



Γενικά Μαθηματικά Ι
Εαρινό Εξάμηνο 2026
Φροντιστηριακή Διάλεξη:
Εισαγωγή Στον Ολοκληρωτικό Λογισμό
(Μίας Μεταβλητής)
Διδάσκων:

Αθανάσιος Ανδρικόπουλος
Επικουρικό Έργο: Αλέξανδρος - Μάριος Αφράτης
Πάτρα, 1 Απριλίου 2026

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή Διάλεξης

Εισαγωγή Στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα – Άθροισμα Riemann

Η Μέθοδος Της Αντικατάστασης

Άλλοι Τύποι Ολοκληρωμάτων

Εμβάθυνση Στα Αόριστα Ολοκληρώματα

Σύνοψη Διάλεξης

Αντικείμενο Της Διάλεξης

Η παρούσα φροντιστηριακή διάλεξη πραγματεύεται τις θεμελιώδεις έννοιες του **Ολοκληρωτικού Λογισμού Μίας Μεταβλητής**, με έμφαση στη γεωμετρική διαίσθηση και στις αναλυτικές τεχνικές υπολογισμού.

Δομή Της Διάλεξης

1. **Ορισμένο Ολοκλήρωμα:** Γεωμετρική ερμηνεία, αθροίσματα προσέγγισης (Riemann), Θεμελιώδεις Θεώρημα Λογισμού.
2. **Άθροισμα Riemann:** Γενικευμένη διαμέριση, αντιπαράγωγος, ιδιότητες ολοκληρωμάτων.
3. **Μέθοδος Αντικατάστασης:** Θεώρημα αντικατάστασης, αλλαγή ορίων σε ορισμένα ολοκληρώματα.
4. **Άλλοι Τύποι Ολοκληρωμάτων:** Λογάριθμος, αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.
5. **Εμβάθυνση:** Μερικά κλάσματα, ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Προαπαιτούμενα

Παράγωγοι, Κανόνας Αλυσίδας, Όρια Ακολουθιών, Κανόνας L'Hôpital.

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή Διάλεξης

Εισαγωγή Στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα – Άθροισμα Riemann

Η Μέθοδος Της Αντικατάστασης

Άλλοι Τύποι Ολοκληρωμάτων

Εμβάθυνση Στα Αόριστα Ολοκληρώματα

Σύνοψη Διάλεξης

Από Την Παράγωγο Στο Ολοκλήρωμα

Στα προηγούμενα κεφάλαια εξετάστηκε η έννοια της **παραγωγού**, η οποία αποτελεί έναν από τους θεμελιώδεις άξονες του Λογισμού. Η βασική της εφαρμογή σχετίζεται με την εύρεση της εφαπτομένης σε μια καμπύλη σε ένα συγκεκριμένο σημείο.

Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Εισάγεται τώρα μια εξίσου σημαντική έννοια: το **ορισμένο ολοκλήρωμα**, το οποίο μελετάται μέσα από το πρόβλημα του υπολογισμού του **εμβαδού κάτω από μια καμπύλη**.

Θεμελιώδης Σύνδεση

Η εύρεση εφαπτόμενων και ο υπολογισμός εμβαδών συνδέονται βαθύτερα μέσα από ένα από τα πιο θεμελιώδη θεωρήματα του Λογισμού, το οποίο ενοποιεί τις έννοιες **παραγωγής** και **ολοκλήρωσης**.

Το Σύμβολο Του Ολοκληρώματος

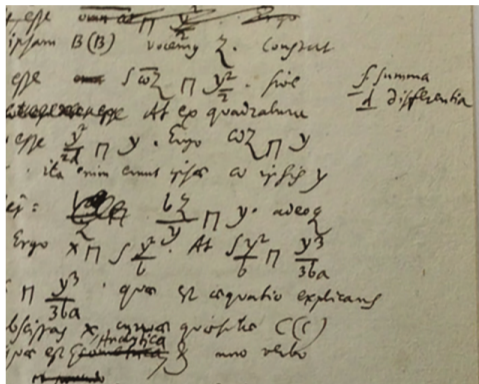
Ιστορική Προέλευση (Leibniz)

Το σύμβολο του ολοκληρώματος \int εισήχθη από τον **Leibniz** ως το επίμηκες γράμμα «S», εμπνευσμένο από τη λατινική λέξη *summa* (άθροισμα), εκφράζοντας την έννοια της **συνεχούς πρόσθεσης**.

Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x) dx$$

εκφράζει το άθροισμα των γινομένων της συνάρτησης $f(x)$ με απειροστά μικρά τμήματα dx στο διάστημα $[a, b]$.

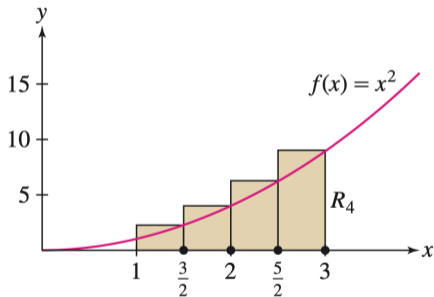


(Σχήμα 3.1: Το σύμβολο του ολοκληρώματος, όπως εισήχθη από τον Leibniz, προέρχεται από το επίμηκες "S" της λατινικής λέξης *summa* (άθροισμα), εκφράζοντας την έννοια της συνεχούς πρόσθεσης.)

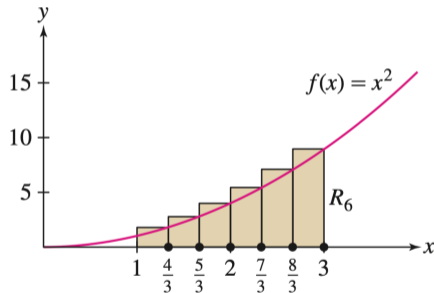
Προσέγγιση Εμβαδού Με Ορθογώνια

Γεωμετρική Ερμηνεία

Το βασικό κίνητρο για τον ορισμό των ολοκληρωμάτων είναι η ανάγκη υπολογισμού εμβαδών χωρίων που σχηματίζονται από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , τον οριζόντιο άξονα x' και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = b$.



(Σχήμα 3.2(a): Διαιρούμε το $(1,3)$ σε 4 υποδιαστήματα.)



(Σχήμα 3.2(b): Διαιρούμε το $(1,3)$ σε 6 υποδιαστήματα.)

Ιδέα

Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει ως **οριακή τιμή** του αθροίσματος των ορθογωνίων όταν το μήκος της βάσης τους τείνει στο μηδέν.

Κατασκευή Αθροισμάτων Προσέγγισης

Διαίρεση Του $[a, b]$ Σε N Υποδιαστήματα

Μήκος κάθε υποδιαστήματος: $\Delta x = \frac{b-a}{N}$

Δεξιά άκρα: $x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \dots, x_N = a + N\Delta x = b$

Γενικός τύπος: $x_j = a + j\Delta x$

Τα Τρία Αθροίσματα Προσέγγισης

$$R_N = \Delta x \sum_{j=1}^N f(x_j) \quad (\text{δεξιά άκρα})$$

$$L_N = \Delta x \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \quad (\text{αριστερά άκρα})$$

$$M_N = \Delta x \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \quad (\text{μέσα})$$

Ανεπτυγμένες Μορφές

$$R_N = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_N)\Delta x$$

$$L_N = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{N-1})\Delta x$$

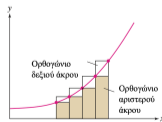
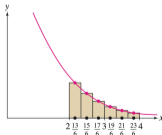
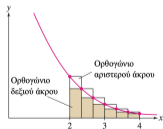
$$M_N = f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\Delta x + \cdots + f\left(\frac{x_{N-1}+x_N}{2}\right)\Delta x$$

Σύνοψη Συμβόλων

- a = αριστερό άκρο $[a, b]$
- b = δεξιό άκρο $[a, b]$
- N = αριθμός υποδιαστημάτων
- $\Delta x = \frac{b-a}{N}$

Ερμηνεία

Τα R_N , L_N , M_N ισούνται με το Δx πολλαπλασιασμένο με το άθροισμα των τιμών της συνάρτησης σε κάποια σημεία των υποδιαστημάτων (δεξιά άκρα / αριστερά άκρα / μέσα).



(Σχήμα 3.3: Οι προσεγγίσεις των άκρων και των μέσων.)

Θεώρημα: Σύγκλιση Προσεγγίσεων

Θεώρημα (3.1.1)

Αν η f είναι **συνεχής** στο $[a, b]$, τότε οι προσεγγίσεις των άκρων και των μέσων τείνουν στο **ίδιο όριο** καθώς $N \rightarrow \infty$. Δηλαδή, υπάρχει μια τιμή L τέτοια ώστε

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = \lim_{N \rightarrow \infty} L_N = \lim_{N \rightarrow \infty} M_N = L.$$

Ορισμός Εμβαδού

Αν $f(x) \geq 0$ στο $[a, b]$, ορίζουμε το **εμβαδόν** κάτω από τη γραφική παράσταση στο $[a, b]$ να είναι L .

Παράδειγμα 3.1.2: $f(x) = x^{-1}$ Στο $[2, 4]$

Παράδειγμα (3.1.2)

Να υπολογίσετε τα R_6 , L_6 και M_6 για $f(x) = x^{-1}$ στο $[2, 4]$.

Λύση

$$\Delta x = \frac{4 - 2}{6} = \frac{1}{3}$$

Δεξιά άκρα: $\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, 4$ Αριστερά άκρα: $2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}$

$$R_6 = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{7} + \frac{3}{8} + \frac{1}{3} + \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{1}{4} \right) \approx 0.653$$

$$L_6 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{7} + \frac{3}{8} + \frac{1}{3} + \frac{3}{10} + \frac{3}{11} \right) \approx 0.737$$

$$M_6 = \frac{1}{3} \left(\frac{6}{13} + \frac{6}{15} + \frac{6}{17} + \frac{6}{19} + \frac{6}{21} + \frac{6}{23} \right) \approx 0.692$$

Μέσα: $\frac{13}{6}, \frac{15}{6}, \frac{17}{6}, \frac{19}{6}, \frac{21}{6}, \frac{23}{6}$

Παράδειγμα 3.1.3: $f(x) = e^x$ Στο $[0, 1]$ – Μέρος 1

Παράδειγμα (3.1.3)

Έστω $f(x) = e^x$ στο $[0, 1]$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο για το γεωμετρικό άθροισμα ($r \neq 1$):

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{N-1} = \sum_{j=0}^{N-1} r^j = \frac{r^N - 1}{r - 1} \quad (*)$$

να δείξετε ότι:

1. $L_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{j/N}$

2. Εφαρμόζοντας (*) με $r = e^{1/N}$: $L_N = \frac{e - 1}{N(e^{1/N} - 1)}$

3. $A = \lim_{N \rightarrow \infty} L_N$ με τον κανόνα L'Hôpital.

Παράδειγμα 3.1.3: $f(x) = e^x$ Στο $[0, 1]$ – Μέρος 2

Λύση – Μέρη 1 & 2

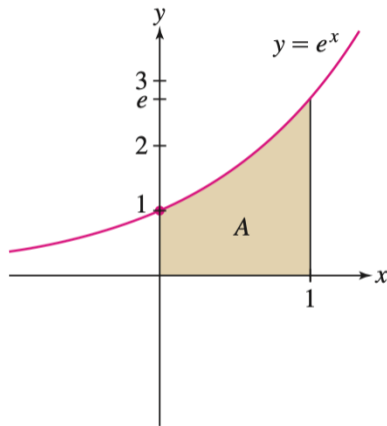
(1) $\Delta x = \frac{1}{N}$, $x_j = \frac{j}{N}$, οπότε $L_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{j/N}$.

(2) Θέτουμε $r = e^{1/N}$ στον τύπο (*):

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{j/N} = \frac{e - 1}{e^{1/N} - 1}, \text{ άρα } L_N = \frac{e - 1}{N(e^{1/N} - 1)}.$$

Λύση – Μέρος 3 (L'Hôpital)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = 1.$$



(Σχήμα 3.4: Γράφημα $y = e^x$ στο $(0, 1)$ με σκιασμένο εμβαδόν A .)

Αποτέλεσμα

Το εμβαδόν κάτω από e^x στο $[0, 1]$ είναι $A = e - 1$.

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή Διάλεξης

Εισαγωγή Στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα – Άθροισμα Riemann

Η Μέθοδος Της Αντικατάστασης

Άλλοι Τύποι Ολοκληρωμάτων

Εμβάθυνση Στα Αόριστα Ολοκληρώματα

Σύνοψη Διάλεξης

Διαμέριση P μεγέθους N

Μια επιλογή σημείων που διαιρεί το $[a, b]$ σε N υποδιαστήματα (όχι απαραίτητα του ίδιου πλάτους):

$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$$

Τυχαία Σημεία $C = \{c_1, \dots, c_N\}$

Το c_i ανήκει στο υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ για κάθε $i = 1, \dots, N$.

Μήκος i -οστού υποδιαστήματος: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Νόρμα Διαμέρισης

Η **νόρμα** $\|P\|$ είναι το **μέγιστο** από τα μήκη Δx_i .

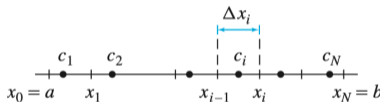
Ορισμός Αθροίσματος Riemann

Ορισμός

Το **άθροισμα Riemann** $R(f, P, C)$ ορίζεται ως:

$$R(f, P, C) = \sum_{i=1}^N f(c_i) \Delta x_i$$

$$= f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_N)\Delta x_N$$

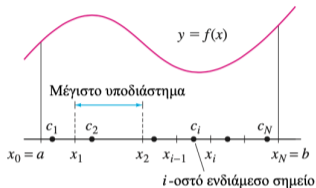


(Σχήμα 3.5: Διαμέριση P .)

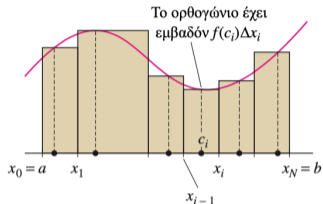
Σύνδεση Με R_N , L_N , M_N

Τα R_N , L_N , M_N είναι **ειδικές περιπτώσεις** αθροισμάτων Riemann για $\Delta x_i = \frac{b-a}{N}$ και συγκεκριμένη επιλογή των c_i .

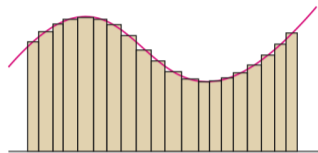
Κατασκευή Του $R(f, P, C)$



(Σχήμα 3.6(a): Διαμέριση του (a,b) σε υποδιαστήματα)



(Σχήμα 3.6(b): Κατασκευή ενός ορθογωνίου ύψους $f(c_i)$ πάνω από κάθε υποδιάστημα)



(Σχήμα 3.6(c): Ορθογώνια που αντιστοιχούν σε ένα άθροισμα Riemann)

Προσημασμένο Εμβαδόν

- Αν $f(c_i) > 0$: το $f(c_i)\Delta x_i$ είναι **θετικό** (εμβαδόν ορθογωνίου).
- Αν $f(c_i) < 0$: το $f(c_i)\Delta x_i$ είναι **αρνητικό**.

Παράδειγμα 3.2.1

Παράδειγμα (3.2.1)

Να υπολογίσετε $R(f, P, C)$ με $f(x) = 8 + 12 \sin x - 4x$ στο $[0, 4]$,

$$P : x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1.8, x_3 = 2.9, x_4 = 4, \quad C : c_1 = 0.4, c_2 = 1.2, c_3 = 2, c_4 = 3.5$$

Λύση

Πλάτη: $\Delta x_1 = 1, \Delta x_2 = 0.8, \Delta x_3 = 1.1, \Delta x_4 = 1.1$

$\|P\| = 1.1$ (δύο μεγαλύτερα υποδιαστήματα)

$$\begin{aligned} R(f, P, C) &= f(0.4) \cdot 1 + f(1.2) \cdot 0.8 + f(2) \cdot 1.1 + f(3.5) \cdot 1.1 \\ &\approx 11.07(1) + 14.38(0.8) + 10.91(1.1) - 10.2(1.1) \approx 23.35 \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Καθώς $\|P\| \rightarrow 0$, τα ορθογώνια γίνονται λεπτότερα και τα αθροίσματα $R(f, P, C)$ τείνουν σε μια οριστική τιμή.

Ορισμός: Ολοκληρώσιμη Συνάρτηση

Ορισμός (3.2.2 – Ορισμένο Ολοκλήρωμα)

Η f είναι **ολοκληρώσιμη** στο $[a, b]$ αν όλα τα αθροίσματα Riemann τείνουν σε ένα και μοναδικό όριο L καθώς $\|P\| \rightarrow 0$. Γράφουμε:

$$L = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P, C) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(c_i) \Delta x_i$$

Το L ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της f στο $[a, b]$ και λέμε ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη κατά Riemann**. Τα a, b λέγονται **κάτω** και **άνω όριο ολοκλήρωσης**.

Εμβαδόν & Ολοκλήρωμα

Αν f ολοκληρώσιμη και $f(x) \geq 0$ στο $[a, b]$, τότε το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση είναι $\int_a^b f(x) dx$.

Σημείωση 3.2.3

Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$

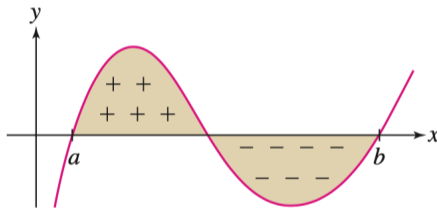
υπολογίζει το **προσημασμένο εμβαδόν**: αν $f(x) < 0$, το ολοκλήρωμα δίνει αρνητική τιμή.

Πραγματικό Εμβαδόν

Το πραγματικό εμβαδόν απαιτεί απόλυτη τιμή:

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

Αυτό εξασφαλίζει ότι το εμβαδόν είναι πάντα **μη αρνητικό**.



(Σχήμα 3.7: Το προσημασμένο εμβαδόν είναι το εμβαδόν πάνω από τον άξονα των x μείον το εμβαδόν κάτω από αυτόν.)

Θεμελιώδες Θεώρημα Λογισμού – Εισαγωγή

Σύνδεση Παραγώγισης – Ολοκλήρωσης

Για συνεχή $y = f(x)$, κάθε τιμή x αντιστοιχεί σε μια περιοχή $F(x)$:

$$F(x + h) - F(x) \approx f(x) \cdot h$$

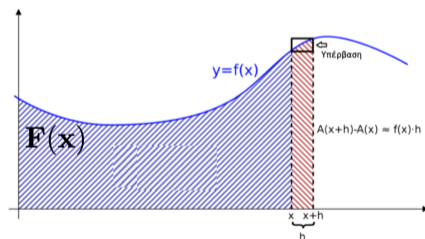
Ακριβής Σχέση

$$F(x + h) - F(x) = f(x) \cdot h + \text{Κόκκινη υπέρβαση}$$

Καθώς $h \rightarrow 0$, η «υπέρβαση» μηδενίζεται:

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = F'(x)$$

Δηλαδή: η **παράγωγος** της συνάρτησης περιοχής $F(x)$ είναι η αρχική $f(x)$.



(Σχήμα 3.8: Η γραμμοσκιασμένη (με κόκκινες ρίγες) περιοχή μπορεί να εκτιμηθεί κατά προσέγγιση αν πολλαπλασιάσουμε το h με το $f(x)$.)

Ορισμός (3.2.4 – Αντιπαράγωγος)

Μια συνάρτηση F είναι **αντιπαράγωγος** της f σε ένα ανοικτό διάστημα (a, b) αν

$$F'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in (a, b).$$

Θεώρημα (3.2.5 – Γενική Αντιπαράγωγος)

Έστω $y = F(x)$ αντιπαράγωγος της $y = f(x)$ στο (a, b) . Τότε κάθε αντιπαράγωγος στο (a, b) είναι της μορφής $y = F(x) + C$. Συμβολίζεται:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Θεώρημα (3.2.6 – ΘΘΛ Μέρος I)

Έστω $f(x)$ συνεχής στο $[a, b]$. Αν $F(x)$ είναι οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της $f(x)$, τότε

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

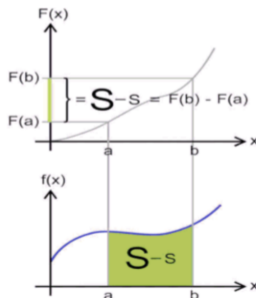
Θεώρημα (3.2.7 – ΘΘΛ Μέρος II)

Έστω f συνεχής σε ανοικτό I και $a \in I$. Τότε η **συνάρτηση εμβαδού**

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

είναι αντιπαράγωγος της f στο I , δηλαδή $F'(x) = f(x)$. Ισοδύναμα:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$



(Σχήμα 3.9: Η συνάρτηση περιοχής είναι μία αντιπαράγωγος της αρχικής συνάρτησης.)



(Σχήμα 3.10: Όμοια με Σχήμα 3.9.)

Θεώρημα (3.2.8 – Ολοκλήρωμα Σταθεράς)

$$\text{Για } f(x) = K: \int_a^b f(x) dx = K(b - a)$$

Ιδιότητες Ορισμένων Ολοκληρωμάτων

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b Cf(x) dx = C \int_a^b f(x) dx \quad (\text{για σταθερά } C)$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Θεώρημα (Σύγκριση)

- Αν $f(x) \leq g(x)$ στο $[a, b]$, τότε $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
- Αν $m \leq f(x) \leq M$ στο $[a, b]$, τότε

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

Πρακτική Χρησιμότητα

Το θεώρημα σύγκρισης επιτρέπει την **εκτίμηση** ολοκληρωμάτων χωρίς τον ακριβή υπολογισμό τους.

Τυπολόγιο

$$\int 0 \, dx = c$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$$

$$\int e^{kx} \, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c \quad (k \neq 0)$$

$$\int k \, dx = kx + c$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$$

Γραμμικότητα

$$\int cf(x) \, dx = c \int f(x) \, dx \quad \text{και} \quad \int (f + g) \, dx = \int f \, dx + \int g \, dx$$

Μέθοδος Επίλυσης

Για να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = y_0 :$$

1. Βρίσκουμε τη γενική αντιπαράγωγο $y = F(x) + C$.
2. Προσδιορίζουμε C από την αρχική συνθήκη: $F(x_0) + C = y_0$.

Θεώρημα (3.2.9)

Έστω $f(x)$ συνάρτηση ορισμένη για $x \geq n_0$ και $\{a_n\}$ ακολουθία με $a_n = f(n)$ για $n \geq n_0$. Τότε:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Παράδειγμα (3.2.10)

Να δείξετε ότι $F(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{n+1}$ είναι αντιπαράγωγος της $y = x^n$ ($n \neq -1$) και ότι

$$\lim_{n \rightarrow -1} F(x) = \ln x \text{ για } x > 0.$$

Λύση: $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1} - 1}{n+1} \right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$. Κανόνας L'Hôpital $\left(\frac{0}{0}\right)$:

$$\lim_{n \rightarrow -1} \frac{x^{n+1} - 1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow -1} \frac{x^{n+1} \ln x}{1} = \ln x.$$

Παράδειγμα 3.2.11

Παράδειγμα (3.2.11)

Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

Λύση

Η $\frac{\ln x}{x}$ ορίζεται για $x \geq 1$ και για θετικούς ακέραιους n λαμβάνει τις τιμές της ακολουθίας.

Από το Θεώρημα 3.2.9 αρκεί να υπολογίσουμε $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$.

Εφαρμόζουμε L'Hôpital (μορφή $\frac{\infty}{\infty}$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Συμπέρασμα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή Διάλεξης

Εισαγωγή Στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα – Άθροισμα Riemann

Η Μέθοδος Της Αντικατάστασης

Άλλοι Τύποι Ολοκληρωμάτων

Εμβάθυνση Στα Αόριστα Ολοκληρώματα

Σύνοψη Διάλεξης

Θεώρημα Αντικατάστασης

Εισαγωγή

Η **μέθοδος αντικατάστασης** λειτουργεί ως η αντίστροφη διαδικασία του **κανόνα της αλυσίδας** στην παραγωγή.

Θεώρημα (3.3.1 – Μέθοδος Αντικατάστασης)

Αν $F'(x) = f(x)$ και u παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε:

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = \int \underbrace{f(u(x))}_{f(u)} \underbrace{u'(x) dx}_{du} = \int f(u) du = F(u(x)) + C.$$

Πρακτική Εφαρμογή

1. Επιλέγουμε $u = u(x)$ κατάλληλα.
2. Υπολογίζουμε $du = u'(x) dx$.
3. Εκφράζουμε το ολοκλήρωμα **ως προς** u και υπολογίζουμε.
4. Αντικαθιστούμε πίσω $u \rightarrow u(x)$.

Παράδειγμα 3.3.2: Βασική Εφαρμογή

Παράδειγμα (3.3.2)

Να υπολογίσετε $\int 3x^2 \sin(x^3) dx$.

Λύση

Θέτουμε $u = x^3$, οπότε $du = 3x^2 dx$.

$$\int 3x^2 \sin(x^3) dx = \int \underbrace{\sin(x^3)}_{\sin u} \underbrace{3x^2 dx}_{du} = \int \sin u du = -\cos u + C = -\cos(x^3) + C.$$

Παράδειγμα 3.3.3: Πολλαπλασιασμός Με Σταθερά

Παράδειγμα (3.3.3)

Να υπολογίσετε $\int x(x^2 + 9)^5 dx$.

Λύση

Θέτουμε $u = x^2 + 9$, $du = 2x dx$, οπότε $x dx = \frac{1}{2} du$.

$$\int x(x^2 + 9)^5 dx = \int \underbrace{(x^2 + 9)^5}_{u^5} \underbrace{x dx}_{\frac{1}{2} du} = \frac{1}{2} \int u^5 du = \frac{1}{12} u^6 + C = \frac{1}{12} (x^2 + 9)^6 + C.$$

Παράδειγμα 3.3.4: Ρητή Συνάρτηση

Παράδειγμα (3.3.4)

Να υπολογίσετε $\int \frac{(x^2 + 2x) dx}{(x^3 + 3x^2 + 12)^6}$.

Λύση

Θέτουμε $u = x^3 + 3x^2 + 12$, $du = (3x^2 + 6x) dx = 3(x^2 + 2x) dx$, οπότε $\frac{1}{3} du = (x^2 + 2x) dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^2 + 2x) dx}{(x^3 + 3x^2 + 12)^6} &= \int \underbrace{(x^3 + 3x^2 + 12)^{-6}}_{u^{-6}} \underbrace{(x^2 + 2x) dx}_{\frac{1}{3} du} \\ &= \frac{1}{3} \int u^{-6} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{-5}}{-5} + C = -\frac{1}{15(x^3 + 3x^2 + 12)^5} + C. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.3.5: Επιπλέον Βήμα

Παράδειγμα (3.3.5)

Να υπολογίσετε $\int x\sqrt{5x+1} dx$.

Λύση

Θέτουμε $u = 5x + 1$, $du = 5 dx$. Λύνουμε $x = \frac{1}{5}(u - 1)$.

$$x\sqrt{5x+1} dx = \frac{1}{5}(u-1) \cdot \frac{1}{5}\sqrt{u} du = \frac{1}{25}(u^{3/2} - u^{1/2}) du.$$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{5x+1} dx &= \frac{1}{25} \int (u^{3/2} - u^{1/2}) du = \frac{1}{25} \left(\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2} \right) + C \\ &= \frac{2}{125}(5x+1)^{5/2} - \frac{2}{75}(5x+1)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

Θεώρημα (3.3.6 – Αλλαγή Μεταβλητής)

Αν u' ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και f συνεχής στο σύνολο τιμών της u :

$$\int_a^b f(u(x)) u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du.$$

Σημείωση 3.3.7

Τα νέα όρια ολοκλήρωσης ως προς u είναι $u(a)$ και $u(b)$. Καθώς x μεταβάλλεται από a ως b , το $u = u(x)$ μεταβάλλεται από $u(a)$ ως $u(b)$.

Δύο Στρατηγικές

1. **Αλλαγή ορίων:** Εκφράζουμε και υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα ως προς u .
2. **Αντιπαράγωγος ως προς x :** Υπολογίζουμε πρώτα αόριστο, μετά εφαρμόζουμε τα αρχικά όρια.

Παράδειγμα 3.3.8: Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Παράδειγμα (3.3.8)

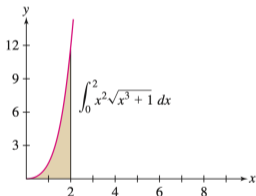
Να υπολογίσετε $\int_0^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$.

Λύση

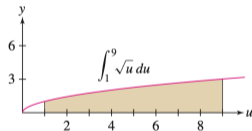
$$u = x^3 + 1, du = 3x^2 dx, x^2 dx = \frac{1}{3} du.$$

Νέα όρια: $u(0) = 1, u(2) = 9$.

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx &= \frac{1}{3} \int_1^9 \sqrt{u} du \\ &= \frac{2}{9} u^{3/2} \Big|_1^9 = \frac{52}{9}. \end{aligned}$$



(Σχήμα 3.11: Γράφημα ολοκληρώματος στο (0,2).)



(Σχήμα 3.12: Γράφημα ολοκληρώματος στο (1,9). Η αντικατάσταση δείχνει ότι το εμβαδόν στο Σχήμα 3.11 είναι ίσο με το ένα τρίτο του εμβαδού στο Σχήμα 3.12.)

Παράδειγμα 3.3.9: Εμβαδόν

Παράδειγμα (3.3.9)

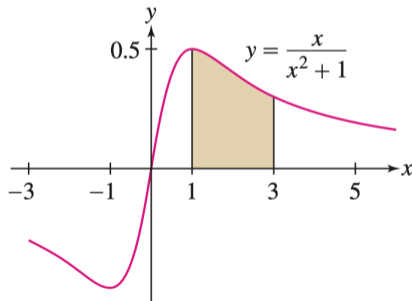
Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάτω από $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ στο $[1, 3]$.

Λύση

$$u = x^2 + 1, \quad du = 2x \, dx, \quad \frac{x \, dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{du}{u}.$$

Νέα όρια: $u(1) = 2, u(3) = 10$.

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{x}{x^2 + 1} \, dx &= \frac{1}{2} \int_2^{10} \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| \Big|_2^{10} \\ &= \frac{1}{2} (\ln 10 - \ln 2) \\ &= \frac{1}{2} \ln 5 \approx 0.805. \end{aligned}$$



(Σχήμα 3.13: Εμβαδόν κάτω από $\frac{x}{x^2+1}$)

Περίληψη 3.3.10

- Δοκιμάζουμε αντικατάσταση όταν η ολοκληρωτέα έχει μορφή $f(u(x)) u'(x)$. Αν F αντιπαράγωγος της f :

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = F(u(x)) + C.$$

- Το διαφορικό συνδέεται ως $du = u'(x) dx$.
- Τύπος αλλαγής μεταβλητής: $\int f(u(x)) u'(x) dx = \int f(u) du$.
- Για ορισμένα ολοκληρώματα: $\int_a^b f(u(x)) u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du$.

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή Διάλεξης

Εισαγωγή Στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα – Άθροισμα Riemann

Η Μέθοδος Της Αντικατάστασης

Άλλοι Τύποι Ολοκληρωμάτων

Εμβάθυνση Στα Αόριστα Ολοκληρώματα

Σύνοψη Διάλεξης

Λογάριθμος Ως Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Ολοκλήρωμα $\frac{1}{x}$

Όταν a και b έχουν το ίδιο πρόσημο:

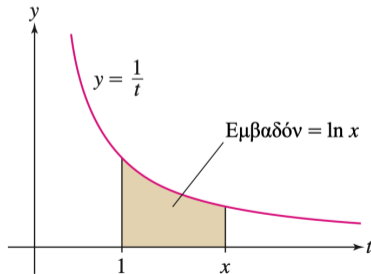
$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a}.$$

Θέτοντας $a = 1$:

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0.$$

Γεωμετρική Ερμηνεία

Το $\ln x$ ισούται με το **εμβαδόν** κάτω από την υπερβολή $y = \frac{1}{t}$ από 1 ως x .



(Σχήμα 3.14: $\ln x$ ως εμβαδόν)

Τόξο Ημιτόνου Ως Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Ολοκλήρωμα $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Από τον τύπο της παραγώγου:

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C.$$

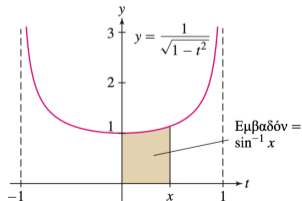
Αφού $\sin^{-1} 0 = 0$, θέτοντας $a = 0$:

$$\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 < t < 1.$$

Γεωμετρική Ερμηνεία

Το $\sin^{-1} x$ ισούται με το **εμβαδόν** κάτω από την καμπύλη

$y = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ από 0 ως x .



(Σχήμα 3.15: $\sin^{-1} x$ ως εμβαδόν)

Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Το \arcsin Ως Ορισμένο Ολοκλήρωμα

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C.$$

Αφού $\sin^{-1} 0 = 0$: $\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 < t < 1.$

Τύποι Αντίστροφων Τριγωνομετρικών

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + C \quad (3)$$

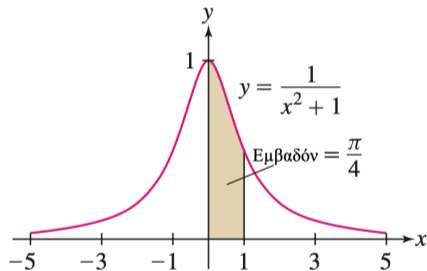
Παράδειγμα 3.4.1: \arctan

Παράδειγμα (3.4.1)

Να υπολογίσετε $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$.

Λύση

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \tan^{-1} x \Big|_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$



(Σχήμα 3.16: Η σκιασμένη περιοχή έχει εμβαδόν ίσο με $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$.)

Σχόλιο

Οι τύποι $\cos^{-1} x$, $\cot^{-1} x$, $\csc^{-1} x$ παραλείπονται διότι οι παράγωγοί τους είναι αντίθετες από εκείνες των $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, $\sec^{-1} x$ αντίστοιχα.

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή Διάλεξης

Εισαγωγή Στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα – Άθροισμα Riemann

Η Μέθοδος Της Αντικατάστασης

Άλλοι Τύποι Ολοκληρωμάτων

Εμβάθυνση Στα Αόριστα Ολοκληρώματα

Σύνοψη Διάλεξης

Ορισμός (3.5.1 – Γνήσια Ρητή Συνάρτηση)

Η $\frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι **γνήσια ρητή** αν και μόνο αν $\deg(P) < \deg(Q)$.

Μέθοδος Μερικών Κλασμάτων

Επιτρέπει τον **διαχωρισμό** μιας περίπλοκης ρητής σε άθροισμα απλούστερων ρητών ευκολότερα ολοκληρώσιμων. Εφαρμόζεται όταν το $Q(x)$ παραγοντοποιείται ως γινόμενο:

- **Γραμμικοί παράγοντες** $(x - a)^M$: συνεισφέρουν

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_M}{(x - a)^M}$$

- **Ανάγωγοι δευτεροβάθμιοι** $(x^2 + ax + b)^N$ ($\Delta < 0$): συνεισφέρουν

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + ax + b} + \cdots + \frac{A_Nx + B_N}{(x^2 + ax + b)^N}$$

Παράδειγμα 3.5.2: Εύρεση Σταθερών

Παράδειγμα (3.5.2)

Να υπολογίσετε $\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}$.

Λύση

$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$. Αναζητούμε: $\frac{1}{(x - 2)(x - 5)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 5}$.

Πολλαπλασιασμός επί $(x - 2)(x - 5)$: $1 = A(x - 5) + B(x - 2)$.

Εξισώνοντας συντελεστές: $A + B = 0$ και $-5A - 2B = 1$, οπότε $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{3}$.

$$\int \frac{dx}{(x - 2)(x - 5)} = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x - 2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x - 5} = -\frac{1}{3} \ln |x - 2| + \frac{1}{3} \ln |x - 5| + C.$$

Παράδειγμα 3.5.3: Τριωνυμικός Παρονομαστής

Παράδειγμα (3.5.3)

Να υπολογίσετε $\int \frac{x^2 + 2}{(x-1)(2x-8)(x+2)} dx$.

Λύση

$$\frac{x^2 + 2}{(x-1)(2x-8)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x-8} + \frac{C}{x+2}.$$

Πολλαπλασιασμός και αντικατάσταση τιμών: $x = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{6}$, $x = 4 \Rightarrow B = 1$,
 $x = -2 \Rightarrow C = \frac{1}{6}$.

$$\int \frac{x^2 + 2}{(x-1)(2x-8)(x+2)} dx = -\frac{1}{6} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|2x-8| + \frac{1}{6} \ln|x+2| + C.$$

Παράδειγμα 3.5.4: Επαναλαμβανόμενοι Παράγοντες

Παράδειγμα (3.5.4)

Να υπολογίσετε $\int \frac{3x-9}{(x+2)^2(x-1)} dx$.

Λύση

$$\frac{3x-9}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1}$$

Απαλοιφή παρονομαστών: $3x-9 = A(x-1)(x+2) + B(x-1) + C(x+2)^2$.

$$x=1 \Rightarrow -6 = 9C \Rightarrow C = -\frac{2}{3}, \quad x=-2 \Rightarrow -15 = -3B \Rightarrow B=5,$$

$$x=0 \Rightarrow -9 = -2A - B + 4C \Rightarrow A = \frac{2}{3}.$$

$$\int \frac{3x-9}{(x-1)(x+2)^2} dx = \frac{2}{3} \ln|x+2| - \frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{5}{x+2} + C.$$

Διαίρεση Πολυωνύμων (3.5.2)

Μέθοδος

Αν $\deg(P) \geq \deg(Q)$, εκτελούμε **διαίρεση πολυωνύμων**:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = g(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

όπου g πολυώνυμο και R/Q γνήσιο. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε μερικά κλάσματα στο R/Q .

Παράδειγμα (3.5.6)

Να υπολογίσετε $I = \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x-1} dx$.

Λύση

Διαίρεση: $\frac{x^3 + x^2 + 1}{x-1} = x^2 + 2x + 2 + \frac{3}{x-1}$.

$$I = \int \left(x^2 + 2x + 2 + \frac{3}{x-1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 3 \ln|x-1| + c.$$

Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες (3.5.3)

Θεώρημα (Πρόταση 3.5.7 – Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες)

Έστω $f(x)$, $g(x)$ παραγωγίσιμες σε Δ . Τότε:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

ή ισοδύναμα:

$$\int f dg = f \cdot g - \int g df.$$

Σημείωση 3.5.8 – Εξαγωγή Από Κανόνα Γινομένου

$$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx} \Rightarrow \int f \frac{dg}{dx} dx = fg - \int g \frac{df}{dx} dx.$$

Παράδειγμα 3.5.9: Εφαρμογές Ολοκλήρωσης Κατά Παράγοντες

Παράδειγμα (3.5.9 (α, β))

α) $\int x \cos x \, dx$

β) $\int x e^x \, dx$

Λύση

(α)

$$\int x \cos x \, dx = \int x d(\sin x) = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + c.$$

(β)

$$\int x e^x \, dx = \int x d e^x = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + c = e^x(x - 1) + c.$$

Παράδειγμα 3.5.9: Περισσότερες Εφαρμογές

Παράδειγμα (3.5.9 (γ, δ))

$$\gamma) I_3 = \int x^2 \ln x \, dx$$

$$\delta) \int \ln x \, dx$$

Λύση

(γ)

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3} \int \ln x \, d(x^3) = \frac{1}{3} \left(x^3 \ln x - \int x^3 \cdot \frac{1}{x} \, dx \right) = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c.$$

(δ)

$$\int \ln x \, dx = \int (x)' \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c.$$

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή Διάλεξης

Εισαγωγή Στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα – Άθροισμα Riemann

Η Μέθοδος Της Αντικατάστασης

Άλλοι Τύποι Ολοκληρωμάτων

Εμβάθυνση Στα Αόριστα Ολοκληρώματα

Σύνοψη Διάλεξης

Βασικές Έννοιες Που Καλύφθηκαν

1. **Ορισμένο Ολοκλήρωμα** $\int_a^b f(x) dx$: Οριακή τιμή αθροισμάτων Riemann. Υπολογίζει το προσημασμένο εμβαδόν κάτω από την καμπύλη f .
2. **Θεμελιώδες Θεώρημα Λογισμού**: Η σύνδεση παραγώγισης και ολοκλήρωσης:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

3. **Μέθοδος Αντικατάστασης (u -substitution)**:

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = \int f(u) du.$$

4. **Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις**: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + C$, $\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1}x + C$.
5. **Μερικά Κλάσματα**: Αποσύνθεση ρητής συνάρτησης σε απλούστερα κλάσματα για αναλυτική ολοκλήρωση.
6. **Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες**: $\int f dg = f \cdot g - \int g df$.

Βασικό Μήνυμα

Ο Ολοκληρωτικός Λογισμός ενοποιεί γεωμετρία, ανάλυση και αλγεβρικές τεχνικές σε ένα ισχυρό πλαίσιο για τα Μαθηματικά και τις εφαρμογές τους.

Σας ευχαριστώ θερμά για την προσοχή σας!

Απορίες – Ερωτήσεις;



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS