήμα 2.38

Λύση.

(α) Υπολογίζουμε την πρώτη και την δεύτερη παράγωγο:

$$f'(x) = \frac{(2x)(x-1) - x^2(1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

Θέτοντας $f'(x) = 0$, βρίσκουμε:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)(2(x-1))}{(x-1)^4} =$$

$$\frac{2(x-1)\left[(x-1)^2 - (x^2-2x)\right]}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)\left[(x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x))\right]}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Υπολογίζουμε τα όρια κοντά στο $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$$

Άρα, υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x = 1$.

Αναλύοντας τα πρόσημα της δεύτερης παραγώγου προκύπτει ότι η $f(x)$ είναι κοίλη στο $(-\infty, 1)$ και κυρτή στο $(1, \infty)$.

Για να βρούμε την πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ και } \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = b.$$

Υπολογισμός του a:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1.$$

Υπολογισμός του b

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1.$$

’Αρα η πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης είναι

$$y = x + 1.$$

Επομένως έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f''		$-$		$-$	‖	$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Παρατηρώντας τη γραφική παράσταση επιβεβαιώνεται ότι η πλάγια ασύμπτωτη βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση για $x > 1$ και κάτω από αυτήν για $x < 1$.