ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

“Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ’αυτό μένειν”
Ηράκλειτος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Το παρόν υλικό διατίθεται αποκλειστικά για τους φοιτητές του μαθήματος Γενικά Μαθηματικά Ι του Τμήματος Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών..

Δεκέμβρης 2025

Περιεχόμενα

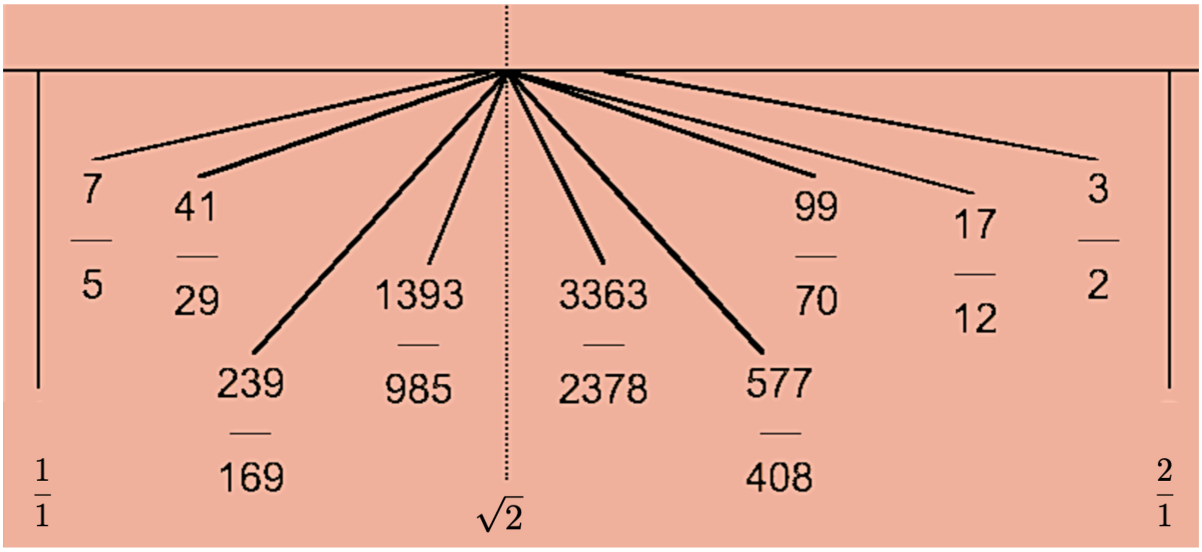
I

1 Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά

Το φως αποτέλεσε για αιώνες ένα μυστήριο για τον άνθρωπο. Στα έργα των ανθρώπων, όπως στους μύθους, στις επιστήμες, ακόμη και στις θρησκείες, το φως έπαιζε πάντοτε ιδιαίτερο ρόλο. Οι πρώτες εικόνες που υπέπεσαν στην αντίληψη του ανθρώπου ήταν οι ευθύγραμμες ακτίνες του φωτός και ο κυκλικός δίσκος του Ήλιου και των πλανητών του. ’Ηταν φυσικό λοιπόν όταν η Γεωμετρία μπήκε στη ζωή των ανθρώπων με την εμπειρική της μορφή, τα πρώτα γεωμετρικά σχήματα που κατασκευάστηκαν να είναι η ευθεία και ο κύκλος. Έτσι φθάσαμε στο σημείο η ευθεία και ο κύκλος να αποκτήσουν ιδιαίτερη σημασία, ιδίως μετά την ανακάλυψη της απόδειξης όπου θεωρούνταν ανεπίτρεπτη η επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος χωρίς την χρήση του χάρακα και του διαβήτη. Η εισαγωγή της Γεωμετρίας άλλαξε την ποιότητα της ανθρώπινης σκέψης και την οδήγησε από την πρακτική στη θεωρητική αντιμετώπιση των πραγμάτων και στην παραγωγή της γνώσης. Η φύση λοιπόν σηματοδότησε την πρώτη μεγάλη ερευνητική διείσδυση της ανθρώπινης σκέψης για την ερμηνεία και την κατανόηση της φυσικής πραγματικότητας. Οι πραγματείες του Αριστοτέλη και η θεμελίωση της Γεωμετρίας από τον Ευκλείδη δημιούργη- σαν το υπόβαθρο στο οποίο βασίστηκαν μετά απο πολλούς αιώνες ο Γαλιλαίος και ο Νεύτωνας, προκειμένου να διαμορφώσουν τη σύγχρονη αντίληψη της Φυσικής δίνοντας με αυτό τον τρόπο το έναυσμα στην εξέλιξη της μαθηματικής Επιστήμης, η οποία με αυτόν τον τρόπο εξελίσσεται μέσα απο μια σειρά σκέψεων και πράξεων που κάθε μια οικοδομείται επάνω στις προηγούμενες. Πολλοί αρχαίοι λαοί όπως οι Σουμέριοι, οι Αιγύπτιοι, οι Κινέζοι και άλλοι χρησιμοποιούσαν άτυπες μαθηματικές πράξεις, όμως, τα μαθηματικά ως μια έννοια που δηλώνει επιστήμη εμφανίζονται για πρώτη φορά στην αρχαία ελλάδα. Ο διακεκριμένος Γάλλος ιστορικός Αρνό Ρεϋμόν έγραψε: «*Σε σύγκριση με τις εμπειρικές και σκόρπιες γνώσεις που οι λαοί της Ανατολής συγκέντρωσαν με τη δουλειά τους στη διάρκεια πολλών αιώνων, η ελληνική επιστήμη είναι ένα θαύμα. Εδώ για πρώτη φορά η ανθρώπινη σκέψη κατανόησε ότι πρέπει να καθορίσει έναν αριθμό γενικών αρχών και να βγάλει απ’ αυτές ορισμένες αλήθειες που είναι τ’ αναγκαίο αποτέλεσμά τους*». Δυο είναι τα στοιχεία που υποννοεί ο Ρεϋμόν και έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην πορεία της εξέλιξης των μαθηματικών, η έννοια απόδειξης, και η ιδέα της αξιωματικής θεμελίωσης. Η έννοια της απόδειξης ξεκίνησε από τον Θαλή, αναπτύχθηκε από τον Πυθαγόρα και συστηματοποιήθηκε και τελειοποιήθηκε από τον Πλάτωνα, τον Αριστοτέλη, τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη. Η σύλληψη της ιδέας της αξιωματικής θεμελίωσης οφείλεται στους αρχαίους Έλληνες. Κλασικό παράδειγμα είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία, η αρχιτεκτονική της αποδεικτικής διαδικασίας απο τον Αριστοτέλη και τον Πυθαγόρα και τους υποστηρικτές του που ονομάστηκαν Πυθαγόρειοι, κ.α.λ. Τα έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών έβαλαν τα θεμέλια και αποτέλεσαν την βάση για την πιό πέρα εξέλιξη των μαθηματικών επιστημών, όπως Θεωρίας Αριθμών, μαθηματικής Λογικής, Αλγεβρας και Απειροστικού Λογισμού. Στο πλαίσιο μιας σφαιρικής πραγμάτευσης των μαθηματικών και με κίνητρο την καταννόησή τους, δίνουμε μερικά στοιχεία της κατηγοριοποίησης των μαθηματικών απο το 3000 π.Χ μέχρι και τον Έκτο αιώνα μ.Χ, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν υπάρχουν αλληλεπικαλύψεις μεταξύ διαφορετικών κατηγοριών.

1.1 Αρίθμηση και Αριθμοί

Σήμερα, δεν υπάρχει αμφιβολία ότι όλοι οι αρχαίοι πολιτισμοί είχαν αναπτύξει κάποια μορφή αρίθμησης. Για παράδειγμα, στην Παλαιολιθική Εποχή είχαμε χάραξη εγκοπών σε ξύλο όπου για το *ένα* χρησιμοποιούνταν το το σύμβολο I και για το *δυο* το σύμβολο I I. Πολύ αργότερα, το ελληνικό σύστημα αρίθμησης χρησημοποιεί γράμματα του αλφαβήτου αντί για αριθμούς, ενώ δεν είχαν διαμορφωθεί ακόμη τα αραβικά ψηφία 1, 2, 3, ... τα οποία χρησιμοποιούμε και σήμερα, καθώς και το σύστημα του δεκαδικού τρόπου αναγραφής σε στήλες μονάδων, δεκάδων κ.λ.π., το οποίο πρώτοι εφάρμοσαν οι Ινδοί. Είναι σχεδόν βέβαιο ότι η μέτρηση στα πρώτα της βήματα ήταν δυαδική, όμως αργότερα συναντάμε βάσεις αρίθμησης του πέντε του δέκα και του είκοσι, που υπαγορεύτηκαν ουσιαστικά απο την χρήση του χεριού στην μέτρηση. Η εγγενής ανάγκη λοιπόν των ανθρώπων να εκτιμήσουν την διάρκεια της ημέρας ή το πλήθος διάφορων οντοτήτων, οδήγησε τους πρώτους μαθηματι- κούς στην ιστορία της ανθρωπότητας να δημιουργήσουν μία ομάδα συμβόλων που αποτέλεσε το αρχικό σύστημα αρίθμησης. Οι αριθμοί ξεκινούσαν από τη μονάδα, που αντιστοιχούσε στην ύπαρξη ενός αντικειμένου, και συνέχιζαν με ανάλογο τρόπο. Επομένως, το πρώτο σύστημα αρίθμησης ήταν αυτό που στη συνέχεια της μαθηματικής ιστορίας ονομάστηκε «Φυσικοί Αριθμοί». Η Θεωρία Αριθμών αποτελεί ακόμη έναν τομέα που η επινόησή του οφείλεται στους αρχαίους Έλληνες. Σημαντική είναι η συνεισφορά του Πυθαγόρα όπου τον έκτο αιώνα π.Χ. ιδρύει την ομώνυμη σχολή στον Κρότωνα της σημερινής Νότιας Ιταλίας στην οποία κυριάρχησε η ιδέα ότι «τα πάντα είναι αριθμοί». Οι Πυθαγόρειοι, αντιλαμβάνο- νταν τους αριθμούς ως πλήθος ορισμένων αντικειμένων που σχετίζονται με τα γεωμετρικά σχήματα. Έτσι η μονάδα σχετίζεται με το σημείο, η δυάδα με την γραμμή, η τριάδα με το τρίγωνο και η τετράδα ή τετρακτύς με το τετράεδρο, κ.α.λ. με αυτό τον τρόπο αντιστοίχησης των αριθμών κατόρθωσαν μια πρώτη βασική ταξινόμηση των αριθμών σε άρτιους και περιτ- τούς. Οι Πυθαγόρειοι παρίσταναν έναν άρτιο αριθμό με μια σειρά «ψήφων» η οποία μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα μέρη. Ένας περιττός αριθμός, αντίθετα, δεν μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα μέρη, γιατί πάντοτε περισσεύει μία ψήφος. Γενικώτερα, οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι οι αριθμοί ήταν μεταφυσικές οντότητες, φορείς αλήθειας που μπορούσαν να καθορίσουν την μοίρα των ανθρώπων. Υποστηρίζεται απο μερικούς ιστορικούς, ότι η αντίληψη του ίδιου του Πυθαγόρα ήταν ότι αν οι αριθμοί είχαν μορφές, τότε ίσως και αντίστροφα όλες οι μορφές θα μπορούσαν να συσχετιστούν με αριθμούς, και σαν παράδειγμα ενός τέτοιου συσχετισμού αριθμού από κουκίδες με ένα περίπλοκο σχήμα, θα μπορούσε να δει κανείς στους αστερισμούς. μεγάλο μέρος του έργου των Πειθαγορείων αποτέλεσε τη βάση για το μυστικισμό που αναπτύχθηκε αργότερα πάνω στους αριθμούς. Πολλοί αρχαίοι φιλόσοφοι, όπως ο νεοπλατωνικός φιλόσοφος ο Αμβλιχος (περίπου στα 320 μ.Χ.) που άσκησε μεγάλη επιρροή, αποδίδουν στον Πυθαγόρα την ανακάλυψη των φίλιων αριθμών 284 και 220. Δύο θετικοί ακέραιοι είναι *φίλιοι* αν ο καθένας ισούται με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του άλλου. Έτσι οι αριθμοί 284 και 220 είναι φίλιοι αριθμοί αφού οι γνήσιοι διαιρέτες του 220, δηλαδή οι 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 και 110, δίνουν άθροισμα 284 και οι γνήσιοι διαιρέτες του 284, δηλαδή οι 1, 2, 4, 71 και 142, δίνουν άθροισμα 220. Το ζεύγος αυτών των αριθμών απέκτησε μια μυστικιστική αίγλη και δημιούργησε την προκατάληψη ότι δύο φυλακτά που έφεραν αυτούς τους αριθμούς επισφράγιζαν την τέλεια φιλία μεταξύ αυτών που τα φορούσαν. Οι αριθμοί άρχιζαν να παίζουν σημαντικό ρόλο στα μάγια, τα ξόρκια, την αστρολογία και την κατασκευή του ωροσκόπιου. Σε καθαρά επιστημονικό επίπεδο, οι αριθμοί από την εποχή του Πυθαγόρα και εντεύθεν ήταν ένα θέμα που συνάρπαζε τους μαθηματικούς της εποχής εκείνης. Σε ένα απο τα πιό σημαντικά συγγράματα όλων των εποχών, τα «Στοιχεία» που γράφτηκε στην Αλεξάνδρεια περί το 300 π.Χ, ο Ευκλείδης συνέλεξε τα σημαντικότερα μαθηματικά μέχρι εκείνη την εποχή. Τα βιβλία VII, VIII, IX απο το συγκεκριμένο έργο του Ευκλείδη αποτελούν τα αρχαιότερα βιβλία θεωρίας αριθμών. Σε αυτά υπάρχουν σπουδαία συμπεράσματα που αφορούν τους πρώτους αριθμούς. Απο αυτά ξεχωρίζουμε το *Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής* που μας λέει ότι κάθε φυσικός γράφεται με μοναδικό τρόπο σαν γινόμενο πρώτων παραγόντων. με λίγα λόγια, οι πρώτοι αριθμοί είναι η βάση κατασκευής όλων των αριθμών. Ενα άλλο σημαντικό αποτέλεσμα πάνω στους πρώτους αριθμούς έχουμε απο τον Ερατοσθένη ο οποίος ασχολήθηκε με τους αριθμούς και λέγεται πως επινόησε ένας απλό αλγόριθμο για την εύρεση όλων των πρώτων αριθμών μέχρι έναν συγκεκριμένο ακέραιο. Ο αλγόριθμος αυτός έμεινε στην ιστορία σαν το «κόσκινο του Ερατοσθένη». Αλλα σημαντικά



Σχήμα 1.1 *Η ιδέα της κατασκευής των πραγματικών αριθμών από τον Εύδοξο.*

θέματα που πραγματεύονται τα «Στοιχεία» στην θεωρία αριθμών είναι η διαιρετότητα, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (με τον περίφημο αναδρομικό «Ευκλείδειο αλγόριθμο»), το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, η παραγοντοποίηση σε πρώτους, η απόδειξη του απειράριθμου των πρώτων, οι τέλειοι αριθμοί, οι γεωμετρικές ακολουθίες, τα αθροίσματα γεωμετρικών σειρών και οι άρρητοι αριθμοί. ’Ομως αυτό που ξεχωρίζει και θεωρείται το σπουδαιότερο μαθηματικό επίτευγμα όλων των εποχών στην θεωρία αριθμών, είναι η κατασκευή των άρρητων αριθμών που βασίζεται στην θεωρία των λόγων του Εύδοξου και βρίσκεται στο βιβλίο V, ορισμός 5, των Στοιχείων του Ευκλείδη. Όπως είπαμε και πιο πριν, οι Πυθαγόρειοι είχαν στηρίξει όλη την κοσμοθεωρία τους στο ότι ο λόγος δύο οποιωνδήποτε μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο φυσικών αριθμών και προσπαθούσαν να επιλύσουν προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο. Ο λόγος στους Πυθαγόρειους αναφέρεται σε μια κλασματική σχέση $\frac{\alpha}{\beta}$ δύο μεγεθών. Η γραφή $\frac{\alpha}{\beta}$ δεν σημαίνει διαίρεση αλλά είναι συμβολική γραφή της ισότητας α=q β, όπου q τυχαίος ρητός αριθμός. Η σχέση αυτή προκύπτει όταν τα α και β είναι σύμμετρα, δηλαδή υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ και ν ώστε να ισχύει α=μ·γ και β=ν·γ ($q = \frac{\mu}{\nu}$). Το γ λέγεται κοινό μέτρο των α και β. Η πρώτη κρίση ήρθε με την ανακάλυψη της ασυμμετρίας, όταν δηλαδή δεν μπόρεσαν να βρουν ένα κοινό μέτρο που να μετράει την πλευρά α και την διαγώνιο δ ενός τετραγώνου. με λίγα λόγια, δεν υπαρχουν ακέραιοι θετικοί αριθμοί μ και ν τέτοιοι ώστε $\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\mu}{\nu}$. Ο Εύδοξος ο Κνίδιος (407 - 354 π.Χ.) ήταν αυτός που έβγαλε τους Πυθαγόρειους από την κρίση θεμελιώνοντας ένα μεγάλο μέρος της μελέτης των άρρητων αριθμών. Ας δούμε όμως πώς οδηγηθήκαμε στην ύπαρξη των αρρήτων. Παραθέτουμε τους πέντε πρώτους ορισμούς από το βιβλίο V των «Στοιχείων» του Ευκλείδη.

Η θεμελίωση των άρρητων αριθμών από τον Εύδοξο

(α) *μέρος ἐστί μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.* (β) *Πολλαπλάσιον δ τό μεῖζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.* (γ) *Λόγος ἐστί δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητὰ ποια σχέσις.* (δ) *Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἅ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.* (ε) *’Εν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται ε ναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ’ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμόν ἑκάτερον ἑκατέρου ἤ ἅμα ὑπερέχῃ ἤ ἅμα ἴσα ᾖ ἤ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.*

Ο ορισμός (ε) μας λέει ότι α, β, γ, δ είναι φυσικοί αριθμοί, τοτε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

αν και μόνον αν ισχύουν τα κάτωθι:

(1) Αν μ και ν είναι θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε μα<νβ, τότε μγ<νδ.

(2) Αν μ και ν είναι θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε μα>νβ, τότε μγ>νδ.

Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι οι λόγοι μεγεθών δεν είναι πάντα ίσοι με τους λόγους των ακεραίων, δηλαδή τους ρητούς. Για παράδειγμα, αν α και δ είναι η πλευρά και η διαγώνιος αντίστοιχα ενός τετραπλεύρου, τότε ο λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ είναι ίσος με $\sqrt{2}$ και είναι άρρητος.

Οι σχέσεις (1) και (2) είναι ισοδύναμες αντίστοιχα με τις παρακάτω σχέσεις $(1')$ και $(2')$:

$(1')$ Αν $\frac{\mu}{\nu}$ είναι θετικός ρητός τέτοιος ώστε $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\mu}{\nu}$, τότε $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\mu}{\nu}$.

$(2')$ Αν $\frac{\mu}{\nu}$ είναι θετικός ρητός τέτοιος ώστε $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\mu}{\nu}$, τότε $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\mu}{\nu}$.

Αυτό στην πράξη σημαίνει ότι

$(1'')$ Το σύνολο όλων των θετικών ρητών που είναι μεγαλύτεροι απο το $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ακριβώς το ίδιο με το σύνολο όλων των θετικών ρητών που είναι μεγαλύτεροι απο το $\frac{\gamma}{\delta}$.

$(2'')$ Το σύνολο όλων των θετικών ρητών που είναι μικρότεροι απο το $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ακριβώς το ίδιο με το σύνολο όλων των θετικών ρητών που είναι μικρότεροι απο το $\frac{\gamma}{\delta}$.

Συνεπώς με βάση τον ορισμό του Εύδοξου καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι σε κάθε λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$αντισοιχούν δυο κλάσεις συνόλων, η κλάση $\mathscr{A}_{\frac{\alpha}{\beta}}$ που περιέχει το σύνολο όλων των θετικών ρητών που είναι μικρότεροι απο το $\frac{\alpha}{\beta}$ και την κλάση $\mathscr{B}_{\frac{\alpha}{\beta}}$ που περιέχει το σύνολο όλων των θετικών ρητών που είναι μεγαλύτεροι απο το $\frac{\alpha}{\beta}$. Επομένως,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{αν και μόνον αν } \mathscr{A}_{\frac{\alpha}{\beta}} = \mathscr{A}_{\frac{\gamma}{\delta}} \text{ και } \mathscr{B}_{\frac{\alpha}{\beta}} = \mathscr{B}_{\frac{\gamma}{\delta}}.$$

Αν αγνοήσουμε το λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$ και εστιάσουμε στο ζευγάρι $(\mathscr{A}_{\frac{\alpha}{\beta}}, \mathscr{B}_{\frac{\alpha}{\beta}})$ παρατηρούμε ότι ικανοποιείται η ακόλουθη σχέση:

$(3'')$ Για κάθε ρητό $q \in \mathscr{A}_{\frac{\alpha}{\beta}}$ και κάθε ρητό $p \in \mathscr{B}_{\frac{\alpha}{\beta}}$ ισχύει $q < p$.

Πολλά χρόνια αργότερα ο Dedekind ορίζει ως *τομή*, ένα ζευγάρι κλάσεων $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ που τα στοιχεία τους είναι ρητοί και το οποίο είναι το ευρύτερο δυνατό που έχει την ιδιότητα $(3'')$, και απέδειξε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι ισοδύναμο με το σύνολο όλων των τομών. Χαρακτηριστική είναι η αλληλογραφία των Lipschitz και Dedekind για το συγκεκριμένο θέμα, την οποία λόγω της τεράστιας σπουδαιότητας του αποτελέσματος, για ιστορικούς λόγους παραθέτουμε παρακάτω:

Από το γράμμα του Lipschitz στον Dedekind

I cannot deny relevancy of your definition; I just think that it differs only in the form of expression from what the ancients ascertained, not in the essence. The only thing I can say, is that I believe the definition provided by Euclid (Book V, definition 4) and your definition are equally satisfactory.

Η απάντηση του Dedekind στον Lipschitz

The Euclidean principles alone—without inclusion of the principle of continuity, which they do not contain—are incapable of establishing a complete theory of real numbers as the proportions of the quantities. On the other hand, however, by means of his theory of irrational numbers, the perfect model of a continuous region would be created, which for just that reason would be capable of characterizing any proportion by a certain individual number contained in it (letter to Rudolph Lipschitz, 6 October 1876).

1.2 Η Λογική ως επιστήμη

Σύμφωνα με πολλούς ιστορικούς, από την εποχή της ανθρώπινης πολιτισμικής ανάπτυξης της Νεολιθικής περιόδου, όπου ο άνθρωπος δάμασε τη φωτιά, εγκατέλειψε τη νομαδική ζωή και επιλέγει να μείνει μόνιμα σε ένα τόπο, η λογική δομή της απόδειξης που εμφανίζεται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη έχει επηρεάσει τον επιστημονικό τρόπο της ανθρώπινης σκέψης περισσότερο από οποιοδήποτε άλλο κείμενο στον κόσμο. Απο αρχαιολογικές και ιστορικές μαρτυρίες που έχουμε μέχρι και σήμερα, ενώ έχουν βρεθεί υπολογιστικές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων σε αρχαίους πολιτισμούς όπως των Βαβυλωνίων, των Αιγυπτίων, των Ινδών και των Κινέζων, δέν έχουν βρεθεί αποδεικτικές διαδικασίες επίλυσης αυτών των προβλημά- των. με λίγα λόγια, οι λαοί αυτοί είχαν καλλιεργήσει αξιόλογα μαθηματικά, αλλά δεν τους απασχολούσε ή δεν μπορούσαν να δικαιολογήσουν το γιατί ένα πρόβλημα λύνεται με κάποιο συγκεκριμένο τρόπο, και έτσι δεν επινόησαν μαθηματική απόδειξη που να στηρίζεται σε παραγωγικό κι επαγωγικό συλλογισμό. Αυτό έγινε αργότερα τον 6ο αιώνα π.Χ. όταν οι πόλεις της μεγάλης Ελλάδας, η Μικρά Ασία και το δυτικό τμήμα του ελληνικού κόσμου (Νότια Ιταλία και Σικελία) ανέπτυξαν έντονη πνευματική δραστηριότητα και έγιναν κέντρα κοινωνικοπολιτικών αντιπαραθέσεων. Ο ελληνικός φιλοσοφικός στοχασμός της εποχής εκείνης είχε λογοτεχνική και πολιτιστική παράδοση που έφτανε έως την εποχή του Ομήρου. Ακολουθώντας την ιστορική σειρά, δεδομένου ότι η επιστροφή στο παρελθόν είναι απαραίτη- τη να φωτίσουμε το παρόν, θα ξεκαθαρίσουμε απο την αρχή ότι στην μακρόχρονη περίοδο που φθάνει μέχρι τον Έγελο (1770-1831) η έννοια της Λογικής θεωρείται ανάλογη με αυτήν της αρχαίας διαλεκτικής ή ακόμα ταυτίζεται με αυτήν. Στην ρίζα της λέξης *διαλεκτική* υπάρχει το ουσιαστικό *λόγος* που παράγεται απο το *λέγω*, και οι κύριες σημασίες του είναι η η *ομιλία* και το *λογικό*. μπορούμε να πούμε ότι η διαλεκτική και η λογική παρουσιάζουν πολύ στενή συγγένια, με την διαφορά ότι ο όρος λογική προσδιορίζει την θεωρία της λογικής σκέψης, ενώ η διαλεκτική είναι κυρίως η τέχνη της εφαρμογής στην συζήτηση των γνωστών κανόνων της λογικής. Θα μπορούσε να πει σήμερα κάποιος ότι ο θεωρητικός της λογικής με τον διαλεκτικό έχει την ίδια σχέση μ’ αυτή που έχει ο νομικός συγγραφέας με τον δικηγόρο. Στην συνέχεια με τον όρο Λογική θα εννοούμε την μελέτη αποδείξεων όπου οι υποθέσεις που θεωρούμε είναι αληθείς και πρωταρχικές. Η Λογική σε πρώιμο στάδιο επικεντρώνεται στην ανάλυση επιχειρημάτων – και όχι στην ανάλυση της δομής μαθηματικών θεωριών. Η λογική απόδειξη πρωτοεμφανίστηκε και αναπτύχθηκε από τον Θαλή, τον κύριο εκπρόσωπο των Ιώνων φιλοσόφων (624 - 540 π.Χ.) σε μια εποχή ανάπτυξης και θεμελίωσης των μαθη- ματικών ως θεωρητικής επιστήμης, και συνεχίζεται μέχρι το Διόφαντο (γύρω στο 250 μ.Χ.). Πρώτος ο Θαλής εισήγαγε την λογική απόδειξη και χρησιμοποίησε πλήρη αποδεικτική διαδικασία για να δείξει την αλήθεια πολλών γεωμετρικών προτάσεων. Στην συνέχεια συστηματοποίησε αρκετές απο τις προηγούμενες μαθηματικές γνώσεις των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων και ανέπτυξε μια λογική δομή για τη Γεωμετρία, δηλαδή για πρώτη φορά στην ιστορία το σχήμα γίνεται αντικείμενο μελέτης και μαθηματικού στοχασμού. Στη συνέ- χεια ο Πυθαγόρας (580 - 496 π.Χ.), η σχολή των Πυθαγορείων καθώς και όλοι οι μεγάλοι μαθηματικοί που ακολούθησαν μέχρι το 300 π.Χ. (Θεόδωρος, Θεαίτητος, Εύδοξος, κ.α.), το έργο των οποίων περιγράφεται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, χρησιμοποίησαν και βελτίωσαν την αποδεικτική διαδικασία που εισήγαγε ο Θαλής. Ο Ηράκλειτος που γεννήθηκε επίσης στο Ιωνικό τμήμα του ελληνικού κόσμου (544 - 484 π.χ.) και ήταν μεταγενέστερος του Πυθαγόρα, βρίσκει στον λόγο την ουσία του κόσμου σε μία νοητική αρχή. Η σχέση των αντιθέτων του δεν εκφράζεται μόνον μέσω του κοινού λόγου, αλλά και ως πόλεμος που παράγει διαρκώς μέσω συγκρούσεων νέες ισορροπίες. Η παροιμιώδης φράση που χαρακτη- ρίζει τη φιλοσοφία του Ηρακλείτου είναι: *Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ’ αυτό μένειν.* μερικά χρόνια αργότερα μετά τον Ηράκλειτο, ένας άλλος Ελληνας φιλόσοφος, ο Παρμενίδης που γεννήθηκε στην Ελέα της μεγάλης Ελλάδας στα τέλη του 6ου αι. π.Χ. σε ένα περιβάλλον επηρεασμένο από τις απόψεις του Πυθαγόρα, υποστηρίζει ότι η Φιλοσοφία είναι μια εντελώς νέα μορφή γνώσης. Δεν συνδέεται δηλαδή ούτε με τη θρησκευτική πρακτική και την αρχαία σοφία αλλά και ούτε αποτελεί συνέχεια της Ιωνικής ιστορίας. Σύμφωνα με τις απόψεις του Παρμενίδη, η νόηση ταυτίζεται με το *είναι* και αυτό σημαίνει ότι το *ον* είναι αντικείμενο της νόησης, ενώ το *μη ον* δεν εκφράζεται με λέξεις και δεν μπορεί να γίνει αντιληπτό. Πέρα και πίσω από τον Κόσμο που μεταβάλεται, υπάρχει μια σταθερότητα την οποία εξασφαλίζει η νόησή μας. Η φιλοσοφία του Παρμενίδη έχει μια καθαρά λογική δομή που αρνιέται την εποπτεία και την εμπειρία και θεωρεί μοναδικό κριτήριο της αλήθειας το λογικό και δέχεται τη λογική σκέψη ως μοναδική πηγή της γνώσεως. Ο Παρμενίδης θεωρείται απο τον Αριστοτέλη, ο ιδρυτής και θεμελιωτής της ορθολογιστικής σκέψης και φιλοσοφίας. Ο όρος ορθολογισμός δημιουργήθηκε το 16ο αι. για να εκφράσει την τάση να εξηγούνται διάφορα θεολογικά ζητήματα με τη λογική. Βλέπουμε λοιπόν ότι όλοι οι προσωκρατικοί φιλόσοφοι όπου ο στοχασμός τους είναι προδρομικός της σωκρατικής σκέψης και της ελληνικής φιλοσο- φίας γενικότερα, θεωρούν ως την πεμπτουσία των μαθηματικών τη σύνδεσή τους με την λογική σκέψη. Ως λογική σκέψη εννοούν κατ΄ αρχήν τις αποδεικτικές διαδικασίες και στη συνέχεια την αξιωματική θεμελίωση με τους λογικούς κανόνες της, όπως αυτή παρουσιά- στηκε ολοκληρωμένα στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Μιλώντας πιο γενικά, οι προσωκρατικοί φιλόσοφοι ερμήνευσαν τα φυσικά φαινόμενα με την λογική και οδήγησαν τον άνθρωπο από τον μύθο στον λόγο, δηλαδή, από τις παλαιότερες μυθολογικές αφηγήσεις στη λογική εξήγηση του κόσμου. Και φτάνουμε χρονικά στον Σωκράτη (470– 399 π.Χ.), μία από τις σημαντικότερες φυσιογνωμίες του ελληνικού και παγκόσμιου πνεύματος και πο- λιτισμού. Αναρίθμητοι είναι οι μελετητές που έχουν ασχοληθεί με τον Σωκράτη, στους αιώνες που ακολού- θησαν το θάνατό του. Κυριότερες πηγές για τη ζωή και το έργο του είναι ο μαθητής του Πλάτων, ο ιστορικός Ξενοφών, ο Αριστοτέλης και ο συγγραφέας κωμωδιών Αριστοφά- νης. Ο Σωκράτης ήταν ο πρώτος που αντιλήφθηκε την αξία του ορισμού των εννοιών και πίστευε ότι η λογική και η αυτογνωσία ήταν αρκετές για να ζήσει κανείς μια καλή ζωή. Κατά την άποψή του, ο άνθρωπος στρέφεται από έξω προς τα μέσα, από την εξέταση της φύσης και του κόσμου προς την ψυχή και τον νου του. Παρότρυνε τους ανθρώπους να νοιαστούν για την ψυχή τους γιατί η ψυχή είναι ο χώρος των διανοητικών λειτουργιών καθώς και ο τόπος όπου έχει την έδρα της η ηθική συνείδηση. Απο την άλλη μεριά, θεωρεί ότι το σώμα ως εργαλείο της ψυχής χρειάζεται προσοχή και φροντίδα. Για να φτάσει στην αρχή των ηθικών εννοιών χρησιμοποίησε την επαγωγική συλλογιστική μέθοδο, όπου μέσα απο παραδείγματα παρμένα από την καθημερινότητα και την εμπειρία του αποσκοπούσε στην εξαγωγή καθολικών συμπερασμάτων τα οποία φτάνουν στην απόλυτη γνώση ενός θέματος. ’Ομως, ο Σωκράτης ήταν στραμμένος αποκλειστικά και μόνο στην εξέταση των ηθικών προβλημάτων και στην αναζήτηση μιας αξιόπιστης στάσης ζωής, και δεν ενδιαφέρθηκε για την λογική ανάλυση και επεξεργασία της μεθοδολογίας του - κάτι που όπως θα δούμε μετά θα επιχειρήσει συστηματικά ο Αριστοτέλης. Το 403 π.Χ. ο Σωκράτης οδηγήθηκε σε δίκη εξαιτίας της κατηγορίας εναντίον του ότι διαφθείρει με τις ιδέες του τους νέους. Ο φιλόσοφος καταδικάστηκε με βάση την κατηγορία σε θάνατο. Η *Απολογία*, έργο που έγραψε ο μαθητής του Πλάτων, δείχνει με ποιον τρόπο υπερασπίζεται ο Σωκράτης τον εαυτό του. Θα μπορούσε να σωθεί αν ήθελε αφού οι φίλοι του είχαν τη δυνατότητα να τον βοηθήσουν να αποδράσει, ο Σωκράτης όμως αρνήθηκε και ως νομοταγής πολίτης περίμενε τον θάνατο ειρηνικά και γαλήνια και ήπιε το κώνειο όπως πρόσταζε ο νόμος. Ο Πλάτωνας μετά το θάνατο του δασκάλου του φρόντισε να διασώσει και να μεταδώσει τις διδασκαλίες και τη μεγαλειώδη φυσιογνωμία του, γράφοντας τους γνωστούς σωκρατικούς διαλόγους. ’Ιδρυσε το 387 π.Χ. στην Αθήνα μία φιλοσοφική Σχολή την οποία ονόμασε Ακαδημία προς τιμή του ήρωα Ακάδημου και δίδαξε για 40 ολόκληρα χρόνια σύμφωνα με τα ιδανικά του και με το σωκρατικό πνεύμα. Πολλές φορές στους διαλόγους του ο Πλάτων διατυπώνει λογικές αρχές. Για παράδειγμα, στην Πολιτεία αναφέρει τον αποκαλούμενο *Νόμο της Αντίφασης*, σύμφωνα με τον οποίο είναι αδύνατο κάτι να ισχύει και να μην ισχύει ταυτόχρονα.

Πλάτωνας - **Νόμο της Αντίφασης** - Πολιτεία 436Β

Δῆλον ὅτι ταὐτὸν τἀναντία ποιεῖν ἢ πάσχειν κατὰ ταὐτόν γε καί πρὸς ταὐτὸν οὐκ ἐθελήσει ἅμα,...,

’Ομως, παρ’ όλο που και άλλες φορές ανακαλύπτει μέσα απο τα κείμενά του έγκυρες λογικές αρχές που αποτελούν παραδείγματα άτυπης λογικής, δεν έκανε καμιά συστηματική προσπάθεια να δημιουργήσει ένα σύστημα τέτοιων αρχών. Το σύνολο του έργου του Πλάτω- να κατατάσσεται μεταξύ των κορυφαίων έργων όλων των εποχών με τη μεγαλύτερη επιρροή μαζί με τον δάσκαλο του Σωκράτη και τον μαθητή του Αριστοτέλη.

1.2.1 Η Λογική ως σύστημα αξιωμάτων

Η Λογική ως σύστημα αξιωμάτων που καθορίζει ένα σύνολο κανόνων με τον οποίο σκεφτόμαστε, συνεννοούμαστε και επιχειρηματολογούμε όταν εξετάζουμε οποιοδήποτε γνωστικό πεδίο, αποτελεί προσωπική ανακάλυψη του Αριστοτέλη. Επιπλέον, ο Αριστοτέλης πιστεύει ότι πέραν της ύπαρξης της Λογικής και της αξιωματικής θεμελίωσης των μαθηματικών, σπουδαίο ρόλο παίζει η σωστή χρήση της γλώσσας που αντανακλά κατά την γνώμη του την σωστή λειτουργία της σκέψης η οποία με την σειρά της αποκαλύπτει τα στοιχεία για την αντικειμενική δομή του κόσμου. Γι' αυτό τον λόγο η λογική του Αριστοτέλη ασχολείται σχεδόν εξ ολοκλήρου με τον κατηγορηματικό συλλογισμό. μία από τις μεγαλύτερες εφευρέ- σεις του Αριστοτέλη ήταν η εισαγωγή των μεταβλητών που χρησιμοποιούσε μεταβλητά γράμματα να παριστάνουν έγκυρα συμπεράσματα στα «Αναλυτικά Πρότερα».

> Αριστοτέλης - Αναλυτικά Πρότερα 25α 14.
>
> Πρώτον μέν οϋν έστω στερητική καθόλου ή ΑΒ πρότασις.

Κάτι παρόμοιο έγινε όταν ο Αριστοτέλης χρησιμοποίησε δυο γράμματα για να ονομάσει μια ευθεία γραμμή στη Γεωμετρία:

> Αριστοτέλης - Ηθικά Νικομάχεια ν ν 12.
>
> ἴσαι αἱ ἐφ᾿ὧν ΑΑ ΒΒ ΓΓ ἀλλήλαις.

Στην ουσία τα έργα του Αριστοτέλη περιέχουν την αρχαιότερη γνωστή τυπική μελέτη της λογικής (δηλαδή έδωσε τις αρχές της συλλογιστικής που χρησιμοποιεί μεταβλητές για να δείξει την υποκείμενη λογική μορφή των επιχειρημάτων). Δεν μπορεί όμως κάποιος να παραβλέψει ότι η *Τυπική Λογική* είναι ο καρπός των πρώτων φάσεων της διανοητικής ανάπτυξης των ανθρώπων καί ικανοποιούσε απόλυτα τις ανάγκες του πνεύματός τους και της πρακτικής τους ζωής. Οι άνθρωποι της εποχής εκείνης για να γνωρίσουν τα πράγματα και τα φαινόμενα, έπρεπε να τα απομονώσουν απο τα άλλα και να τα μελετήσουν ένα - ένα ξεχωριστά για να έχουν καθαρότερη την εικόνα τους και να τα χωρίσουν στα συστατικά τους στοιχεία τα οποία τα έβλεπαν σαν αυθύπαρκτες, αμετάβλητες και ίδιες πάντα με τον ευατόν τους οντότητες, που συνδέονταν μεταξύ τους για να αποτελέσουν το όλον. 'Ετσι φυσιολογικά χωρίς να συνειδητοποιήσουν τι κάνουν, δημιούργησαν μια σειρά λογικών κανό- νων για την ερμηνεία των πραγμάτων. με αυτή την αφετηρία ο Αριστοτέλης εκθέτει στα "Αναλυτικά"το αυστηρό συλλογιστικό σύστημα της λογικής προσπαθώντας να καθορίσει τους νόμους και τους κανόνες με τους οποίους πρέπει να συλλογιζόμαστε για την αναζήτηση της Αλήθειας. Βέβαια η υιοθέτηση της Τυπικής Λογθκής δεν καθιστά την έννοια της 'Ατυπης Λογικής των προσωκρατικών κενή, διότι καμία τυπική λογική δεν μπορεί να αποτυπώσει όλες τις διαβαθμίσεις της φυσικής γλώσσας. Η σύγχρονη τυπική λογική αφορά την μελέτη των αποδείξεων και ακολουθεί και επεκτείνει αυτή του Αριστοτέλη. Δύο είναι τα βασικά χαρακτηριστικά μιάς απόδειξης: Οι προκείμενες (προκείμενη είναι η παραδοχή πως κάτι είναι αλήθεια) και η έγκυρη εφαρμογή επιχειρηματολογικών αρχών. Σήμερα δεχόμαστε ότι αυτά τα ουσιώδη χαρακτηριστικά μιας απόδειξης είναι ανεξάρτητα. Παρόλα που δεν είναι σαφές αν οι προσωκρατικοί φιλόσοφοι είχαν συνείδηση αυτού του γεγονότος, ο Αριστοτέλης φαίνεται ότι γνώριζε το γεγονός αυτό, πράγμα που φαίνεται από την διάκριση που κάνει μεταξύ *αποδεικτικού* και *διαλεκτικού συλλογισμού* στο *Τοπικά* και *Αναλυτικά Πρότερα*.

> Αριστοτέλης - Τοπικά Πρότερα 100α 25-30.
>
> Εστι δὴ συλλογισμὸς λόγος ἐν ᾧ τεθέντων τινῶν ἕτερόν τι τῶν κειμένων ἐξ ἀνάγκης συμβαίνει διὰ τῶν κειμένων, ἀπόδειξις μὲν οὖν ἐστίν, ὅταν ἐξ ἀληθῶν καί πρώτων ὁ συλλογισμὸς ᾖ, ἤ ἐκ τοιούτων ἅ διά τινων πρώτων καί ἀληθών της περί αὐτά γνώσεως τὴν ἀρχὴν εἴληφεν. διαλεκτικὸς δὲ συλλογισμὸς ὁ ἐξ ἐνδόξων συλλογιζόμενος.

με λίγα λόγια ο Αριστοτέλης λέει ότι *συλλογισμός* είναι μια συζήτηση όπου έχοντας υποθέσει κάποια πράγματα, μέσω αυτών προκύπτει κατ' ανάγκην κάτι διαφορετικο. Ο συλλογισμός είναι απόδειξη όταν οι υποθέσεις του είναι αληθείς ενώ διαλεκτικός είναι ο συλλογισμός που ξεκινά από γενικά αποδεκτές γνώμες. Με λίγα λόγια, με την απόδειξη καταλήγουμε στην αλήθεια με άμεσο τρόπο, ενώ ένα διαλεκτικό επιχείρημα μας οδηγεί στην αλήθεια με έμμεσο τρόπο και σε αυτή την περίπτωση δεν είναι κατ' ανάγκην το συμπέρασμα αληθές. με βάση αυτό το συμπέρασμα, ο Αριστοτέλης συνέδεσε τις υποθετικές προτάσεις με τη μαθηματική αλήθεια και την αποδεικτική διαδικασία. Αυτό σημαίνει ότι αν αποδειχθεί η αλήθεια μιας υποθετικής πρότασης της μορφής

αν p τότε q

και η πρόταση p είναι αληθής, τότε και η πρόταση q θα είναι υποχρεωτικά αληθής. Βέβαια στις υποθετικές προτάσεις υπάρχει περίπτωση να μην ισχύει η υπόθεση και να ισχύει το συμπέρασμα. Για παράδειγμα, αν p είναι η πρόταση "*τα τρίγωνα ΑΒΓ και* $A^{'}B^{'}\Gamma^{'}$ *είναι ίσα*" και q είναι η προταση "*τα τρίγωνα ΑΒΓ και* $A^{'}B^{'}\Gamma^{'}$ *έχουν ίσες γωνίες*", τότε σε αυτήν την υποθετική πρόταση όταν τα τρίγωνα είναι όμοια δεν ισχύει η υπόθεση και ισχύει το συμπέρασμα. Στον Προτασιακό Λογισμό που χρησιμοποιούμε σήμερα ο τρόπος αυτός συμπερασμού είναι γνωστός ως αποδεικτικός κανόνας *Modus Ponens* (*κανόνας επιβεβαίωσης*) και σχηματικά αποδίδεται ως εξής:

Modus Ponens

$$\frac{\begin{array}{c} p \longrightarrow q \\ p \text{ αληθής} \end{array}}{q \text{ αληθής}}$$

Ενας άλλος τρόπος συμπερασμού που είναι γνωστός ως αποδεικτικός κανόνας *Modus Tollens* (*κανόνας άρνησης*) είναι ο εξής:

Modus Ponens

$$\frac{\begin{array}{c} p \longrightarrow q \\ p \text{ όχι αληθής} \end{array}}{q \text{ όχι αληθής}}$$

Η χρήση της μεθόδου αυτής μάλλον υπεβλήθη στον Πλάτωνα απο τον Σωκράτη και τον Ζήνωνα τον Ελεάτη. Ισως αυτός είναι ο λόγος που ο Αριστοτέλης αναφέρεται στον Ζήνωνα ως εφευρέτη της μεθόδου της *απαγωγής στο άτοπο*.

μέσα απο αυτά τα λογικά σχήματα ο Αριστοτέλης ασχολείται αναγκαστικά με το ερώτη- μα πότε μια πρόταση είναι η άρνηση κάποιας άλλης. Η κατάταξη που έκανε ήταν τέτοια που η άρνηση μιας πρότασης είναι αντιφατική με αυτή, με την έννοια ότι πρέπει η μια να είναι αληθής και η άλλη ψευδής. Δηλαδή έχουμε: Αν παραστήσουμε με 1 την τιμή αλήθειας μιας αληθούς πρότασης και με 0 μιας ψευδούς, τότε ο πίνακας αλήθειας της άρνησης μιας πρότασης, όπως αυτή περιγράφεται απο τον Αριστοτέλη είναι η εξής:

Αληθοπίνακας άρνησης

P	$\neg P$
1	0
0	1

'Οπως στα μαθηματικά έχουμε τα αξιώματα που είναι προτάσεις που γίνονται αποδεκτές ως καθολικά αληθείς, έτσι και στην Λογική έχουμε τις *Λογικές Αρχές* όπου χαρακτηρίζονται οι θεμελιώδεις αρχές βάσει των οποίων βασίζονται και διευθύνονται οι ορθές διανοητικές ενέργειες του ανθρώπου.

Η τυπική λογική κατά τον Αριστοτέλη περιγράφεται μέσα από τέσσερις θεμελιώδεις νόμους (λογικές αρχές):

1. *Η αρχή της ταυτότητας*. Κάθε έννοια είναι η ίδια με τον εαυτό της ή με το σύνολο των γνωρισμάτων της, δηλαδή, σε κάθε συλλογισμό η έννοια πρέπει να χρησιμοποιείται με μια μόνο και την ίδια πάντοτε σημασία (αντίστοιχη της ανακλαστικής ιδιότητας στα μαθηματικά, $A = A$). Την Αρχή αυτή όρισε ο Αριστοτέλης λέγοντας:

> Αναλυτ. Προτ. Α΄ 32
>
> Δει παν το αληθές αυτό εαυτό ομολογούμενον είναι πάντη

2. *Η αρχή της αντίφασης*. Σύμφωνα με αυτόν το νόμο, κάθε έννοια δεν μπορεί να αντιφάσκει με τον εαυτό της, να είναι δηλαδή συγχρόνως ίδιο και όχι ίδιο με τον εαυτό της (το A δεν μπορεί να είναι συγχρόνως A και όχι A). Βέβαια πρέπει στο σημείο αυτό να γίνει διάκριση ανάμεσα στις αντιφάσεις της αντικειμενικής πραγματικότητας, που έχουν διαλεκτικό χαρακτήρα και όχι σε αυτές που υπάρχουν εσφαλμένοι συλλογισμοί.

> Αριστοτέλης - μεταφ. Γ΄ 3 -1005 - β - 19
>
> Το αυτό άμα υπάρχειν τε και μη υπάρχειν αδύνατον, τω αυτώ και κατά το αυτόν

Επί της Αρχής αυτής βασίζονται οι κανόνες "η άρνηση επί άρνησης είναι άμεση κατάφαση" και "η διπλή άρνηση είναι κατάφαση".

3. *Η αρχή του αποκλειόμενου τρίτου ή μέσου*. Δυο αντιφατικές έννοιες που αναφέρονται στο ίδιο πράγμα δεν μπορεί να είναι και οι δυο ψευδείς, δηλ. ανάμεσα στην απόδοση μιας ιδιότητας σε μια έννοια και στην ταυτόχρονη απόδοση μιας αντιφατικά αντίθετης ιδιότητας στην ίδια έννοια, δεν υπάρχει τρίτη λύση. Ορθή πρέπει να είναι είτε η μία είτε η άλλη, κάθε τρίτη έννοια αποκλείεται ως ορθή (ένα πράγμα θα είναι είτε A είτε όχι A και τίποτα άλλο από αυτά). Ο Αριστοτέλης διατύπωσε την Αρχή αυτή ως εξής:

> Παν ή φάναι ή αποφάναι αναγκαίον, ανάγκη της αντιφάσεως θάτερον είναι μόριον αληθές, αδύνατον γαρ αμφότερα ψευδή είναι"

4. *Η αρχή του επαρκούς ή αποχρώντος λόγου*. Για κάθε διαβεβαίωση, για κάθε συμπέρασμα πρέπει να υπάρχειν ένας επαρκής από λογική άποψη λόγος, ένας λόγος που να είναι από μόνος του ικανός, ώστε να οδηγήσει στο συμπέρασμα κατά τρόπο τυπικά έγκυρο και υποχρεω- τικό.

> Παν ή φάναι ή αποφάναι αναγκαίον, ανάγκη της αντιφάσεως θάτερον είναι μόριον αληθές, αδύνατον γαρ αμφότερα ψευδή είναι"

1.2.2 Προτασιακή Λογική

Ο Αριστοτέλης έμεινε είκοσι χρόνια στην Ακαδημία και αφιερώθηκε στην έρευνα και στη διδασκαλία. μετά τον θάνατο του Πλάτωνα, το 348-347 π.Χ. ο Σπεύσιππος διαδέχεται τον Πλάτωνα στη διεύθυνση της Ακαδημίας και ο Αριστοτέλης αποχωρεί από τη Σχολή και αναχωρεί από την Αθήνα, στην οποία επιστρέφει δώδεκα χρόνια αργότερα όπου και ίδρυσε τη δική του σχολή, το περίφημο αριστοτελικό Λύκειο της Αθήνας. Ο Αριστοτέλης, με χρήματα που του έδωσε ο Αλέξανδρος, έχτισε μεγαλόπρεπα οικήματα και στοές, που ονομάζονταν "περίπατοι". Ίσως γι' αυτό η σχολή του ονομάστηκε Περιπατητική και οι μαθητές του περιπατητικοί φιλόσοφοι. Ο Αριστοτέλης πέρασε στην αθανασία τόσο από το διδασκαλικό του έργο όσο και από την ασύλληπτη συνθετική ικανότητα της διάνοιάς του. Ηταν αναμφίβολα ο συστηματικότερος και μεθοδικότερος νους της αρχαιότητας που έμελλε να μεταλαμπαδεύσει το φωτεινό του πνεύμα στον μαθητή του Αλέξανδρο τον μέγα όπου χρησιμοποιώντας ως εκπαιδευτικό μοχλό τα ομηρικά έπη, του εμφυσεί το ελληνικό πνεύμα και την οικουμενικότητά του. Εκτός από την Περιπατητική σχολή λογικής του Αριστοτέλη, υπήρξε στην αρχαιότητα και η Στωική σχολή λογικής. Η σχολή αυτή που ιδρύθηκε από τον Χρύσιππο έχει τις ρίζες της πίσω στα τέλη του 5ου αιώνα π.κ.ε. στον φιλόσοφο Ευκλείδη από τα μέγαρα, μαθητή του Σωκράτη, και στα πλαίσιά της συνεχίστηκαν και συστηματοποιήθηκαν οι λογικές μελέτες των μεγαρικών φιλοσόφων. Βέβαια η επιρροή της αριστοτελικής λογικής ήταν τόσο μεγάλη που οδήγησε στην υποτίμηση από πολλούς ιστορικούς της συνεισφοράς των Στωικών και αυτός ίσως ήταν ο λόγος που μόνο μικρό μέρος του έργου των Στωικών διασώθηκε. Το έργο των μεγαρικών και κατ' επέκταση των Στωικών αφορά στην λογική των προτάσεων σε αντίθεση με αυτό των Περιπατικών που αφορά στη λογική των κατηγορημάτων. Και εδώ, όταν λέμε "λογική προτάσεων"εννοούμε τη μελέτη των λογικών σχέσεων μεταξύ προτάσεων λαμβάνοντας κάθε πρόταση ως ένα ιδιαίτερο όλον, ενώ όταν λέμε "λογική κατηγορημάτων"εννοούμε τη μελέτη των λογικών σχέσεων μεταξύ προτάσεων με έμφαση στην εσωτερική δομή των προτάσεων, δηλαδή στη μορφή "υποκείμε-"νο - κατηγόρημα". Επομένως, θα λέγαμε ότι η πιο σημαντική και χαρακτηριστική διαφορά της μεγαρικής - Στωικής Λογικής με την Αριστοτελική Λογική είναι ότι αφορά προτάσεις και όχι ουσιαστικά, γεγονός που την κατατάσει πιο κοντά στην σύγχρονη προτασιακή λογική. Είναι γνωστό ότι μέλη της μεγαρικής Σχολής όπως ο Διόδωρος Κρόνος και ο Φίλωνας, μεταγενέστεροι του Αριστοτέλη, ήταν βαθείς γνώστες λογικών προβλημάτων πράγμα που δείχνει ότι πίσω τους υπήρχε μια παράδοση μελέτης τέτοιων προβλημάτων. Σύμφωνα με τα στοιχεία που υπάρχουν ο Διόδωρος Κρόνος και ο Φίλωνας είναι οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με τη φύση των υποθετικών προτάσεων. 'Ισως αυτό οφείλεται στην σχέση της μεγαρικής Σχολής με το Ζήνωνα τον Ελεάτη, του οποίου τα επιχειρήματα ήταν της μορφής "αν P τότε Q"και "αν P τότε όχι Q"συνεπάγεται ότι το P είναι αδύνατο. 'Οπως γίνεται σαφές από αναφορά του Σέξτου (έλληνας γιατρός και φιλόσοφος που έζησε μάλλον μεταξύ 2ου και 3ου αιώνα μ.Χ.), η άποψη του Φίλωνα για τις υποθετικές προτάσεις ταυτίζεται με τη σημερινή:

Adv. Math. viii. 113

ο ̓ον ὁ μὲν Φίλων ἔλεγεν ἀληθὲς γίνεσθαι τὸ συνημμένον ὅταν μὴ ἄρχηται ἀπ᾿ ἀληθοῦς καί λήγῃ ἐπί ψεῦδος, ὥστε τριχῶς μὲν γίνεσθαι κατ᾿ αὐτόν ἀληθές συνημμένον, καθ᾿ ἕνα δὲ τρόπον ψεῦδος. καί γὰρ ὅταν ἀπ᾿ ἀληθοῦς ἀρχόμενον ἐπ᾿ ἀληθές λήγῃ ἀληθές ἐστιν, ὡς τό "εἰ ἡμέρα ἔστι, φῶς ἔστιν". καί ὅταν ἀπό ψεύδους ἀρχόμμενον ἐπί ψεῦδος λήγῃ, πάλιν ἀληθές, ο ̓ον τὸ "εἰ πέταται ἡ γῆ, πτέρυγας ἔχει ἡ γῆ, ὡσαύτως δὲ καί τὸ ἀρχόμμενον ἀπὸ ψεύδους ἐπ᾿ ἀληθὲς δὲ λῆγον ἐστιν ἀληθές, ὡς τὸ "εἰ πέταται ἡ γῆ, ἔστιν ἡ γῆ. μόνως δὲ γίνεται ψεῦδος ὅταν ἀρχόμενον ἀπὸ ἀληθοῦς λήγῃ ἐπί ψεῦδος, ὁποῖον ἐστι τὸ "εἰ ἡμέρα ἔστι, νύξ ἔστιν".

Δηλαδή, σύμφωνα με τον Φίλωνα υπάρχουν τρεις τρόποι ώστε μια υποθετική πρόταση να είναι αληθής και ένας κατά τον οποίο θα είναι ψευδής. Συγκεκριμένα μια συνεπαγωγή θα είναι αληθής όταν: (1) Αρχίζει με μια αλήθεια και τελειώνει με μια αλήθεια, (2) αρχίζει με ένα ψεύδος και τελειώνει με ένα ψεύδος, και (3) αρχίζει με ένα ψεύδος και τελειώνει με μια αλήθεια. Ενώ μια συνεπαγωγή θα είναι ψευδής μόνον όταν αρχίζει με μια αλήθεια και τελειώνει με ένα ψεύδος. Αυτό που έχει σημασία για την απόδειξη μιας υποθετικής πρότασης δεν είναι η αλήθεια ή το ψεύδος των μερών της υποθετικής πρότασης, αλλά η αλήθεια της υπόθεσης να συνεπάγεται την αλήθεια του συμπεράσματος. Αν παραστήσουμε με 1 την τιμή αλήθειας μιας αληθούς πρότασης και με 0 μιας ψευδούς, τότε ο πίνακας αλήθειας της συνεπαγωγής, όπως αυτή περιγράφεται απο τον Φίλωνα είναι η εξής:

Αληθοπίνακας συνεπαγωγής

P	$\neg P$	$P \to Q$
1	1	1
0	1	1
0	1	1
0	1	1

Πίνακας 1.1 Αληθοπίνακας συνεπαγωγής

Όπως είπαμε και παραπάνω, η λογική των μεγαρικών και κατ' επέκταση των Στωικών αφορά τη μελέτη των λογικών σχέσεων μεταξύ προτάσεων λαμβάνοντας κάθε πρόταση ως ένα ιδιαίτερο όλον, και έτσι διερευνήθηκαν οι λογικές προτάσεις (αν είναι αληθείς ή ψευδείς) που σχηματίζονται από άλλες προτάσεις με τη χρήση των λογικών συνδέσμων. Προς αυτή την κατεύθυνση λοιπόν ασχολήθηκαν με τους συνδέμους της σύζευξης "*και*" και της διάζευξης "*ή*". Οι Στωϊκοί θεωρούσαν μια συζευκτική πρόταση μια πρόταση που είναι αληθής αν και μόνον αν και οι δυο συνιστώσες της είναι αληθείς. Επίσης οι Στωικοί όρισαν αρχικά μια διαζευκτική πρόταση ως την πρόταση που οι συνιστώσες της βρίσκονται σε μάχη μεταξύ τους και συνεπώς δεν είναι δυνατό να αληθεύουν μαζί διότι είναι αντιφατικές, σχετικό είναι το παρακάτω:

> Διεζευγμένον γάρ ἐστιν ἐξ ἀντιχειμένων τοῦ τε εἶναι σημεῖον καί τοῦ μὴ εἶναι.

Δηλαδή, διότι είναι διαζευκτική πρόταση, η οποία αποτελείται από αντιφατικές προτάσεις, την ύπαρξη και την μη ύπαρξη του σημείου. Και βάσει αυτού του συλλογισμού μια διαζευκτική πρόταση είναι αληθής αν και μόνον αν ακριβώς μια από τις δύο συνιστώσες της είναι αληθής, ενώ είναι ψευδής, αν και μόνον αν ακριβώς μια από τις δύο συνιστώσες της είναι ψευδής. με βάση την άποψή τους για τη διάζευξη, οι Στωϊκοί οδηγήθηκαν φυσιολογικά στην αρχή της απόκλεισης του τρίτου και στην αρχή της διτιμίας.

Αληθοπίνακας σύζευξης

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Πίνακας 1.2 Σύζευξη προτάσεων

Αληθοπίνακας διάζευξης

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Πίνακας 1.3 διάζευξη προτάσεων

με βάση αυτούς τους αληθοπίνακες έχουμε την ακόλουθη ισοδυναμία στην οποία κάνει αναφορά ο Αριστοτέλης:

$$Q \to P \iff \neg P \to \neg Q.$$

> Διεζευγμένον γάρ ἐστιν ἐξ ἀντιχειμένων τοῦ τε εἶναι σημεῖον καί τοῦ μὴ εἶναι.

με βάση αυτούς τους αληθοπίνακες έχουμε την ακόλουθη ισοδυναμία στην οποία κάνει αναφορά ο Αριστοτέλης:

$$Q \to P \iff \neg P \to \neg Q.$$

> Διεζευγμένον γάρ ἐστιν ἐξ ἀντιχειμένων τοῦ τε εἶναι σημεῖον καί τοῦ μὴ εἶναι.

1.2.3 Κατηγορηματική Λογική

Η προτασιακή Λογική όπως παρουσιάστηκε από τους πρώιμους φιλόσοφους και αναπτύχθηκε σε επίσημη λογική από τον Χρύσιππο και τους Στωικούς αποτελεί την απλούστερη μορφή Λογικής. Ένα απο τα πλεονεκτήματα της Προτασιακής Λογικής είναι η απλότητα στη σύνταξη των προτάσεων μέσω λογικών συνδέσμων και το γεγονός ότι μπορεί να καταλήξει πάντα σε συμπέρασμα. Όμως παρουσιάζει ένα σημαντικό μειονέκτημα που οφείλεται στην έλλειψη γενικότητας, που οδηγεί σε μεγάλες σε μέγεθος αναπαραστάσεις γνώσης καθώς κάθε γεγονός πρέπει να αναπαρίσταται με μια χωριστή λογική πρόταση. Το πρόβλημα αυτό όπως θα δούμε αργότερα λύνεται με την κατηγορική λογική που επεκτείνει την προτασιακή λογική: (1) με την εισαγωγή μεταβλητών, (2) με προτάσεις που περιέχουν μεταβλητές οι οποίες ονομάζονται κατηγορήματα και (3) με δύο σύμβολα που λέγονται ποσοδείκτες (quantifiers), το "*για κάθε*" και το "*υπάρχει*" όπου με σύγχρονο συμβολισμό αποδίδεται με $\forall$ και $\exists$ αντίστοιχα. Ο Αριστοτέλης ήταν ο πρώτος επιστήμονας της λογικής που επιχείρησε μια συστηματική ανάλυση της λογικής σύνταξης μιας πρότασης, σε ουσιαστικό και ρήμα. Στις Κατηγορίες αναφέρεται σε όλες τις ιδιότητες που αποδίδουμε (κατηγορούμε) στην ατομικότητα στην οποία αναφερόμαστε (το ουσιαστικό της πρότα- σης). Το μέρος της πρότασης δια του οποίου γίνεται η απόδοση των ιδιοτήτων στο ουσιαστικό καλείται *κατηγό- ρημα*. Από άποψη σύνταξης το κατηγόρημα εμφανίζεται με τη μορφή μιας διαδοχής ενός κενού και λέξεων έτσι ώστε, αν στη θέση του κενού τοποθετήσουμε το όνομα μιας ατομικό- τητας, τότε δημιουργείται μια πρόταση της φυσικής γλώσσας. Για παράδειγμα, το κατηγό- ρημα «είναι φιλόσοφος», εμφανίζεται συντακτικά ως διαδοχή «...είναι φιλόσοφος», και συνεπώς αν στην θέση του κενού τοποθετήσουμε τις ατομικότητες Σωκράτης, Πλάτων, Αριστοτέλης, παίρνουμε τις προτάσεις: «ο Σωκράτης είναι φιλόσοφος», «ο Πλάτων είναι φιλόσοφος», «ο Αριστοτέλης είναι φιλόσοφος». Αν επιχειρήσουμε να παρουσιάσουμε τον πυρήνα της Αριστοτελικής Συλλογιστικής που έχει σαν βάση τον «συλλογισμό», Βλέπουμε ότι η έμφαση στην ανάλυση των επιχειρημάτων δίνεται στην μορφή Υποκείμενο - Κατη- γόρημα. Η ιδέα για την κατασκευή ορθών συλλογισμών μέσω κατηγορημάτων και μεταβλη- τών που συναντάμε στο έργο του Αριστοτέλη, αποτελεί και τη βάση της καλούμενης παραδο- σιακής λογικής - πρόδρομο της κλασικής λογικής - που κυριάρχησε έως τα μέσα περίπου του 19ου αιώνα και είχε βαθιά επίδραση στη Δυτική σκέψη. Είναι φανερό ότι ο Αριστοτέλης σε αντιδιαστολή προς τους Στωικούς ακολούθησε μια διαφορετική λογική προσέγγιση. Οι Στωικοί χρησιμοποίησαν ως στοιχείο που αποτελεί βασική μονάδα της λογικής, την πρόταση (λεκτόν) που μπορεί να προσλάβει κάποια τιμή αλήθειας Οι τις λογικές σχέσεις μεταξύ προτάσεων τις οποίες μελέτησαν οι Στωικοί αποτελούν τον πρόδρομο μεταγενέστερων λογι- κών τυπικών συστημάτων. Οι δύο πιο σημαντικές φιλοσοφικές σχολές του Αριστοτέλη και των Στωικών, αν και θεωρούνταν αντίπαλες αρχικά, έγινε σαφές αργότερα ότι επρόκειτο για συμπληρωματικές θεωρίες.

1.3 Η Αλγεβρα ως επιστήμη

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί και φιλόσοφοι μέσα από την εισαγωγή του παραγωγικού συλλογισμού και της ανάλυσης ως μέρους ευρέσης κατάλληλων αρχών, κανόνων και μέσων για την επίλυση αριθμητικών και γεωμετρικών προβλημάτων, βελτίωσαν σε μεγάλο βαθμό τις μεθόδους επίλυσης των Βαβυλωνίων, των Αιγυπτίων, των Κινέζων, κ.α., και επέκτειναν την ύλη των μαθηματικών. Τα μαθηματικά της ελληνικής περιόδου χωρίζονταν σε δύο μόνο υποπεδία, την Αριθμητική με την έννοια της θεωρίας αριθμών και τη Γεωμετρία (σημεία, ευθείες, επίπεδα κ.λπ.). Ορισμένες από τις μεθόδους, οι οποίες είχαν αναπτυχθεί μπορούν να θεωρηθούν στις μέρες μας, ως άλγεβρα, όχι με τη σημερινή συμβολική έννοια, αλλά με μία ισοδύναμη μορφή της εκφρασμένη γεωμετρικά. Τα πρώτα δείγματα αλγεβρικής σκέψης εμφανίστηκαν από Αιγύπτιους και Βαβυλώνιους μαθηματικούς, πριν από περίπου τέσσερις χιλιετίες. Αρχικά οι Βαβυλώνιοι και μετέπειτα οι Αιγύπτιοι επιστήμονες εργάζονταν πάνω στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Οι Αιγύπτιοι και σε μεγαλύτερο βαθμό οι Βαβυλώνιοι είχαν ένα ανεπτυγμένο σύστημα αρίθμησης, συμβολισμό για τους θετικούς ακεραίους και τα κλάσματα καθώς και πλήρη μεθοδολογία για να εκτελούν τις τέσσερεις πράξεις της Αριθμητικής. μπορούσαν επίσης να κάνουν υπολογισμούς και να βρίσκουν προσεγγιστικές τιμές για τις τετραγωνικές ρίζες ή να βρίσκουν τις λύσεις διαφόρων εξισώσεων. Εν τούτοις η άλγεβρά τους είναι εμπειρική, οταν λύνουν το πρόβλημα απλώς περιγράφουν τον τρόπο, δεν υπάρχει δηλαδή στην άλγεβρά τους η απόδειξη. Η κατασκευή της άλγεβρας με βάση τη γεωμετρία ξεκίνησε ήδη στα πλαίσια της Πυθαγόρειας Σχολής και συνεχίστηκε επί πολλούς αιώνες αργότερα. ’Ομως, το αριθμητικό ή γεωμετρικό περιεχόμενο μέσα στο οποίο λειτουργούσε η Αλγεβρα την εμπόδιζε να εμφανίζεται ευκρινής και καθαρή, διότι ήταν ενσωματωμένη στους αριθμούς και τα σχήματα. Στο πρώτο στάδιο της ανάπτυξης των μαθηματικών, η γλώσσα της γεωμετρίας φάνηκε να είναι πολύ φυσική και έδωσε την δυνατότητα να διατυπώνονται απλά και εποπτικά ορισμένες αλγεβρικές ταυτότητες. Για παράδειγμα, το έργο του Ευκλείδη που υπήρξε στην ουσία το προϊόν ερευνών και προβληματισμών των δύο αιώνων που προηγήθηκαν, αποτελεί την γεωμετρική άλγεβρα των αρχαίων ελλήνων μαθηματικών και φιλοσόφων που έπαιζε τον ίδιο ρόλο που έχει η σύγχρονη συμβολική άλγεβρα. Ας πάρουμε την Πρόταση 1 στο Βιβλίο II των Στοιχείων του Ευκλείδη που λέει ότι:

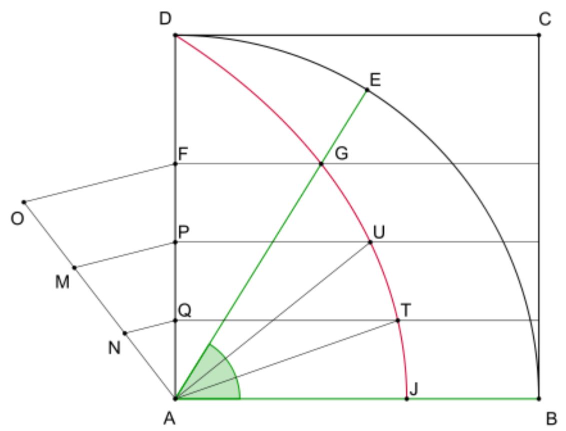
Αν δοθούν τμήματα α και β και το β διαιρεθεί σε οσαδήποτε τμήματα, τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου που ορίζουν τα α, β είναι ίσον με το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που ορίζουν το α με καθένα από τα τμήματα στα οποία έχει διαιρεθεί το β.

Η πρόταση αυτή θα μπορούσε να αποδοθεί από τον τύπο:

$$\alpha(\beta_1+\beta_2+\ldots)=\alpha\beta_1+\alpha\beta_2+\ldots$$

όπου $\beta=\beta_1+\beta_2+\ldots.$
Το θεώρημα αυτό δεν είναι τίποτα άλλο από μία γεωμετρική απόδειξη ενός από τους βασικούς νόμους της αριθμητικής που σήμερα αποκαλούμε ως επιμεριστική ιδιότητα. Ανάλογες προτάσεις που αποτελούν αποδείξεις της αντιμεταθετικής και της προσεταιριστικής ιδιότητας του πολλαπλα-

σιασμού, σε γλώσσα Γεωμετρίας, συναντάμε στα άλλα βιβλία των Στοιχείων του Ευκλείδη. Από την άλλη μεριά, και οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις είναι στενά συνδεδεμένες με τη γεωμετρία του Ευκλείδη, αφού κάθε κατασκευή με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη είναι ισοδύναμη αναλυτικά με τη λύση κάποιας αλυσίδας δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Για παράδειγμα, στην πρόταση 6 στο Βιβλίο II των Στοιχείων του Ευκλείδη δίνεται η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax+x^2=b^2$ και στην πρόταση 11 στο Βιβλίο II των Στοιχείων του Ευκλείδη δίνεται τη λύση της εξίσωσης $ax+x^2=a^2$. Στην εποχή του Ευκλείδη, τα a και b αντιστοιχούσαν σε μεγέθη ευθυγράμμων τμημάτων. μέσα από το έργο του Ευκλείδη όμως, πέραν των απλών νόμων της αριθμητικής, συναντάμε την γεωμετρική προσέγγιση των Αρχαίων Ελλήνων σε ανώτερου βαθμού εξισώσεις, όπως για παράδειγμα, τα περίφημα άλυτα προβλήματα της τριχοτόμησης της γωνίας, του διπλασιασ- μού του κύβου και του τετραγωνισμού του κύκλου. Τα προβλήματα ήταν ευρέως γνωστά, γινόταν ήδη αναφορά από τον 5ο αιώνα π.Χ. σε θεατρικά έργα της εποχής από τον Ευριπίδη (485 π.Χ.-407 π.Χ) και τον Αριστοφάνη (452-385 π.Χ.). Για τα προβλήματα αυτά διαπιστώ- θηκε ότι δεν μπορούσε να δοθεί λύση με την βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη. Εξ αιτίας αυτού του γεγονότος, οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες στράφηκαν σε άλλες καμπύλες εκτός του κύκλου και σε άλλες μεθόδους. Έτσι, επινοήθηκαν νέες καμπύλες όπως, για παράδειγμα, η τετραγωνίζουσα του Ιππία, η έλικα (ή σπείρα) του Αρχιμήδη και η κογχοειδής καμπύλη του Νικομήδη. Το πιο σημαντικό όμως είναι ότι δόθηκε περαιτέρω ώθηση στη μελέτη των κωνικών τομών (έλλειψη, παραβολή, υπερβολή).

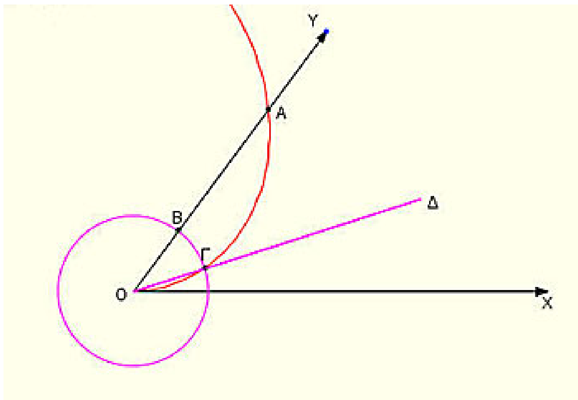


Σχήμα 1.2 *Η τριχοτόμηση οξείας γωνίας του Ιππία του 'Ηλειου.*

Η πρώτη καμπύλη στην ελληνική Γεωμετρία, μετά την περιφέρεια, η τετραγωνίζουσα, ήταν η επινόηση από τον Ιππία τον Ηλείο που είχε σαν αποτέλεσμα την λύση του προβλήματος της τριχοτόμησης οξείας γωνίας, διότι αν είναι αμβλεία αφαιρούμε από αυτήν την ορθή, που μπορεί να τριχοτομηθεί με χάρακα και διαβήτη. Το πρόβλημα αυτό δεν μπορούσε να λυθεί γιατί η εξίσωση που το εκφράζει είναι τρίτου βαθμού χωρίς να μπορεί να αναχθεί πάντα σε δευτέρου βαθμού, διότι, δεν υπάρχει πάντα γεωμετρική κατασκευή για τη τριχοτόμηση μιας οξείας γωνίας θ με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη. Δηλαδή, το να γνωρίζουμε μια γωνία, είναι ισοδύναμο με το να γνωρίζουμε το συνημίτονο της γωνίας. Άρα για να τριχοτομήσουμε τη γωνία 3θ πρέπει να κατασκευάσουμε τη λύση της εξίσωσης $\cos^3\theta = 4\cos 3\theta - 3cos\theta$. Επομένως αν θεωρήσουμε για παράδειγμα την γωνία $3\theta = \frac{\pi}{3}$ θα έχουμε την εξίσωση $8x^3-6x-1=0$ ($\cos\theta = x$), όπου ο x δεν είναι κατασκευάσιμος. Αυτό προκύπτει από την θεωρία της σύγχρονης Αλγεβρας (θεωρίας Galois από τον Γάλλο μαθηματικό Pierre Laurent Wantzel (1814–1848)), σύμφωνα με την οποία για να είναι ο x κατασκευάσιμος είναι αναγκαίο ο x να είναι αλγεβρικός, δηλαδή να είναι ρίζα κάποιου πολυωνύμου με συντελεστές στο σύνολο των ρητών, και το ελαχίστου βαθμού πολυώνυμο που έχει τον x ως ρίζα πρέπει να έχει βαθμό κάποια δύναμη του 2. Εκτός του Ιππία του Ηλείου, οι γνωστότεροι αρχαίοι γεωμέτρες που ασχοληθήκανε με το πρόβλημα της τριχοτόμησης της γωνίας είναι επίσης ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ), ο Νικομήδης (περίπου 200 π.χ) και ο Πάππος ο Αλεξανδρινός (3ος αι. Μ.Χ). μία άλλη λύση στο πρόβλημα της τριχοτόμησης της γωνίας έδωσε ο Αρχιμήδης η οποία στηρίζεται στην έλικα, η οποία ανακα- λύφτηκε από τον Κόνωνα τον Σάμιο , φίλο του Αρχιμήδη.

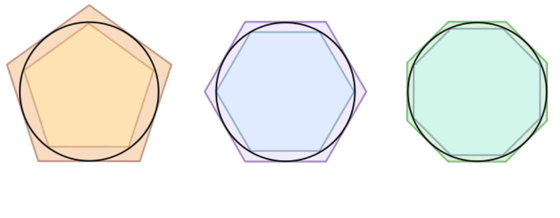
Η έλικα προκύπτει από την κίνηση του σημείου Ο πάνω στην ΟΧ, από τον Ο προς το Χ, με σταθερή ταχύτητα αλλά συγχρόνως και η ΟΧ να κινείται γύρω από το Ο, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, οι δύο κινήσεις αρχίζουν την ίδια χρονική στιγμή. Στην εικόνα **??** μπορούμε νε δούμε την καμπύλη αυτή. Το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου, αφορούσε την κατασκευή της $\sqrt[3]{2}$. Δηλαδή, αν x είναι η ακμή του κύβου με διπλάσιο όγκο από τον κύβο με ακμή α, τότε $x^3 = 2.\alpha^3$ ή ισοδύναμα $x^3 - 2\alpha^3 = 0$ που συνεπάγεται ότι $x = \sqrt[3]{2}\alpha$. Οι λύσεις που δόθηκαν στο πρόβλημα, κατά την ελληνική αρχαιότητα, σώθηκαν και φθάσανε σε μάς από τον σχολιαστή των έργων του Αρχιμήδη Ευτόκιο (6 αι. Μ.χ). Οι κυριότερες από τις γνωστές λύσεις προέρχονται από τους: Αρχύτα τον Ταραντίνο (428-365 π.χ), Πλάτωνα (427-347 π.Χ), μέναιχμο (375- π.χ), Αρχιμήδης (287-212 π.Χ), Νικομήδης (έζησε γύρω στο 200 π.Χ), Διοκλής (1ος αι. π.Χ), κ.α. Η αρχαιότερη είναι του Αρχύτα.

Ο Ιπποκράτης ο Χίος (470-400 π.Χ), σκέφτηκε ότι ο x θα πρέπει να είναι κάποιος αριθμός για τον οποίο θα ισχύει ότι $\alpha < x < 2\alpha$. Για να υπολογίσει τον x επινόησε ακόμα ένα αριθμό, τον y, έτσι ώστε να ισχύει η αναλογία $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2\alpha}$. Το x μπορεί να κατασκευαστεί όχι με χάρακα και διαβήτη αλλά ως η τετμημένη του σημείου της τομής των παραβολών $x^2 = \alpha y$ και $y^2 = 2\alpha x$. Ο Ιπποκράτης δεν κατασκεύασε το x γεωμετρικά, όμως βοήθησε τον μέναιχμο, ο οποίος ένα αιώνα αργότερα κατασκεύασε τις παραβολές και συνεπώς και το x.



Σχήμα 1.3 *Η τριχοτόμηση οξείας γωνίας του Αρχιμήδη.*

Το τρίτο πρόβλημα, ο τετραγωνισμός του κύκλου, δηλαδή, η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη ενός τετραγώνου με εμβαδόν ίσο με το εμβαδό δοσμένου κύκλου, είναι ένα από τα διασημότερα μαθηματικά προβλήματα των μαθηματικών από την αρχαιότητα μέχρι τα τέλη του 19ου αιώνα. Είναι αξιοσημείωτο ότι ο κωμικός ποιητής Αριστοφάνης στο έργο του Όρνιθες, το οποίο χρονολο- γείται περίπου στο 414 π.Χ., φέρνει στη σκηνή τον αστρονόμο μέτωνα ο οποίος αστειευόμενος λέει:
Με το ορθό ραβδί αρχίζω να μετρώ ώστε να γίνει ο κύκλος τετράγωνος για χάρη σου˙.
Ο Ιάμβλιχος (250-325 μ.Χ) αναφέρει ότι τον τετραγωνισμό του κύκλου κατόρθωσαν: ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ) με τη βοήθεια της έλικας, ο Νικομήδης (200 π.Χ) με την τετραγω- νίζουσα και ο Απολλώνιος (265-170 π.Χ). Η κατασκευή τετραγώνου που να έχει το ίδιο εμβαδόν με δοθέντα κύκλο σημαίνει ότι, αν r είναι η ακτίνα του κύκλου και x είναι η ζητούμενη πλευρά του τετραγώνου, τότε ισχύει η σχέση $x^2 = \pi r^2$. Σήμερα ξέρουμε πως ο τετραγωνισμός του κύκλου, είναι ένα θεωρητικώς άλυτο πρόβλημα, αφού το μήκος της περιφέρειας και το εμβαδόν της επιφάνειας ενός κύκλου εξαρτώνται από την τιμή του π. Ο π όμως είναι ένας υπερβατικός αριθμός, δηλαδή δεν αποτελεί ρίζα ενός μη-μηδενικού πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές. Αυτό έχει σαν συνέπεια ότι είναι αδύνατο να λυθεί το αρχαίο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη.
Ο Αρχιμήδης ήταν ο πρώτος που έδωσε μια μέθοδο υπολογισμού του π σε οποιοδήποτε βαθμό ακρίβειας. Η μέθοδός του έγκειται στο ότι η περίμετρος ενός κανονικού πολυγώνου n πλευρών εγγεγραμμένου σε κύκλο, είναι μικρότερη της περιφέρειας του κύκλου, και άρα και της περιμέτρου του περιγεγραμμένου πολυγώνου. Έτσι φτάνοντας σε πολύγωνο 96 πλευρών ο Αρχιμήδης περιόρισε την τιμή του π στο διάστημα



Σχήμα 1.4 *Η προσέγγιση του Αρχιμήδη στον υπολογισμό του π.*

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε την προσέγγιση αυτή του π για να βρεί εμβαδά κυκλικών τμημάτων. Η μεγαλύτερη προσωπικότητα στην άλγεβρα που έπαιξε ρόλο στην ανάπτυξη αλγεβρικού λογισμού ανεξάρτητου της Γεωμετρίας ήταν αναμφίβολα ο Διόφαντος (250 μ.Χ), ο οποίος θεωρείται από πολλούς ο πατέρας της 'Αλγεβρας.
Στο βιβλίο του με όνομα "Αριθμητικά", ένα από τα γνωστότερα επιστημονικά συγγράμ- ματα, ο Διόφαντος παρουσιάζει μια σειρά προβλημάτων τα οποία και λύνει, με έναν τρόπο που παραπέμπει σε Αλγεβρα. Δηλαδή στα "Αριθμητικά"δεν συστηματοποίησε την υπάρ- χουσα γνώση, αλλά πρόσθεσε πολλά νέα στοιχεία που συνετέλεσαν στην απελευθέρωση της άλγεβρας από την Γεωμετρία. μία απο τις σημαντικές συνεισφορές του Διόφαντου ήταν η μελέτη των εξισώσεων με περισσότερους από έναν αγνώστους, π.χ. $x^2 + y^2 = z^2$. Ο Διόφαντος πρώτος έθεσε το πρόβλημα να εξακριβωθεί αν μια τέτοια εξίσωση έχει κλασματικές λύσεις, δηλ. Ρητούς αριθμούς. Η δεύτερη μεγάλη πρόοδος στην Αλγεβρα που έγινε από τον Διόφαντο ήτα η ανακάλυψη του "αγνώστου x"και η δημιουργία της εξίσωσης. Ο Διόφαντος στην θέση του x που χρησιμοποιούμε σήμερα, χρησιμοποιεί το σύμβολο s για να δηλώσει την άγνωστη ποσότητα. Τις διαδοχικές δυνάμεις του αγνώστουx που φτάνουν μέχρι και την έκτη δύναμη, τις ονομάζει "είδη ". .Οι αριθμητικοί συντελεστές που δηλώνουν κάθε φορά το πλήθος των ειδών, γράφονται με το γνωστό αλφαβητικό αριθμητικό σύστημα και ακολουθούν την συντομογραφία του είδους. μερικοί από τους συμβολισμούς και τις συντομογραφίες του Διόφαντου είναι οι εξής: Το x^2 ονομάζεται και αναπαρίσταται με Δ^Y, το x^3 ονομάζεται κύβος και αναπαρίσταται με K^Y, το $\frac{1}{x}$ ονομάζεται αριθμοστόν τετράγωνο και αναπαρίσταται με s^x, το $\frac{1}{x^2}$ ονομάζεται δυναμοστόν και αναπαρίσταται με Δ^{Yx}. Για παράδειγμα, όταν θέλει να συμβολίσει την παράσταση $3x^2 + 12$, την γράφει $\Delta^Y \gamma M \iota \beta$, όπου ο γ είναι ο 3, το $\iota\beta$ είναι ο 12 και το M δηλώνει ότι ακολουθεί καθαρός αριθμός που δεν περιέχει την άγνωστη μεταβλητή. Για την αφαίρεση χρησιμοποιεί το σύμβολο ⋔, για το ίσον χρησιμοποιεί το σύμβολο $\iota\sigma$, ενώ για την πρόσθεση δεν χρησιμοποιεί σύμβολο, δηλώνει την πρόσθεση με απλή παράθεση των προσθετέων. Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι στην αρχαία Ελλάδα η 'Αλγεβρα πήρε την μορφή που την ξέρουμε σήμερα, λείπει όμως ο τελειοποιημένος αλγεβρικός συμβολισμός ικανού να εκφράσει αφηρημένες έννοιες καθώς και η ύπαρξη των αρνητικών αριθμών και του μηδενός.

1.4 Απειροστικός λογισμός

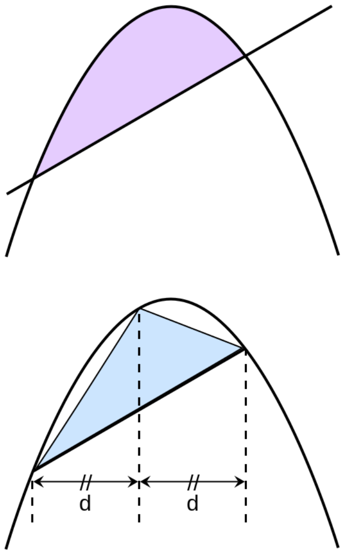
Με τον όρο *Λογισμό* εννοούμε την μαθηματική μελέτη των "αλλαγών "κατά τον ίδιο τρόπο που η γεωμετρία μελετά τα σχήματα και η άλγεβρα τις πράξεις και την εφαρμογή τους για την επίλυση των εξισώσεων. Ο Απειροστικός Λογισμός ασχολείται με τον λογισμό των απείρως μικρών αλλά και τον λογισμό των απείρως μεγάλων μαθηματικών αντικειμένων καθώς και με τα προβλήματα της συνέχειας και της ασυνέχειας. Αποτελεί έναν από τους πιο σημαντικούς κλάδους των μαθηματικών που όμως δύσκολα ανιχνεύονται οι ιστορικές του καταβολές. Τα πρώτα ίχνη του στην κλασσική εποχή ήταν άμεσα συνδεδεμένα με την Γεωμετρία (μήκος περιφέρειας, εμβαδά και όγκοι γεωμετρικών σχημάτων κ.λ.π). Σήμερα η αυστηρή θεμελίωση του απειροστικού λογισμού γίνεται με τα μαθηματικά του δυνητικού απείρου, δηλαδή άπειρες ολότητες αντικειμένων που μπορούν να εξετασθούν μόνο εσωτερι- κά μέσα από επιτρεπτές πράξεις του ορίου σαν κάτι που γεννιέται , που σχηματίζεται, με μια άπειρη διαδικασία χωρίς να επιτυγχάνεται ποτέ η ταύτιση. Ο Απειροστικός Λογισμός σήμερα αποτελείται από δύο κλάδους, τον διαφορικό λογισμό που ασχολείται με τη μελέτη των ρυθμών μεταβολής των ποσοτήτων και τον ολοκληρωτικό λογισμό που αποτελείται από μαθηματικές ενότητες, άρρηκτα συνδεδεμένες με τη μέτρηση του εμβαδού επιφανειών, τον υπολογισμό όγκων, την εύρεση εξισώσεων καμπυλών και την λύση διαφορικών εξισώσεων. Η έννοια του απείρου απασχολούσε και απασχολεί και σήμερα την ανθρώπινη νόηση. Η αδυναμία της ανθρώπινης διάνοιας να καθορίσει το άπειρο ποσοτικά και ποιοτικά οδήγησε σε εντυπωσιακά παράδοξα, η ανάλυση των οποίων συνέβαλε στην εξέλιξη και ανάπτυξη της επιστήμης των μαθηματικών. Η αρχαιότερη γνωστή αντίληψη του απείρου εμφανίζεται στην

Yajur Veda, μια αρχαία ινδική γραφή σύμφωνα με την οποία, αν αφαιρέσουμε ένα μέρος από το άπειρο ή προσθέσουμε ένα μέρος στο άπειρο, αυτό που θα μείνει είναι πάλι το άπειρο. Η πρώτη καταγεγραμμένη ιδέα του απείρου από έλληνες φιλοσόφους και μαθηματι- κούς προέρχεται από τον Αναξίμανδρο (610-545 π.Χ.), μαθητή και διάδοχο του Θαλή στη σχολή της μιλήτου που υποστήριζε ότι η αρχή των όντων ήταν το άπειρο, το οποίο όριζει ως ουσία χωρίς όρια, μορφή ή ιδιότητες. Το αν υπάρχει το άπειρο ως πραγματικό μέγεθος ή όχι απασχόλησε έντονα και τους φιλόσοφους και μαθηματικούς την εποχή των Πυθαγορείων. 'Οταν οι Πυθαγόριοι ('Ιππασος ο μεταπόντιος (450 π.Χ.)) ανακάλυψαν την ασυμμετρία, εισήγαγαν το άπειρο στα μαθηματικά θεωρώντας ότι υπάρχουν γεωμετρικά μεγέθη αποτε- λούμενα από απείρως μικρά τμήματα των οποίων ο αριθμός είναι άπειρος. Τα ερωτήματα που τους απασχολούσαν ήταν: Υπάρχει το υπέρτατο άπειρο πέραν του οποίου τίποτα μεγα- λύτερο δεν μπορεί να υπάρξει ή μήπως τα άπειρα δεν τελειώνουν ποτέ; μπορούμε να τα ταξινομήσουμε, μπορούμε δηλαδή να κάνουμε λόγο για μικρότερα ή μεγαλύτερα άπειρα; Η έννοια του απείρου είναι συναφής προς τις έννοιες της συνέχειας και της ασυνέχειας. Στην Ελληνική αρχαιότητα είχαν αναπτυχθεί δύο σχολές σκέψης χρησιμοποιώντας μία από τις δύο αυτές υποθέσεις. Η έννοια του συνεχούς εμφανίζεται στα κέιμενα του Παρμενίδη στα *Περί φύσεως* 8 1-6, 22-25 και του Αριστοτέλη στα *φυσικά*, 200b, 17-20. Είναι αξιοσημείωτο ότι για τον Αριστοτέλη το άπειρο και το συνεχές είναι ουσιωδώς συναρτημένα. Για τον Αναξαγόρα, το πιο ουσιαστικό χαρακτηριστικό του συνεχούς μπορεί να περιγραφή με τον ακόλουθο τρόπο: "*μεταξύ των μικρών, δεν υπάρχει το ελάχιστο, αλλά - πάντα - κάτι μικρότερο. Γιατί ό,τι είναι δεν παύει να είναι όσες φορές και αν υποδιαιρεθή* "(H. Weyl, (1963)). Η άποψη αυτή του Αναξαγόρα υπονοεί την ιδιότητα της πυκνότητας που αποδίδεται στη σύγχρονη ιδέα για το συνεχές. Στα μοντέρνα μαθηματικά τα βασικά χαρακτηριστικά του συνεχούς είναι η ιδιότητα της πυκνότητας (μεταξύ δύο σημείων του συνεχούς υπάρχει μια πυκνή απειρία άλλων σημείων) και σε κάθε σημείο του συνεχούς δεν υπάρχει επόμενο σημείο. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε ένα διάστημα, η ιδιότητα της πυκνότητας μας επιτρέπει να πούμε ότι μία ακολουθία υποδιαστημάτων φθίνοντος μεγέθους, τείνει στο μηδέν. μια εφαρμογή της αρχής της συνέχειας η οποία είναι μεγίστης σημασίας για την γένεση των άπειρων διαδικασιών είναι η μέθοδο της ανθυφαίρεσης του Θεαίτητου και οι θεωρίες των αναλογιών και της εξάντλησης του Εύδοξου. Ο Θεαίτητος εισήγαγε τη βασική μέθοδο της ανθυφαίρεσης και έκανε μεγάλες προόδους στη θεωρία των αριθμών και στη μελέτη των αρρήτων αναλογιών. Όμως αυτός που τελικά κατάφερε να ξεπεράσει την κρίση των «αρρήτων» αναλογιών που είχε φέρει πρόσκαιρα τα μαθηματικά σε τέλμα ήταν ο Εύδοξος. Γιατί όπως τονίσαμε και στην παράγραφο 1.2, αυτό που έκανε ουσιαστικά ο Εύδοξος ήταν να εισαγάγει την θεωρία των λόγων που συνδέεται άρρηκτα με την αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών με τις τομές Dedekind. Στον εύδοξο επίσης αποδίδεται η πρώτη χρήση της εξάντλησης που στηρίχτηκε στην αρχή που παρουσιάζεται στο βιβλίο X των στοιχείων του Ευκλείδη. Ας δούμε πως εφαρμοζόνταν η μέθοδος της εξάντλησης για ένα από τα μαθηματικά προβλήματα που αντιμετώπιζαν οι μαθηματικοί στην αρχαία εποχή και ήταν το εξής: *Είναι δυνατόν να έχουμε άθροισμα με άπειρους προσθετέους και να πάρουμε αποτέλεσμα έναν πεπερασμένο πρα- γματικό αριθμό;* μερικές φορές αυτό είναι δυνατόν, για παράδειγμα έστω

$$\Sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

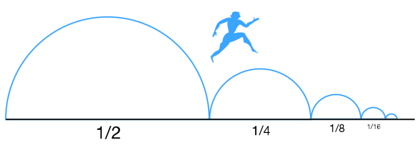
ένα άθροισμα με άπειρους προσθετέους. Ο Αρχιμήδης (287 - 212 π.Χ) , χρησιμοποιώντας την μέθοδο της εξάντλησης του Ευδόξου (περίπου το 400 π.Χ) έδωσε απάντηση ως εξής: 'Εστω AB ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους μιας μονάδας για το οποίο υποθέτουμε ότι θέλουμε να μοιράσουμε σε τρία άτομα. Κόβουμε το τμήμα AB σε τρία κομμάτια και δίνουμε σε κάθε έναν από ένα κομμάτι. Έτσι ο καθένας θα πάρει το 1⁄4 και θα περισσέψει και ένα κομμάτι από τα τέσσερα. Το κομμάτι που περίσσεψε το κόβουμε πάλι σε τέσσερα κομμάτια, δίνουμε σε κάθε έναν από ένα δηλαδή δίνουμε το 1⁄4 του 1⁄4 άρα το 1/16 και περισσεύει το ένα κομμάτι, και συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι να εξαντληθεί το ευθύγραμμο τμήμα. Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε το άπειρ άθροισμα προσθετέων Σ. Όμως επειδή το κάθε άτομο θα πάρει σαν μερίδιο το $\frac{1}{3}$ του ευθύγραμμου τμήματος, συμπεραίνουμε $\Sigma = \frac{1}{3}$. με την μέθοδο της εξάντλησης ο Αρχιμήδης

μπόρεσε να προσεγγίσει την τιμή του αριθμού π στο *Κύκλου μέτρησις* (βλ. Εικόνα 1.4). Αυτό το έκανε παίρνοντας ένα κανονικό εξάγωνο περιγεγραμμένο στον κύκλο και ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο στο κύκλο και προοδευτικά διπλασιάζοντας τον αριθμό των πλευρών και στα δύο κανονικά πολύγωνα, υπολόγιζε το μήκος της πλευράς κάθε πολυγώνου σε κάθε βήμα. Καθώς ο αριθμός των πλευρών αυξάνεται, γίνεται μια πιο ακριβής προσέγγιση του κύκλου.
Μετά από τέσσερα τέτοια βήματα, όταν τα πολύγωνα είχαν από 96 πλευρές το καθένα, ήταν σε θέση να προσδιορίσει ότι η τιμή του π βρισκόταν ανάμεσα στο 31⁄7(περίπου 3.1429) και 310⁄71(περίπου 3.1408) εντός των ορίων αφού η τιμή προσεγγιστικά είναι 3.1416. Ο Αρχιμήδης μπορούσε να χρησιμοποιήσει τα απειροελάχιστα με τρόπο παρόμοιο με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό, μπορούσε να δώσει απαντήσεις σε προβλήματα έως ένα αυθαίρετο βαθμό ακρίβειας, χρησιμοποιώντας την εις *άτοπον απαγωγή*. Γενικότερα, ο Αρχιμήδης επεξεργάστηκε μεθόδους για την εύρεση εμβαδών και όγκων, βε- λτιώνοντας την μέθοδο της εξάντλησης στην αυστηρή απόδειξη των αποτελεσμάτων του. Οι μέθοδοί του αποτελούν τα θεμέλια του ολοκληρωτικού λογισμού για τη δημιουργία του οποίου χρειάστηκαν να περάσουν είκοσι αιώνες.
Μία άλλη σχολή σκέψης, πέραν της πλατωνικής σχολής η οποία δέχεται την ιδέα της συνέχειας, είναι η σχολή του Δημόκριτου του Αβδηρίτη (460-370 π.Χ) και των μαθητών του, που απορρίπτει την ιδέα της συνεχείας και βασίζεται στην περίφημη θεωρία των *ατμήτων* (*ατόμων*). Ο Δημόκριτος (460-370 π.Χ) γεννήθηκε στα Άβδηρα της Θράκης και ήταν μαθη- τής του Λεύκιππου. Συμφωνα με την θεωρία του η ύλη αποτελείτο από αδιάσπαστα και αόρατα στοιχεία, τα άτομα. Ήταν ανάμεσα στους πρώτους που είπαν ότι ότι ο Γαλαξίας είναι το φως από μακρινά αστέρια και ότι το σύμπαν έχει και άλλους *κόσμους*. Ο Δημόκριτος ξεκαθάριζε ότι το κενό δεν ταυτίζεται με το τίποτα, είναι δηλαδή κάτι το υπαρκτό. Σύμφωνα με τον Σιμπλίκιο (Περί οὐρανοῦ 242,18 (DK 67a 14)), ο Λεύκιππος, ο Δημόκριτος και ο Επίκουρος έλεγαν ότι οι πρώτες αρχές των όντων είναι άπειρες στο πλήθος, και πίστευαν ότι είναι άτομες, αδιαίρετες, συμπαγείς και ότι δεν έχουν καθόλου κενό μέσα τους. Από τα παραπάνω καταλήγουμε, στο ότι πραγματικό θεωρείται αυτό που είναι σωματικό ή στερεό και εξισώνεται με το πλήρες, αποκλείοντας έτσι το κενό ή τα οποιαδήποτε μεσοδιαστήματα. Σύμφωνα με αυτή την θεωρία, στην περίπτωση που ο χώρος και ο χρόνος είναι κβαντισμένα μεγέθη (δηλ. όταν δεχόμαστε ότι υπάρχουν ελάχιστα και αδιαίρετα στοιχεία, κβάντα του χώρου και του χρόνου), η διαδικασία των υποδιαιρέσεων ενός μεγέθους σύντομα φθάνει σε ένα τέλος με το φτάσιμο στο κβάντο αυτού του μεγέθους. Είναι φανερό ότι η θεωρία της σχολής του Δημόκριτου του Αβδηρίτη για το άτομο και το κενό αντιπαρατίθεται στο πραγματικό *Ον* του Παρμενίδη και στην ιδέα της συνέχειας.



Σχήμα 1.5 *Η προσέγγιση του Αρχιμήδη στον υπολογισμό του* π.

Ο Ζήνων ο Ελεάτης, ένας σημαντικός προσωκρατικός φιλόσοφος τον οποίο ο Αριστοτέλης αποκαλούσε εφευρέτη της διαλεκτικής μεθόδου, με τα περίφημα παράδοξα της Διχοτομίας, του Αχιλλέα με τη χελώνα, του Βέλους και του Σταδίου αποκάλυψε το χάσμα ανάμεσα στο συνεχές και το διακριτό, κάτι που θα γίνει κατανοητό και θα μελετηθεί απο τον Cantor πολλούς αιώνες αργότερα με την αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Συνόλων. Ο μπέρτραντ Ράσελ πολλούς αιώνες αργότερα περιέγραψε τα τέσσερα παράδοξά του Ζήνωνα ως ασύγκριτα διακριτικά και βαθιά. Για παράδειγμα, το *παράδοξο της διχοτόμησης του Ζήνωνα* αναφέρεται σε ενα δρομέα που ξεκινά με σκοπό να φτάσει στο τέρμα του στίβου. Όμως για να φτάσει στο τέρμα θα πρέπει να τρέξει άπειρο αριθμό από διαδρομές που προστί- θενται η μία στην άλλη, και κάθε μια



Σχήμα 1.6 *Το παράδοξο της διχοτόμησης του Ζήνωνα*

είναι το μισό της προηγούμενης. Και βάσει αυτού του παραδείγματος συμπέρανε ότι το άθροισμα ενός απείρου αριθμού ορισμένων χρονικών διαστη- μάτων οφείλει να είναι άπειρο. Αυτή η πρόταση βέβαια ισχύει σε πολλές περιπτώσεις, αλλά όχι πάντα. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα στην Εικόνα **??** ότι η απόσταση που πρέπει να διανύσει ο δρομέας είναι δύο μονάδες μήκους και η ταχύτητά του είναι 1 μονάδα μήκους ανα λεπτό. Τότε το μισό της απόστασης θα διανυθεί σε χρόνο $t_1 = 1$ μονάδα μήκους, το μισό της υπόλοιπης απόστασης σε χρόνο $t_2 = \frac{1}{2}$ μονάδες μήκους, κ.τ.λ. 'Ετσι ο χρόνος T που απαιτείται να διανυθεί η συγκεκριμένη απόσταση απο τον δρομέα δίνεται απο την σειρά $T = t_1 + t_2 + \ldots t_n + \ldots$, δηλαδή $T = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$. Ετσι παίρνουμε μια απλή γεωμετρική πρόοδο η οποία, αθροίζοντας τους όρους δίνει άθροισμα 2. Με αυτήν την έννοια, ο δρομέας θα διανύσει ακριβώς την απαιτούμενη απόσταση. Ωστόσο, και πάλι, δεν καταρρίψαμε το επιχείρημα του Ζήνωνα διότι αν και ο χρόνος δεν είναι άπειρος η ίδια η γεωμετρική πρόοδος είναι άπειρη. Με το παράδειγμα αυτό οδηγούμαστε στην έννοια της συγκλίννουσας άπειρης σειράς. Σύμφωνα με πολλούς ιστορικούς και μεταγενέστε- ρους φιλόσοφους τα επιχειρήματα του Ζήνωνα αποτελούν την απαρχή μιας διανοητικής πορείας που διαιωνίστηκε μέσα από την δύναμη του πλατωνικού λόγου και αποκάλυψε τη σύγκρουση και το χάσμα ανάμεσα στο συνεχές και το διακριτό που διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά, τη φιλοσοφία, ακόμα και τη φυσική.

1.5 Αλγόριθμοι – Κρυπτογραφία

1.5.1 Αλγόριθμοι

Την έννοια του αλγορίθμου εισήγαγε ο πέρσης μαθηματικός Mohammed ibn-Musa al-Khuwarizmi (780-850 μ.Χ.) αναφερόμενος σε μια μαθηματική επεξεργασία αριθμών. Για την ονομασία αυτής της μαθηματικής διαδικασίας χρησιμοποιήθηκε στην αρχή η λατινική λέξη algorismus, που δημιουργήθηκε από την παραφθορά του συνθετικού του ονόματος al-Khuwarizmi (ο άνθρωπος από την πόλη Khuwarizmi). Πολύ αργότερα περί τα τέλη του 17ου αιώνα, η ονομασία συνδυά- στηκε με την ελληνική λέξη αριθμός και μετατράπηκε στη λέξη αλγόριθμος. Σήμερα οι αλγόριθμοι έχουν ξεφύγει πια από την επικράτεια των μαθηματικών και δεν αποτελούν μόνο μια μαθηματική επεξεργασία αριθμών αλλά κάτι πιο γενικό, δηλαδή ορίζονται ως: *μια πεπερασμένη σειρά εντολών και ενεργειών, αυστηρά καθορισμένων και εκτελέσιμων σε πεπερασμένο χρόνο, με τις οποίες λύνεται ένα πρόβλημα ή επιτυγχάνει ένα επιθυμητό αποτέλεσμα.* Όμως αν σκεφτούμε τον αλγόριθμο ως γενική έννοια, όχι μόνο σε ό, τι φορά τα μαθηματικά και την Πληροφορική, θα διαπιστώσουμε ότι οι αλγόριθμοι είναι πραγματικά παντού. Η καθημερινότητα των ανθρώπων έχει κατακλυστεί από ενέργειες που μπορούν να χαρακτηρισθούν ως αλγόριθμοι, όπως για παράδειγμα μια συνταγή μαγειρικής, ο τρόπος που σιδερώνονται τα πουκάμισα, όταν αλλάζουμε λάστιχο στο αυτοκίνητο, η διαδικασία ανάληψης χρημάτων από μία αυτόματη ταμειακή μηχανή σε μία τράπεζα ... θα μπορούσαμε να γράψουμε πολλά τέτοια παραδείγματα. Η έννοια του αλγορίθμου την αρχαία εποχή εμφανίζεται σαν μια διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος που περιέχει την επανάληψη μιας πράξης για ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Ο πιο ονομαστός αλγόριθμος στην αρχαιότητα ήταν η *ανθυφαίρεση* που υπολόγιζε το κοινό μέτρο δύο μεγεθών α και β, αν υπάρχει. Ο αλγόριθμος αυτός αποδίδεται στον Θεαίτητο (415 - 369 π.Χ.), Έλληνα μαθηματικό της κλασικής αρχαιότητας και συνεργάτη του Πλάτωνα. Πρόκειται για μία διαδικασία που σήμερα είναι γνωστή ως αλγόριθμος του Ευκλείδη και βρίσκεται στις δύο πρώτες προτάσεις του βιβλίου VII των στοιχείων του Ευκλείδη. Η διαδικασία περιγράφεται ως εξής: Εστω $\alpha > \beta$, τότε υπάρ- χουν $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu+1}, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\nu+2}$, τέτοια ώστε

$$\begin{array}{l} \alpha = \gamma_1 \cdot \beta + \beta_1,\ \beta_1 < \beta \\ \beta = \gamma_2 \cdot \beta_1 + \beta_2,\ \beta_2 < \beta_1 \\ \beta_1 = \gamma_3 \cdot \beta_2 + \beta_3,\ \beta_3 < \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$\beta_\nu = \gamma_{\nu+2} \cdot \beta_{\nu+1}$$

και το ζητούμενο κοινό μέτρο είναι ο $\beta_{\nu+1}$. Δηλαδή, εάν η διαδικασία σταματάει μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων, το τελευταίο μέτρο είναι το κοινό μέτρο των α και β. Αν τα α και β είναι ακέραιοι αριθμοί, τότε το γ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α και β και συμβολίζεται με μΚΔ(α,β). Βέβαια ο κατ' όνομα Ευκλείδιος Αλγόριθμος είναι πυθαγόριος αλγόριθμος, τον οποίο ο Ευκλείδης ονομάζει *ανθυφαίρεση* και τον συμβολίζει με *ανθ*(α,β). Σε αντίθεση με την ανθυφαίρεση φυσικών αριθμών που είναι πάντα πεπερασμένη, η ανθυφαίρεση μεγεθών μπορεί να είναι είτε πεπερασμένη είτε άπειρη. Στην περίπτωση που ο αλγόριθμος δεν τερματίζεται, δηλαδή η διαδικασία αυτή συνεχίζεται στο άπειρο, τα δύο μεγέθη είναι ασύμμετρα. Σχετική είναι η Πρόταση Χ2 των Στοιχείων του Ευκλείδη που λέει ότι:

Εάν δοθέντων δύο άνισων μεγεθών ανθυφαιρείται το μικρότερο από το μεγαλύτερο, και το εκάστοτε υπόλοιπο ουδέποτε διαιρεί το προηγούμενό του, τότε τα μεγέθη είναι ασύμμετρα.

με βάση αυτή την πρόταση μπορούμε να δείξουμε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Πράγματι, από την σχέση $\frac{\delta}{\alpha} = \sqrt{2}$ έχουμε $\delta^2 = 2\alpha^2 > \alpha^2$ που συνεπάγεται $\delta > \alpha$. Συνεπώς $\delta = \alpha + \gamma_1$ με $\alpha < \delta$. Από $2\alpha^2 = \delta^2 = \alpha^2 + \gamma_1^2 + 2\alpha\gamma_1$ συμπεραίνουμε ότι $\alpha^2 = \gamma_1 + 2\alpha\gamma_1 > 2\alpha\gamma_1$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\alpha > 2\gamma_1$, και συνεπώς $\alpha = 2\gamma_1 + \gamma_2$ με $\gamma_2 < \gamma_1$. Ομοίως από $\gamma_1^2 + 2(2\gamma_1 + \gamma_2)\gamma_1 = \alpha^2 = 4\gamma_1^2 + 4\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2$ συπεραίνουμε ότι $\gamma_1 = 2\gamma_2 + \gamma_3$ με $\gamma_3 < \gamma_2$. Επομένως συνεχίζοντας με την ίδια λογική προκύπτει ο αναδρομικός τύπος $\delta = \alpha + \gamma_1$ με $\alpha < \delta$ και $\gamma_\nu = 2\gamma_{\nu+1} + \gamma_{\nu+2}$ με $\gamma_{\nu+2} < \gamma_{\nu+1}$.

Η Ανθ(δ, α) = [1, 2, 2, 2, ...] μεταφράζεται σε μορφή συνεχούς κλάσματος ως εξής:

$$\sqrt{2} = \frac{\delta}{\alpha} = 1 + \frac{\gamma_1}{a} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{\gamma_1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{\gamma_3}{\gamma_2}}} =$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + (\ldots)}}}$$

Δηλαδή το 2 επαναλαμβάνεται στο διηνεκές ήτοι ανθ(δ,α) =[1,2,2,2,…]

'Ενας άλλος από τους αρχαιότερους γνωστούς αλγορίθμους είναι το *κόσκινο του Ερατοσθένη*, που αποδίδεται στον Έλληνα φιλόσοφο και αστρονόμο Ερατοσθένη (276-194 π.Χ.) στην *Εισαγωγή στην Αριθμητική* του Νικόμαχου.

Το κόσκινο του Ερατοσθένη είναι ένας αλγόριθμος για την εύρεση όλων των πρώτων αριθμών (πρώτος λέγεται κάθε αριθμός που διαιρείται μόνο με τον εαυτό του και τη μονάδα) σε ένα εύρος τιμών από 2 έως N, όπου N φυσικός αριθμός. Πιο συγκεκριμένα, για την εύρεση όλων των πρώτων αριθμών μικρότερων ή ίσων του N, ξεκινάμε με τον μικρότερο θετικό ακέραιο (εκτός του 1) και κάθε φορά διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του και επαναλαμβάνουμε με τον επόμενο μικρότερο θετικό ακέραιο. Για παράδειγμα, αν $N = 50$ τότε σε έναν πίνακα γράφουμε όλους τους ακέραιους αριθμούς από το 1 έως το 50. Στη συνέχεια αφήνουμε τον αριθμό 2 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσια του το 2 , το 4 , το 6 κτλ, διότι όλοι αυτοί οι αριθμοί ως πολλαπλάσια του 2 δεν είναι πρώτοι. μετά επαναλαμβάνουμε το ίδιο με τον αριθμό 3, που είναι ο επόμενος μικρότερος αριθμός που δεν έχει διαγραφεί. Διαγρά- φουμε δηλαδή όλα το πολλαπλάσια του 3. Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο το «κοσκίνισμα» διαγράφοντας κάθε φορά όλα τα πολλαπλάσια του μικρότερου αριθμού που δεν έχει διαγραφεί. 'Ετσι βρίσκουμε όλους τους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι του 50. Είναι

Σχήμα 1.7 *Το κόσκινο του Ερατοσθένη*

προφανές ότι η παραπάνω διαδικασία δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε όλο το σύνολο των φυσικών αριθμών, αλλά σε ένα υποσύνολο της μορφής $\{2,3,4,5,\ldots,N\}$ όπου N οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός. Η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού αποτελεί την αντίστροφη πράξη του τετραγωνισμού του. Ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας ενός ακεραίου απασχόλησε τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρες και η αναζήτηση λύσεων, οδήγησε σε ανάπτυξη αλγορίθμων για τον υπολογισμό τους. Ο πρώτος αριθμός που ανακαλύφθηκε χωρίς να είναι ρητός, πιθανότατα από τον Πυθαγόρειο φιλόσοφο Ίππασσο, είναι η τετραγω- νική ρίζα του 2. Υπάρχουν δύο γνωστοί αλγόριθμοι απο την αρχαιότητα για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός ακεραίου, του Θέωνος του Αλεξανδρέως (335-405) και του Ήρωνα του Αλεξανδρέως (300 - 230 π.Χ.). Ο 'Ηρων στα «Γεωμετρικά» προβλήματα 30, 31 και «Γεωδαισία» πρόβλημα 12 δίνει μία αλγοριθμική διαδικασία για τη μέτρηση του εμβαδού τριγώνου με πλευρές μήκους 7, 8, 9. Αυτό γίνεται ως εξής: (1) Χρησιμοποιεί τον ομώνυμο «Τύπου του Ήρωνα» για τη μέτρηση του εμβαδού τριγώνου από τις πλευρές του και βρίσκει ότι

$$E = \sqrt{\tau(\tau-7)(\tau-8)(\tau-9)} = \sqrt{720}, \quad \tau = \frac{7+8+9}{2} = 12.$$

(2) Προχωρά στην προσέγγιση της $\sqrt{720}$ αναπτύσσοντας έναν αλγόριθμο που βασίζεται στα ακόλουθα βήματα:
(i) Επειδή η τετραγωνική ρίζα του $N = 720$ είναι άρρητος επιλέγουμε τον πλησιέστερο τετράγωνο αριθμό προς το 720, ο οποίος είναι ο $729 = 27^2 = \alpha^2 > N = 720$.
(ii) Διαιρούμε τον 720 με το 27, απο το οποίο προκύπτει $\frac{N}{\alpha} = 26 + \frac{2}{3}$.
(iii) Προσθέτουμε στο $\frac{720}{27}$ το 27 οπότε έχουμε $\frac{N}{\alpha} + \alpha = 26 + \frac{2}{3} + 27 = 53 + \frac{2}{3}$.
(iv) Στον αριθμό που προκύπτει παίρνουμε τον μισό, δηλαδή

$$\frac{1}{2}(\frac{N}{\alpha} + \alpha) = \frac{1}{2}(26 + \frac{2}{3} + 27) = \frac{1}{2}(53 + \frac{2}{3}) = 26 + \frac{5}{6} = \alpha_1 \cong \sqrt{N}.$$

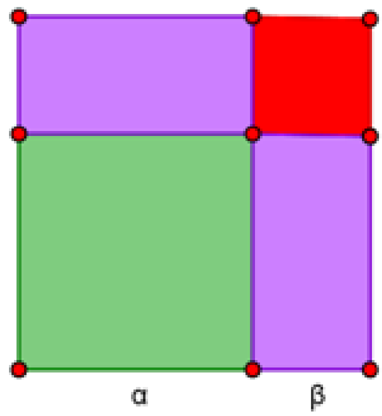
Βλέπουμε ότι η διαφορά $a_1^2 - N = 720 + \frac{1}{36} - 720 = \frac{1}{36}$. Αν τώρα θέλουμε η διαφορά $\frac{1}{36}$ να γίνει ακόμη μικρότερη, τότε αντί του 729 στο βήμα (i) θα θεωρούμε την τιμή $720 + \frac{1}{36}$ και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία θα βρούμε

$$\sqrt{N} = a_2 = \frac{1}{2}(\frac{N}{\alpha_1} + \alpha_1)$$

με $\alpha_1 < \frac{1}{36}$.
με την σύγχρονη ορολογία, θα λέγαμε ότι η προσεγγιστική μέθοδος μέσω του αλγόριθμου του Ήρωνα δίνεται μέσω της ακολουθίας με ανανδρομικό τύπο

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(\frac{N}{\alpha_n} + \alpha_n)$$

και $\alpha_1 = \alpha$. Η γενική μορφή του αλγόριθμου του Ήρωνα δόθηκε 1800 χρόνια αργοτερα από τους Isaac Newton και Joseph Raphson και αποτελεί μία από τις καλύτερες μεθόδους διαδοχικών προσεγγίσεων για την προσεγγιστική εύρεση των ριζών μιας πραγματικής συνάρ- τησης.
Ο αλγόριθμος του Θέωνος του Αλεξανδρέως, για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός ακεραίου, βασίζεται στο Θεώρημα 4 του Βιβλίου ΙΙ των Στοιχείων του Ευκλείδη που λέει ότι:
Εάν ευθεία AB τμηθεί σε τυχαίο σημείο Γ, τότε το τετράγωνο πλευράς AB είναι ίσον με το άθροισμα των τετραγώνων πλευρών $A\Gamma$ και ΓB και το διπλάσιον ορθογώνιον το περιεχόμενον υπό των αντιστοίχων τμημάτων.



Σχήμα 1.8 *Θεώρημα 4 του Βιβλίου ΙΙ των "Στοιχείων του Ευκλείδη"*

Το θεώρημα αυτό στην αλγεβρική του εκδοχή εκφράζει την γνωστή ταυτότητα

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta,$$

όπου α, β νοούνται μήκη ευθυγράμμων τμημάτων. Ο θέωνας ο Αλεξανδρεύς φημίζεται για τα σχόλιά του σε πολλά έργα όπως το "*μαθηματικὴ Σύνταξις* "(η διαδεδομένη μετάφραση του έργου αυτού στα αραβικά αναφέρεται ως Almagest) του Κλαύδιου Πτολεμαίου, ο οποίος αναφέρεται στο Θεώρημα 4 του Βιβλίου ΙΙ των "Στοιχείων"και δίνει κατ΄αρχήν έναν αλγόριθμο εύρεσης του $\sqrt{144} = S$, παρόλο που γνώριζε το αποτέλεσμα. Τα βήματα που ακολούθησε ήταν τα εξής: (i) Επιλέγουμε έναν ακέραιο α του οποίου το τετράγωνο είναι μικρότερο του 144, έστω $\alpha = 10$. (ii) Αφαιρούμε το $\alpha^2 = 100$ από το $S^2 = 144$ και έχουμε $S^2 - \alpha^2 = 144-100 = 44$. (iii) Πολλαπλασιάζουμε το $\alpha = 10$ με το 2, διότι έχουμε δύο ορθογώνια. (iv) Διαιρούμε το 44 με το 20 και παίρνουμε 2 με υπόλοιπο 4. (v) Το 4 είναι το δεύτερο τετράγωνο του οποίου η ρίζα είναι το $2 = \beta$. (vi) Επομένως $\sqrt{144} = (10+2) = 12$, δηλαδή:

$$\frac{S^2-\alpha^2}{2\alpha} = \beta + \frac{\beta^2}{2\alpha} \iff S^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2 = (10+2)^2 \iff S = (10+2).$$

Με την ίδια λογική ο θέωνας επεξεργάζεται στο εξηνταδικό σύστημα και την εύρεση μιας προσέγγισης του $\sqrt{4500}$ που είναι άρρητος. Η απόδειξη αυτή δίνεται αναλυτικά στο [Health, 51,pp. 60-63] ως εξής:

Επιλέγουμε το 67 για το οποίο έχουμε $67^2 = 4489 < 4500$ και θέτουμε

$$\sqrt{4500} = 67 + \frac{x}{60} + \frac{y}{60^2}.$$

Τότε

$$4500 = 4489 + (\frac{x}{60}+\frac{y}{60^2})^2 + 2.67.(\frac{x}{60}+\frac{y}{60^2}),$$

το οποίον συνεπάγεται ότι

$$11 = \frac{x^2}{60^2} + \frac{y^2}{60^4} + \frac{8y}{60^3} + \frac{134y}{60^2}.$$

Επιλέγουμε ένα x έτσι ώστε $\frac{134y}{60^2} < 11$. Για $x = 4$ έχουμε

$$\frac{7424}{60^2} = \frac{16}{60^2} + \frac{y^2}{60^4} + \frac{8y}{60^3} + \frac{536}{60} + \frac{134y}{60^2}.$$

Αν επιλέξουμε y τέτοιο ώστε $\frac{y}{60^2} \cong 0$, τότε

$$7424 \cong y\frac{8+60.134}{60} \quad \text{το οποίο συνεπάγεται ότι} \quad y \cong 55 + \frac{165}{503}.$$

Επιλέγοντας $y \cong 55$ έχουμε

$$\sqrt{4500} \cong 67 + \frac{4}{60} + \frac{55}{60^2}$$

που είναι και η προσέγγιση που εμφανίζεται στο Almagest I. 10.

1.5.2 Κρυπτογραφία

Η λέξη κρυπτογραφία (cryptography) προέρχεται από τις λέξεις *κρύπτω* και *γράφω*, που σημαίνουν «κρύβω αυτά που γράφω». Από τα αρχαία χρόνια, η ασφάλεια στη μεταφορά δεδομένων ήταν ένα από τα βασικά θέματα που απασχολούσαν τον άνθρωπο. Η προστασία των μηνυμάτων από μη εξουσιοδοτημένους παραλήπτες επιτυγχανόταν με την απόκρυψη των δεδομένων, καθιστώντας τα "μη-αναγνώσιμα" σε όποιον δεν έπρεπε να έχει πρόσβαση. Ωστόσο, ήταν εξίσου σημαντικό η κωδικοποίηση της πληροφορίας να είναι τέτοια που ο επιθυμητός παραλήπτης, για τον οποίο προορίζεται το μήνυμα, να μπορεί να το διαβάσει. Ο Πλούταρχος, στο έργο του Παράλληλοι Βίοι και συγκεκριμένα στο βιβλίο για τον Λύσανδρο (19.5), καταγράφει σημαντικές λεπτομέρειες σχετικά με τη χρήση αρχαίων τεχνολογιών επικοινωνίας και κρυπτογραφίας. Μέσα από αυτές τις περιγραφές, προσφέρει μια σαφή εικόνα του πώς οι αρχαίοι Έλληνες αξιοποιούσαν διαθέσιμες τεχνικές για την ασφάλεια στρατιωτικών πληροφοριών και την ταχεία επικοινωνία σε μεγάλες αποστάσεις. Με τη μαρτυρία του Πλούταρχου, γίνεται φανερό ότι οι αρχαίοι Έλληνες είχαν αναπτύξει έναν προηγμένο τρόπο σκέψης σχετικά με την επικοινωνία και την κρυπτογράφηση, που αποτελεί τις βάσεις της σύγχρονης επιστημονικής κρυπτογραφίας. Οι στρατιωτικές αυτές τεχνικές επικοινωνίας εξελίχθηκαν με την πάροδο των αιώνων και δείχνουν τη μακρόχρονη πορεία των επικοινωνιακών στρατηγικών από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα. Στις μέρες μας, η Κρυ- πτογραφία αποτελεί έναν επιστημονικό κλάδο με τεράστια σημασία, ειδικά στους τομείς της ασφάλειας των υπολογιστικών συστημάτων και των επικοινωνιών. Η συνεισφορά της είναι εξαι- ρετικά σημαντική, καθώς παρέχει τα απαραίτητα εργαλεία για την προστασία των πληροφοριών από μη εξουσιοδοτημένη πρόσβαση. Γι' αυτόν τον λόγο, η κρυπτογραφία είναι κεντρικό αντι- κείμενο μελέτης στα εφαρμοσμένα μαθηματικά και στην επιστήμη των υπολογιστών. Ορίζεται ως η επιστήμη που ασχολείται με τη μελέτη, την ανάπτυξη και τη χρήση τεχνικών κρυπτογράφησης και αποκρυπτογράφησης, με σκοπό την προστασία και την απόκρυψη του περιεχομένου των μηνυμάτων. Η κρυπτογραφία έχει βαθιές ρίζες στην ιστορία και χρησιμοποιείται ως τεχνική ασφαλούς επικοινωνίας από την αρχαιότητα.

Μια από τις πρώτες τεχνικές κρυπτογράφησης ήταν η *κρυπτεία σκυτάλη* και χρησιμοποιήθηκε από τους Λακεδαιμόνιους ήδη από τον 7ο αιώνα π.Χ. για την ασφαλή αποστολή στρατηγικών μηνυμάτων. Η πρώτη ιστορική αναφορά στη χρήση της σκυτάλης ως κρυπτογραφική μέθοδος εμφανίζεται στα έργα του αρχαίου Έλληνα λυρικού ποιητή Αρχίλοχου. Η σκυτάλη αποτελούνταν από μια λεπτή ταινία κατεργασμένου δέρματος, πλάτους περίπου 3 χιλιοστών, η οποία τυλιγόταν γύρω από έναν κυλινδρικό ξύλινο ράβδο συγκεκριμένης διαμέτρου. Ο αποστολέας έγραφε το μήνυμα κατά μήκος της ταινίας, ενώ αυτή ήταν τυλιγμένη στο ξύλο. Όταν η ταινία ξετυλιγόταν, τα γράμματα εμφανίζονταν διάσπαρτα και το μήνυμα γινόταν δυσανάγνωστο. Ο δέκτης μπορούσε να ανασυνθέσει το μήνυμα μόνο εάν είχε μια σκυτάλη της ίδιας διατομής, ώστε να τυλίξει ξανά την ταινία και να διαβάσει το κείμενο στην ορθή του διάταξη. Η πρώτη ιστορική αναφορά στην κρυπτογραφία της σκυτάλης εμφανίζεται στα γραπτά του αρχαίου Έλληνα λυρικού ποιητή Αρχίλοχου. Στο έργο του «Ποιήματα και θρύψαλα» εντοπίζεται μια περιγραφή της σκυτάλης ως μέσου επικοινωνίας, το οποίο χρησιμοποιούσαν οι Σπαρτιάτες για την ασφαλή αποστολή στρατιωτικών πληροφοριών. Η αναφορά αυτή υποδεικνύει ότι η σκυτάλη δεν ήταν απλώς ένα εργαλείο επικοινωνίας, αλλά μια από τις πρώτες γνωστές τεχνικές κρυπτογράφησης στην αρχαιότητα.

Σχήμα 1.9 *Κρυπτεία σκυτάλη*

Αρχίλοχος - "Ποιήματα και θρύψαλα."

Ἐρέω τιν' ὑμῖν αἶνον, ὦ Κηρυκίδη, ἀχνυμένη σκυτάλη· πίθηκος ᾔει θηρίων ἀποκριθεὶς μοῦνος ἀν' ἐσχατίην· τῷ δ' ἄρ' ἀλώπηξ κερδαλέη συνήντετο πυκνὸν ἔχουσα νόον.

Ένα από τα πιο γνωστά μηνύματα που στάλθηκαν μέσω σκυτάλης αναφέρεται στην απελπι- στική κατάσταση των Σπαρτιατών μετά την ήττα τους στη ναυμαχία της Κυζίκου κατά τη διάρκεια του Πελοποννησιακού Πολέμου. Ο Λακεδαιμόνιος αντιναύαρχος Ιπποκράτης έστειλε ένα διά- σημο μήνυμα στη Σπάρτη μετά από μια καταστροφική ήττα στη ναυμαχία της Κύζικου. Η κατά- σταση των Σπαρτιατών ήταν απελπιστική, και η ανάγκη να ενημερωθεί άμεσα η Σπάρτη οδήγησε τον Λακεδαιμόνιο στρατηγό Ιπποκράτη να συντάξει ένα εξαιρετικά σύντομο και χαρακτηριστικά λιτό μήνυμα, που έγινε υπόδειγμα λακωνικής έκφρασης. Το περιεχόμενο της επιστολής ήταν:

Ιπποκράτης - Σπαρτιάτης στρατηγός

'Ερρει τα κάλα. Μίνδαρος απεσσύα. Πεινώντι τώνδρες. Απορίομες τι χρη δραν.

Το οποίο μεταφράζεται ως: Πάνε τα καράβια! Ο μίνδαρος πέθανε! Οι άνδρες πεινούν! Δεν ξέρουμε τι να κάνουμε! Η απλότητα αλλά και η αποτελεσματικότητά της σκυτάλης την καθιστούν ένα μοναδικό παράδειγμα αρχαίας τεχνολογίας κρυπτογράφησης, με χρήση τεχνικών που βρίσκουν αντιστοιχίες και στη σύγχρονη εποχή.

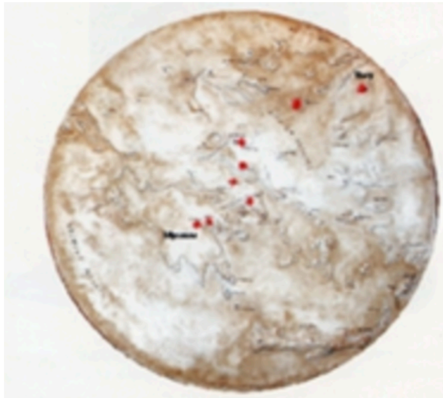
Ένας άλλος αξιοσημείωτος τρόπος γρήγορης και αποτελεσματικής αναμετάδοσης πληροφοριών στην αρχαιότητα ήταν ο ακουστικός τηλέγραφος του μεγάλου Αλεξάνδρου. Αυτό το εργαλείο χρησιμοποιούνταν για την ενίσχυση και μετάδοση ήχων σε μεγάλες αποστάσεις, επιτρέποντας τη γρήγορη και συντονισμένη επικοινωνία μέσα στον στρατό του Αλεξάνδρου. Ο ακουστικός τηλέγραφος είχε σχήμα παρόμοιο με κέρας ζώου ή με τρομπέτα και λειτουργούσε ως ενισχυτής της φωνής ή άλλων ηχητικών σημάτων. Το συγκεκριμένο σχήμα βοηθούσε στην κατεύθυνση και στην ενίσχυση του ήχου μέσω αντήχησης, με αποτέλεσμα την πολλαπλή αύξηση της έντασής του. Η κατασκευή του περιλάμβανε ένα μεγάλο, κυκλικό ηχητικό κέρας, το οποίο ήταν αναρτημένο σε τρίποδο ύψους περίπου τεσσάρων μέτρων. Το τρίποδο αυτό επέτρεπε στο κέρας να περιστρέφεται σε όλες τις κατευθύνσεις, διαδίδοντας το σήμα σε ακτίνα έως και 4 χιλιομέτρων. Η αντήχηση και η ανάλυση του ήχου στο εσωτερικό του κεράτος ενίσχυαν το σήμα, επιτρέ- ποντας στο μήνυμα να φτάνει καθαρά και σε μεγάλες αποστάσεις. Ο ακουστικός τηλέγραφος του Αλεξάνδρου ήταν ένα από τα πρώτα παραδείγματα τεχνολογίας ενίσχυσης ήχου για στρατιωτικούς σκοπούς και αποδείχθηκε εξαιρετικά χρήσιμο για τον συντονι- σμό των στρατευμάτων του. Αποτελεί μια καινοτομία της αρχαιότητας που δείχνει πώς οι αρχαίοι Έλληνες αξιοποιούσαν τις φυσικές ιδιότητες του ήχου για να εξυπηρετήσουν τις επικοινωνιακές και στρατηγικές ανάγκες τους.

Σχήμα 1.10 *Ακουστικός Τηλέγραφος*

Μια άλλη μέθοδος επικοινωνίας που θυμίζει τον πρόγονο της κρυπτογραφίας ήταν οι φρυκτωρίες. Οι φρυκτωρίες, από τις λέξεις "φρυκτός = πυρσός" και "ώρα = φροντίδα", αναφέρονται σε μια συστηματική μέθοδο αποστολής προσυμφωνημένων μηνυμάτων στην αρχαιότητα. Αυτή η τεχνική χρησιμοποιούσε τη φωτιά για τη μετάδοση μηνυμάτων σε μεγάλες αποστάσεις σε σύντομο χρόνο, κατά τη διάρκεια στρατιωτικών επιχειρήσεων για τη μετάδοση διαταγών και κρίσιμων πληροφοριών. Το πλήθος των μηνυμάτων που μπορούσαν να μεταδοθούν μέσω των φωτεινών σημάτων επιβεβαιώνεται και από τον μύθο, όπου η μήδεια υψώνει πυρσό για να ειδοποιήσει τους Αργοναύτες να σπεύσουν στην Κολχίδα.

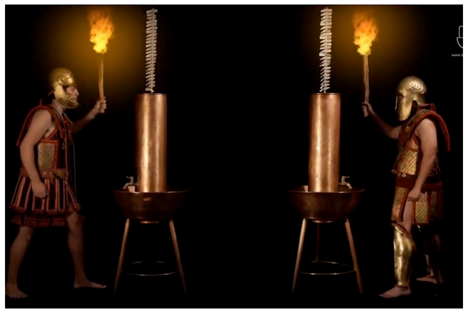
Για τη μετάδοση των οπτικών σημάτων με πυκνούς καπνούς ή στήλες καπνού, ήταν απαραίτητη η κατασκευή ειδικών κτισμάτων σε υπερυψωμένα σημεία, που ονομάζονταν φρυκτωρίες. Τα φωτεινά σήματα ανταλλάσσονταν μέσω των φρυκτών (πυρσών) και είχαν συμφωνηθεί εκ των προτέρων μεταξύ των δύο πλευρών για τη μετάφραση των μηνυμάτων. Σύμφωνα με τους μελετητές, ο πρώτος που χρησιμοποίησε τηλεπικοινωνιακούς πύργους για τη μετάδοση μηνυμάτων ήταν ο Ηρακλής, ο οποίος κατασκεύασε τις γνωστές Ηράκλειες Στήλες στις δύο κωμοπόλεις της Δυτικής μεσογείου, την Αβύλη και την Κάπλη, λειτουρ- γώντας ως φάροι για τα διερχόμενα πλοία. Ένα από τα πιο γνωστά παραδείγματα μετάδοσης μηνυμάτων με φωτεινά σήματα είναι η είδηση της πτώσης της Τροίας, που μεταφέρθηκε στην υπόλοιπη Ελλάδα σε χρόνο ρεκόρ, μέσα σε μία μέρα. Για τη μετάδοση του μηνύματος, χρησιμοποιήθηκε το σύστημα της πυρσείας, δηλαδή η ανταλλαγή φωτεινών σημάτων από κορυφή σε κορυφή βουνού.

Το μήνυμα ταξίδεψε από την Τροία στο Ερμαίο της Λήμνου, μετά στον Άθω, στις κορυφές του μακίστου στην Εύβοια και στην κορυφή του Κιθαιρώνα. Από εκεί μεταφέρθηκε στη λίμνη Γοργώπη, στο Αγίπλαγκτο (κοντά στα μέγαρα) και τελικά η φωτεινή λωρίδα πέρασε τον Σαρωνικό κόλπο και έφτασε στο Αραχναίον κοντά στις μυκή- νες, απ' όπου ημεροδρόμοι μετέφεραν το μήνυμα στο ανάκτορο των Ατρειδών. Οι κορυφές των βουνών δεν επιλέχθηκαν τυχαία ακόμα και σήμερα διαπιστώνεται καλή ορατότητα μεταξύ τους. Είναι το πρώτο και αρχαιότερο οργανωμένο δίκτυο επικοινωνίας για το οποίο υπάρχει γραπτή μαρτυρία, όπως περιγράφεται στον "Αγαμέμνονα" του Αισχύλου (στ. 263-304).



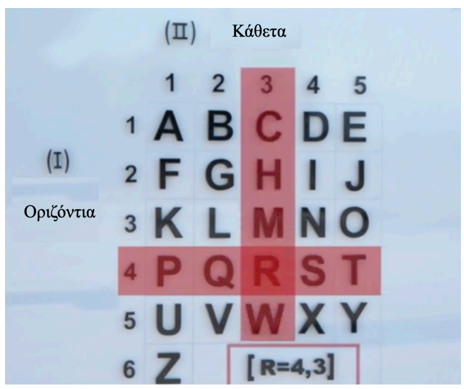
Σχήμα 1.11 *Φρυκτωρίες*

Γύρω στο 330 π.Χ., ο Αρκάδας στρατηγός Αινείας ο Τακτικός ανέπτυξε ένα ευφυές σύστημα τηλεγραφίας για την αποστολή προσυμφωνημένων μηνυμάτων. Συνδύασε πυρσούς και μηχανικά μέσα ώστε η επικοινωνία μεταξύ αποστολέα και δέκτη να περιέχει σαφείς πληροφορίες. Χρησιμοποιούνταν δύο πανομοιότυποι κυλινδρικοί κάδοι, γνωστοί ως υδραυλικοί τηλέγραφοι, που ήταν τοποθετημένοι πάντα σε σηματοδοτικούς σταθμούς σε υψόμετρα, εξασφαλίζοντας καλύτερη οπτική επαφή. Οι υδραυλικοί τηλέγραφοι ήταν γεμάτοι με νερό ως το ίδιο επίπεδο και είχαν στη βάση τους μια βρύση ίδιου διαμετρήματος, ώστε η ροή του νερού να είναι ίδια και στους δύο κάδους όταν ανοίγουν. Πάνω στο νερό κάθε κάδου επέπλεε ένα ξύλινο ραβδί, κάθετα τοποθετημένο πάνω σε κυλινδρικό φελλό με διάμετρο ελαφρώς μικρότερη από τους κάδους. Το ραβδί ήταν χωρισμένο σε παρά- λληλους κύκλους με ίσες αποστάσεις μεταξύ τους, και στα κενά αυτών των κύκλων υπήρχαν σημειωμένα κωδικοποιημένα μηνύματα. Όταν ο αποστολέας σήκωνε έναν πυρσό για να ξεκινήσει η επικοινωνία και ο δέκτης απαντούσε με τον ίδιο τρόπο ως επιβεβαίωση, τα δοχεία άνοιγαν ταυτόχρονα, επιτρέποντας τη ροή του νερού. Όταν η στάθμη του νερού έφτανε στο σημείο του επιθυμητού μηνύματος, ο πομπός κατέβαζε τον πυρσό, και η ροή σταματούσε. Έτσι, το προσυμφωνημένο μήνυμα ήταν ταυτόσημο και στα δύο δοχεία.



Σχήμα 1.12 *Υδραυλικός Τηλέγραφος*

Όταν οι χρήστες του υδραυλικού τηλέγραφου με την πάροδο του χρόνου διαπίστωσαν δυσκολίες στην ακριβή περιγραφή των πληροφοριών όπως αναφορά σε αριθμητικές δυνάμεις του εχθρού, ήρθε ή ώρα που οι Κλεόξενος και Δημόκλειτος παρουσίασαν την "Πυρσεία" ή αλλιώς "οπτικό τηλέγραφο". Η Πυρσεία, δηλαδή η οπτική αναμετάδοση σημάτων με φωτιές, αποτελεί ουσιαστικά τον πρώτο οπτικό τηλέγραφο. Το σύστημα αυτό θεωρείται πρόδρομος των σύγχρονων ψηφιακών τεχνικών επικοινωνίας, καθώς κωδικοποιούσε τα γράμματα του αλφαβήτου με την καταχώρησή τους σε πίνακα με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε γράμμα να αντιστοιχεί σε μια σειρά και μια στήλη. Η λειτουργία της



Σχήμα 1.13 *Πυρσεία ή Οπτικός Τηλέγραφος*

Πυρσείας βασιζόταν στο διαχωρισμό των γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου σε πεντάδες, διαμορφώνοντας έτσι πέντε γραμμές και πέντε στήλες. Ο συνδυασμός δύο πεντάδων μεγάλων πυρσών, που ήταν ορατοί από μεγάλες αποστάσεις με τη βοήθεια διόπτρων, αντιπροσώπευε κάθε γράμμα (η αριστερή ομάδα πυρσών καταδεικνύει τις σειρές και η δεξιά τις στήλες του πίνακα). Κατ' αυτό τον τρόπο, ένας συνδυασμός αναμμένων πυρσών όριζε ένα συγκεκριμένο γράμμα. Ήταν η πρώτη φορά που έγινε κωδικο- ποίηση του αλφαβήτου με συνδυασμό ανάμματος δαυλών. Η επόμενη κωδικοποίηση έγινε μετά 2000 χρόνια, από τον Samuel Morse.

Με αυτά τα παραδείγματα που αποτελούν ένα μικρό μέρος των μεθόδων κωδικοποίησης των αρχαίων Ελλήνων βλέπουμε ότι η κλασική κρυπτογραφία που ανέπτυξαν αποτελεί ένα συναρπαστικό κομμάτι ολόκληρης της ιστορίας της ασφάλειας των πληροφοριών. Παρά τις περιορισμένες τεχνολογικές δυνατότητες εκείνης της εποχής, οι Έλληνες ανέπτυξαν μεθό- δους κωδικοποίησης που επέτρεπαν τη διασφάλιση της εμπιστευτικότητας των στρατηγικών πληροφοριών, κυρίως κατά τη διάρκεια των πολέμων.

II

2 Γραμμική και Σύγχρονη Άλγεβρα

2.1 Εισαγωγή

Η ’Αλγεβρα

III

3 Θεωρία Συνόλων

3.1 Εισαγωγή

Η θεωρία συνόλων είναι το πιο διαδεδομένο θεμελιώδες σύστημα των μαθηματικών που μελετάει τα σύνολα, σε αντίθεση με τις υπόλοιπες μαθηματικές θεωρίες που εξετάζουν δομές, δηλαδή σύνολα εφοδιασμένα με πράξεις, σχέσεις (διατάξεις, συναρτήσεις), τελεστές των οποίων οι ιδιότητες απορρέουν από αξιώματα, τοπολογίες, κ.α.λ. Η θεωρία συνόλων γεννήθηκε στα τέλη του 1873, όταν ο Georg Cantor έκανε την καταπληκτική ανακάλυψη ότι η ευθεία των πραγματικών αριθμών δεν είναι μετρήσιμη, πράγμα που σημαίνει ότι τα σημεία της δεν μπορούν να μετρηθούν με τη χρήση των φυσικών αριθμών. ’Ετσι, αν και το σύνολο των φυσικών αριθμών και το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι και τα δύο άπειρα, υπάρχουν περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί απο τους φυσικούς αριθμούς, και με αφορμή αυτό το γεγονός άνοιξε ο δρόμος για τη διερεύνηση των διαφόρων μεγεθών του απείρου. Σύμφωνα με τον Cantor, δύο σύνολα A και B έχουν την ίδια *πληθικότητα*, αν είναι αμφιμονοσήμαντα, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει μία προς μία και επί αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων. Στην περίπτωση των πεπερασμένων συνόλων, αυτό συμφωνεί με τη διαισθητική έννοια του μεγέθους. Στην περίπτωση άπειρων συνόλων, η συμπεριφορά είναι πιο περίπλοκη, είναι δηλαδή δυνατό ένα υποσύνολο ενός απείρου συνόλου να έχει την ίδια πληθικότητα με το αρχικό σύνολο, κάτι που δεν μπορεί να συμβεί με τα υποσύνολα των πεπερασμένων συνόλων. Το 1878 ο Cantor διατύπωσε την περίφημη *υπόθεση του συνεχούς* (*Continuum Hypothesis*), η οποία υποστηρίζει ότι κάθε άπειρο υπο- σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι είτε μετρήσιμο ή έχει το ίδιο πληθος στοιχείων με το σύνολο των πραγματικών αριθμών. με άλλα λόγια, προβλέπει ότι δεν υπάρχει ενδιάμεσο επίπεδο απειρίας ανάμεσα στην αριθμήσιμη απειρία των φυσικών αριθμών (κατά την απαρίθμησή τους) και στην απειρία των πραγματικών αριθμών, αυτή δηλαδή που απεικονίζεται, π.χ., ως μια ευθεία ή ως οποιαδήποτε συνεχής γραμμή του επιπέδου. Η υπόθεση του συνεχούς είναι το πιο διάσημο πρόβλημα της θεωρίας συνόλων. Ο ίδιος ο Cantor αφιέρωσε πολλή προσπάθεια σε αυτό, και το ίδιο έκαναν και πολλοί άλλοι σπουδαίοι μαθηματικοί στα μέσα του εικοστού αιώνα, όπως ο Hilbert ο οποίος απέδειξε ότι μπορεί να αποδειχθεί η λογική συνέπεια της υπόθεσης του συνεχούς τόσο της κατάφασής της όσο και της άρνησής της μέσα στο αξιωματικό σύστημα των Zermelo – Fraenkel. Το σύστημα αυτό, γνωστό και ως θεωρία συνόλων Zermelo και Fraenkel, είναι, τουλάχιστον ως σήμερα, η κοινώς αποδεκτή από τη μαθηματική κοινότητα θεμελιακή αξιωματική θεωρία περιγραφής και κατασκευής των μαθηματικών συνόλων. Η πρώτη ανάπτυξη της θεωρίας συνόλων ήταν μία αφελής συνολοθεωρία, δηλαδή μία άτυπη θεωρία που χρησιμοποιεί φυσική γλώσσα για να περιγρά- ψει συνολα και πράξεις στα σύνολα όπου λέξεις όπως:*και, ή, αν ... τότε, οχι, για κάποιο, για κάθε,* δεν υπάγονται σε αυστηρό ορισμό. Εξαιτίας της άτυπης αυτής χρήσης της έννοιας του συνόλου προέκυψαν, αρχικά, ορισμένες ασυνέπειες ή παράδοξα ιδίως απο την φαινομενικά φυσική υπόθεση ότι: *κάθε ιδιότητα καθορίζει ένα σύνολο*, δηλαδή το σύνολο των αντικει- μένων που έχουν την ιδιότητα. Ένα παράδειγμα είναι το *παράδοξο του Russell*. Αυτό που λέει αυτό το παράδοξο του Russell, είναι ότι είναι προβληματικό να μιλάμε για σύνολα πραγμάτων που περιέχουν τον ευατό τους, δηλαδή την αυτοαναφορικότητα. Για παράδειγμα ας πάρουμε το βιβλίο που αναφέρεται στα βιβλία που δεν έχουν αναφορά προς τον ευατό τους. Αυτό το βιβλίο θα συμπεριελάμβανε τον εαυτό του; Αν τον συμπεριελάμβανε, θα δημιουργούσε παράδοξο, όπως επίσης και αν δεν τον συμπεριελάμβανε. μια βασική απόρ- ροια του παραδόξου του Rassel είναι ότι δεν μπορούμε να μιλήσουμε για το σύνολο όλων των συνόλων, τουτέστιν για το άπειρο. Επομένως, μερικές συλλογές, όπως η συλλογή όλων των συνόλων, η συλλογή όλων των πληθικών αριθμών, δεν είναι σύνολα. Τέτοιες συλλογές ονομάζονται *αρμόζουσες τάξεις*. Το παράδοξο του Rassel βάζει ένα σαφές όριο, σε αυτό που καλούμε ανθρώπινη λογική, κάτι που είναι συμβατό άλλωστε με τα δύο θεωρήματα της μη πληρότητας του Kurt Friedrich Gödel που υποδεικνύουν έμφυτους περιορισμούς σε όλα τα (πλην των τετριμμένων) τυπικά συστήματα των μαθηματικών. με αυτά ο Gödel αποδεικνύει με απλά λόγια, ότι, σε οποιοδήποτε λογικό οικοδόμημα που πάμε να χτίσουμε, πρέπει πάντα να πάρουμε κάποιες προτάσεις σαν αξιώματα, δηλαδή αναπόδεικτες, και εκεί πάνω να θεμελιώσουμε. Και αντίστροφα αν τα αξιώματα αποδεικνύονται εντός του συστήμα- τος, τότε υπάρχουν προτάσεις οι οποίες δεν μπορούν να αποδειχθούν. Τα πρώτα βασικά αποτελέσματα της συνολοθεωρίας όπως την δημιούργησε ο Cantor αναφέρονται σε πολλές και σημαντικές εφαρμογές ιδιαίτερα στην ανάλυση. Για παράδειγμα ένα σημαντικό αποτέλεσμα είναι η θεωρία της *υπερπεπερασμένης αριθμητικής*, δηλαδή της μελέτης των αριθμητικών πράξεων της πρόσθεσης του πολλαπλασιασμού και της δύναμης σε άπειρα μεγέθη. Στην φάση που η θεωρία συνόλων αναπτύχθηκε με βάση την έννοία του συνόλου που έδωσε ο Cantor, όλες οι αποδείξεις στηρίζονται: (a) Στην *ιδιότητα της έκτασης*, δηλαδή αν A και B είναι σύνολα, τότε $A = B$ αν και μόνον αν τα A και B έχουν τα ίδια μέλη, και (b) στην παραδοχή της *Γενικής Αρχής της Συμπερίληψης* (*General Comprehension Principle*), δηλαδή, αν P είναι μια συνθήκη που ορίζει κάποια ιδιότητα των αντικειμένων, τότε $\Omega = \{x|P(x)\}$ είναι το σύνολο όλων των αντικειμένων που ικανοποιούν την συνθήκη P, έτσι ώστε για κάθε x, ($\star$) *το x ανήκει στο Ω αν και μόνο αν ικανοποιεί την P.* Η (a) συνεπάγεται ότι το πολύ ένα σύνολο Ω ικανοποιεί την ($\star$), και καλούμε αυτό το Ω *έκταση* (*extension*) ή *συμπερίληψη* (*comprehennsion*) της συνθήκης P. Οπως αναφέραμε και παραπάνω αυτή η αρχή ήταν εσφαλμένη και διαψεύστηκε απο τον Rassel. Το παράδοξο του Rassel έφερε μια *κρίση αμφιβολίας* πρώτα στην συνολοθεωρία και αργότερα σε όλα τα μαθηματικά που έκανε να ξεπεραστεί για περίπου τριάντα χρόνια. Πολλοί μαθημαικοι και φιλόσοφοι στα τέλη του δεκάτου ενάτου και τις αρχές του εικοστού αιώνα, όπως ο Γάλλος γεωμέτρης poincaré και ο Ολλανδός τοπολόγος και φιλόσοφος Brouwer, πρότειναν να εγκαταληφθεί η συνολοθεωρία και πολλά κλασικά μαθηματικά μαζί της διότι κατα την γνώμη τους δεν είχαν περιεχόμενο. Αυτός που αρχικά προσπάθησε να σώσει την κατάσταση με την μή απόρριψη της συνολοθεωρίας ήταν ο Rassel με την περιώνυμή του *θεωρία των τύπων* (*theory of types*), η οποία δεν ήταν αποδεκτή απο τους μαθηματικούς διότι ήταν δύσχρηστη. Σχεδόν την ίδια εποχή με τον Russel ο Zermelo το 1908 πρότεινε μία διαφορετική λύση παρουσιάζοντας το πρώτο σύστημα αξιωμάτων για την θεμελίωση της θεωρίας συνόλων. Αργότερα ο Fraenkel πρόσθεσε ένα ακόμη αξίωμα στο σύστημα αξιωμάτων που είχε προτείνει ο Zermelo δημιουργώντας έτσι το σύστημα αξιωμάτων Zermelo-Fraenkel που αποτελεί την βάση για την Θεωρία Συνόλων με την σημερινή της μορφή. Στην πράξη ο Zermelo πρότεινε να αντικατασταθούν οι παραδοχές του Cantor για τα σύνολα οι οποίες μας οδήγησαν στην εσφαλμένη Γενική Αρχή Συμπερίληψης με μερικά αξιώματα τα οποία επιπροσθέτως θα εξασφάλιζαν τις αποδείξεις των βασικών αποτελε- σμάτων της υπάρχουσας θεωρίας. Σε αυτή την βάση ξεκίνησε η *αξιωματική συνολοθεωρία*, κατά πολλούς ένα από τα πιο σημαντικά επιτευγματα της επιστήμης του εικοστού αιώνα.

3.1.1 Τα αξιώματα της Θεωρίας συνόλων

Πριν αναφερθούμε πιο διεξοδικά σε βασικά στοιχεία της μαθηματικής Λογικής που θα μας επι- τρέψουν να κατανοήσουμε τις εφαρμογές της στην πληροφορική, θα πούμε δύο λόγια για την *Λογική πρώτου βαθμού* (*first-order logic*) που έχει ικανή εκφραστική ισχύ ώστε να μπορεί να διατυπώσει το σύστημα αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων όπως την μελετάμε και την εφαρμόζουμε σήμερα. Οπως η γεωμετρία ξεκινάει με κάποιες έννοιες των οποίων δέχεται την ύπαρξη χωρίς να τις ορίζει (π.χ. σημείο, ευθεία), έτσι και η Λογική πρώτου βαθμού στηρίζεται σε έννοιες χωρίς ορισμό, μία εκ των οποίων είναι η έννοια *σύμβολο*, και ορίζεται από ένα σύνολο συμβολοσειρών από το ίδιο αλφάβητο όπου ως *αλφάβητο* (*alphabet*) ορίζουμε ένα πεπερασμένο σύνολο συμβόλων και ως συμβολοσειρά (string) μια ακολουθία συμβόλων που ανήκουν στο αλφάβητο. Η λογική πρώτης τάξης επεκτείνει την Προτασιακή Λογική εισάγοντας επιπρόσθετες έννοιες όπως τους *όρους* (*terms*), τα *κατηγο- ρήματα* (*predicates*) και τους *ποσοδείκτες* (*quantifiers*) και συνεπώς θεωρείται ως μια γενίκευ- ση αυτής. Η Προτασιακή Λογικη ως γνωστόν είναι μια γλώσσα που έχει ως βασικό στοιχείο της δηλωτικές προτάσεις οι οποίες μπορεί να είναι είτε αληθείς είτε ψευδείς. Στην Πληροφο- ρική η Προτασιακή Λογική επεξεργάζεται δηλωτικές προτάσεις που αφορούν τη συμπεριφο- ρά υπολογιστικών συστημάτων ή προγραμμάτων, καθώς επίσης βοηθά στον έλεγχο κατά πόσο ένα πρόγραμμα ή ένα σύστημα ικανοποιεί την πρόταση που μελετάμε. Η γλώσσα της Προτασιακής Λογικής αποτελείται από ατομικές προτασεις, τελεστές και παρενθέσεις. Οι τελεστές είναι: *Η άρνηση* $\neg$, η *σύζευξη* $\wedge$, η *διάζευξη* $\vee$ και η *συνεπαγωγή* $\rightarrow$. Οι ποσοδείκτες που εισάγονται επιπρόσθετα στην Λογική Πρώτης Τάξης από την υπάρχουσα Προτασιακή Λογική είναι: Ο υπαρξιακός ποσοδείκτης $\exists$ (*υπάρχει*) και ο *καθολικός ποσοδείκτης* $\forall$ (*για όλα*). Η περιγραφή του συστήματος των αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων, πέραν της γλώσσας της Λογικής πρώτης τάξης που χρησιμοποιεί, για να εκφραστεί πλήρως χρειά- ζεται και τα σύμβολα $\equiv$ (*ισοδύ- ναμο με*) και $\in$ (*ανήκει*) καθώς και το αξίωμα επιλογής. Το αξιώμα της επιλογής (AC) μας λέει ότι:

> *Αν έχουμε μία συλλογή $\mathscr{C}$ από μή κενά σύνολα, τότε μπορούμε να επιλέξουμε ένα μέλος από κάθε σύνολο σε αυτή την συλλογή. Με άλλα λόγια, υπάρχει μία συνάρτηση f στην $\mathscr{C}$ με την ιδιότητα ότι για κάθε σύνολο S στην συλλογή το $f(S)$ είναι ένα μέλος της $\mathscr{C}$.*

Η *αξιωματική θεωρία συνόλων* Zermelo-Fraenkel που έχει σαν βάση τα αξιώματα των Zer- melo-Fraenkel μαζί με το αξίωμα επιλογής ή ZFC, αποτελούν ένα από τα βασικά θεμέλια όλων των κλασικών μαθηματικών. Τα αξιώματα των Zermelo-Fraenkel είναι τα ακόλουθα:

1. *Αξίωμα επεκτασιμότητας:* Αν δύο σύνολα A και B έχουν τα ίδια στοιχεία, τότε είναι ίσα. Συμβολικά:

   $$(\forall x)[x \in A \leftrightarrow x \in B] \rightarrow (A = B).$$

   Το αντίστροφο, δηλαδή, αν $A = B$ τότε $x \in A \leftrightarrow x \in B$. Επομένως έχουμε

   $$(A = B) \leftrightarrow (\forall x)[x \in A \leftrightarrow x \in B].$$

   Το αξίωμα της επεκτασιμότητας λέει απλά ότι ένα σύνολο καθορίζεται από τα στοιχεία του. Αυτό μπορεί να φαίνεται προφανές, αλλά υπάρχουν ενδιαφέρουσες συνολοθεωρίες που απορρίπτουν το αξίωμα αυτό. Το αξίωμα της επεκτασιμότητας είναι αυτό που κωδικοποιεί αυτό το «προφανές» γεγονός.
2. *Αξίωμα ζεύγους:* Δοθέντων συνόλων Aκαι B, υπάρχει σύνολο που συμβολίζεται $\{A, B\}$, το οποίο περιέχει τα A και B ως μοναδικά στοιχεία. Συμβολικά:

   $$(\forall A)(\forall B)(\exists C)[(\forall x)(x \in C \leftrightarrow (x = A \vee x = B))].$$

   Το σύνολο C καλείται *μη διατεταγμένο ζεύγος* των A και B και συμβολίζεται με $\{A, B\}$. Αν $A = B$, τότε $\{A, A\} = \{A\}$ είναι το *μονοσύνολο* του αντικειμένου A. Χρησιμοποι- ώντας αυτό το αξίωμα μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλά απλά σύνολα, π.χ. τα

   $$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \ldots,$$

   όπου καθένα από αυτά έχει το πολυ δύο μέλη.
3. *Αξίωμα κενού συνόλου:* Υπάρχει σύνολο που δεν περιέχει καθόλου στοιχεία το οποίο καλείται *κενό σύνολο* και συμβολίζεται με $\emptyset$. Συμβολικά:

   $$(\exists A)(\forall x)\neg(x \in A).$$

   Το αξίωμα της επεκτασιμότητας εξασφαλίζει την μοναδικότητα του κενού συνόλου. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο σύνολα τα οποία δεν έχουν κανένα στοιχείο, τοτε $x \in A \rightarrow x \in B$ και $y \in B \rightarrow y \in A$ που συνεπάγεται ότι $A = B$. Εξ ορισμού, το κενό σύνολο περιέχεται (ανήκει) σε κάθε σύνολο.

4. *Αξίωμα της ένωσης:* Αν ένα σύνολο A έχει ως στοιχεία σύνολα B, τότε υπάρχει το σύνολο, το οποίο θα έχει στοιχεία τα στοιχεία των B και μόνον αυτά. Συμβολικά:

$$(\forall A)(\exists C)[(\forall x)(x \in C \leftrightarrow (\exists B)(x \in B \wedge B \in A))].$$

Απο το αξίωμα της επεκτασιμότητας εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι για κάθε συλλογή συνόλων $\mathscr{A}$, μόνο ένα σύνολο ικανοποιεί το αξίωμα της ένωσης το οποίον και το ονομάζουμε *ένωση* του $\mathscr{A}$ και το συμβολίζουμε με $\bigcup \mathscr{A}$ ή $\bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}} A$. Συμβολικά:

$$\bigcup \mathscr{A} = \{x | (\exists A \in \mathscr{A})[x \in A]\}.$$

5. *Αξίωμα του απείρου:* Υπάρχει ένα σύνολο που έχει απείρως πολλά στοιχεία, δηλαδή σύνολο το οποίο περιέχει το κενό σύνολο καθώς και μαζί με κάθε στοιχείο A περιέχεται σε αυτό και ο $A \cup \{A\}$, δηλαδή ο επόμενός του. Συμβολικά:

$$(\exists A)[\emptyset \in A \wedge (\forall B)(B \in A \rightarrow B \cup \{B\} \in A)].$$

Αν πάρουμε τον ελάχιστο A με αυτές τις ιδιότητες τότε παίρνουμε τους φυσικούς αριθμούς. Κατά τον ορισμό των *φυσικών αριθμών* αρχίζουμε με το πιο θεμελιώδες σύνολο, το κενό σύνολο ως εξής:
(i) Το $\emptyset$ δεν έχει στοιχεία.
(ii) Το $\{\emptyset\}$ έχει ένα στοιχείο, το κενό σύνολο.
(iii) Το $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ έχει δύο στοιχεία, το κενό σύνολο και το σύνολο που περιέχει το κενό σύνολο. Αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναλαμβάνεται απείρως έως ότου οριστούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί, δηλαδή:
$0 = \emptyset$
$1 = \{0\} = 0 \cup \{0\} = \{\emptyset\}$
$2 = \{0,1\} = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$3 = \{0,1,2\} = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, κ.α.λ.
Προφανώς αυτή η αλληλουχία ξεκινάει από το 0 και όταν αυτό οριστεί τότε ορίζεται και το 1, και όταν το 1 οριστεί τότε ορίζεται και το 2, και ούτω καθεξής. Αυτή η διαδικασία μας φέρνει στην έννοια της επαγωγής για την οποία θα μιλήσουμε λεπτομε- ρώς αργότερα.

Προτού προχωρήσουμε στο επόμενο αξίωμα να υπενθυμίσουμε ότι: Ενα σύνολο A είναι υποσύνολο ενός συνόλου B αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B, δηλαδή

$$(A \subseteq B) \leftrightarrow [(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)].$$

Ο συμβολισμός $\subseteq$ δίνει έμφαση στο ότι το A μπορεί να είναι ίσον με το B, ενώ ο συμβολισμός $\subset$ μας λέει ότι το A είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του B εκτός τουιδίου του B. Στην δεύτερη περίπτωση λέμε ότι τοA είναι γνήσιο υποσύνολο του B.

6. *Αξίωμα του δυναμοσυνόλου:* Για κάθε σύνολο A υπάρχει ένα σύνολο, που συμβολίζεται με $\mathscr{P}(A)$ και καλείται το *δυναμοσύνολο* του A, και έχει σαν στοιχεία όλα τα υποσύνολα του A. Συμβολικά:

$$(\forall A)(\exists B)(\forall C)(C \subseteq A \rightarrow C \in B).$$

Το επόμενο αξίωμα προστέθηκε στα αξιώματα του Zermelo απο τον A. Fraenkel και διατυπώθηκε από τον T. Skolem το 1922.

7. *Αξιωματικό σχήμα της αντικατάστασης*: Εστω $P(x,y)$ είναι μία ιδιότητα τέτοια ώστε, για κάθε x υπάρχει ένα μοναδικό y για το οποίο η $P(x,y)$ ισχύει. Τότε για κάθε σύνολο A υπάρχει ακριβώς ένα σύνολο B, του οποίου τα στοιχεία είναι όλα τα y και μόνον αυτά για τα οποία υπάρχει x στο A έτσι ώστε να επαληθεύεται ο τύπος $P(x,y)$. Συμβολικά:

$$(\forall A)(\exists B)[(\forall y)(y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)P(x,y))].$$

Σαν πόρισμα του αξιωματικού σχήματος της αντικατάστασης προκύπτει η αρχή της *εξειδίκευσης* ή *διαχωρισμού*, σύμφωνα με την οποία: Για κάθε υποσύνολο A και κάθε ιδιότητα φ, υπάρχει ένα υποσύνολο B του A που αποτελείται από αυτά τα στοιχεία του A που ικανοποιούν την φ και μόνον αυτά.

Το επόμενο αξίωμα προστέθηκε το 1925 από τον von Neumann. Για το αξίωμα αυτό χρειαζόμαστε τον ακόλουθο στοιχειώδη ορισμό:

8. *Αξίωμα της θεμελίωσης ή κανονικότητας:* Κάθε μη κενό σύνολο A περιέχει ένα στοιχείο το οποίο είναι ξένο πρός το A. Συμβολικά:

$$(\forall A)[A \neq \emptyset) \to (\exists B \in A)(B \cap A = \emptyset)].$$

μία συνέπεια του αξιώματος της θεμελίωσης είναι ότι δεν υπάρχει σύνολο A για το οποίο $A \in A$. Με άλλα λόγια, κανένα σύνολο δεν είναι στοιχείο του εαυτού του. με το αξίωμα αυτό αποκλείεται η ύπαρξη του συνόλου Russell και συνεπώς αίρεται και η αντίφαση που αυτό δημιούργησε. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο A τέτοιο ώστε $A \in A$, τότε $A \in A \cap \{A\}$ και άρα το $\{A\}$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο ξένο πρός το A. Αυτό όμως αντιβαίνει στο αξίωμα της θεμελίωσης.

4.1 Εισαγωγή

Η φράση "*Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ'αυτό μένειν*" του Ηράκλειτου εκφράζει μία νομοτέλεια, ότι δηλαδή η πραγματικότητα έχει ως θεμελιώδες χαρακτηριστικό τη διαρκή κίνηση και τη μεταβολή. Ο Λογισμός είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που περιλαμβάνει τη μελέτη της κίνησης και των ρυθμών μεταβολής. Οι έννοιες του Λογισμού είναι βαθιά ενσωματωμένες σε πολλές επιστήμες όπως είναι η φυσική, η μηχανική, η οικονομία, η στατιστική, η ιατρική κ.ά. Τα μαθηματικά γενικότερα βασίζονται σε αξιώματα, δηλαδή αποδεκτές αρχές χωρίς αμφισβήτηση. Με αυτά, χτίζουμε μια λογική και συνεπή δομή που μας επιτρέπει να βρίσκουμε μαθηματικές αλήθειες χωρίς να ασχολούμαστε με την ουσία των αριθμών. Με λίγα λόγια τα αξιώματα αποτελούν την αρχική βάση πάνω στην οποία χτίζονται όλες οι άλλες μαθηματικές έννοιες και θεωρήματα. Όπως ένα σπίτι δεν μπορεί να σταθεί χωρίς γερά θεμέλια, έτσι και τα μαθηματικά δεν μπορούν να υπάρξουν χωρίς αξιώματα. Με αυτά, δημιουργούμε ένα συνεπές σύστημα, όπου κάθε μαθηματική αλήθεια χτίζεται με βήματα λογικής πάνω σε αυτή τη βάση. Τα μαθηματικά επίσης έχουν μια στενή σχέση με τη φιλοσοφία, καθώς η φιλοσοφία ασχολείται περισσότερο με ερωτήματα για τη φύση και την ύπαρξη των αριθμών, ενώ στα μαθηματικά οι αριθμοί χρησιμοποιούνται για τη διατύπωση και την απόδειξη αληθειών μέσω της λογικής. Αυτή η διττή φύση των αριθμών – ως εργαλεία και ως φιλοσοφικές οντότητες – κάνει τα μαθηματικά ιδιαίτερα συναρπαστικά, αφού βρίσκονται στην τομή μεταξύ επιστήμης και φιλοσοφίας. Η αλληλεπίδραση αυτή βοηθά να εμπλουτίζεται η ανθρώπινη σκέψη και προσφέρει ποικίλες οπτικές γωνίες για την κατανόηση του κόσμου μας καθώς οι αριθμοί ενσωματώνουν έννοιες που μας καλούν να σκεφτούμε και πέρα από τα σύνορα των μαθηματικών, διερευνώντας βαθύτερα τι είναι πραγματικά οι αριθμοί και πώς συνδέονται με την αντίληψη μας για την πραγματικότητα. Στην ουσία, η φιλοσοφία ενισχύει τη θεωρητική μας κατανόηση, ενώ τα μαθηματικά μας προσφέρουν τα εργαλεία για να εφαρμόσουμε αυτές τις ιδέες με ακρίβεια και συνέπεια. Εν κατακλείδι, η φιλοσοφική διάσταση των αριθμών έγκειται στο ότι δεν αποτελούν απλώς εργαλεία υπολογισμών, αλλά φέρουν μαζί τους βαθιά ερωτήματα για τη φύση και την ύπαρξή τους, καλώντας μας να αναλογιστούμε την ουσία τους πέρα από τα όρια των μαθηματικών. Όμως, πέρα από τον θεμελιώδη πυλώνα των αριθμών, που αποτελούν τη βάση του Λογισμού, υπάρχει ένας εξίσου σημαντικός: η έννοια της απόστασης. Η απόσταση δεν είναι απλώς ένα μαθηματικό εργαλείο, αλλά μια έννοια βαθιά ριζωμένη στην ανθρώπινη εμπειρία, που μας βοηθά να κατανοούμε τον κόσμο γύρω μας. Στην καθημερινή ζωή, η απόσταση δεν περιγράφει μόνο τον μετρήσιμο διαχωρισμό μεταξύ δύο αντικειμένων, αλλά και τον βαθμό της εγγύτητάς τους, είτε πρόκειται για φυσικά είτε για αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα. Η έννοια της εγγύτητας, σε συνδυασμό με την ύπαρξη μιας εσωτερικής σχέσης κυριαρχίας ή διάταξης μεταξύ δύο αντικειμένων με βάση κάποιο κριτήριο κατάταξης, δεν αποτελεί ένα στατικό μέγεθος αλλά έναν παράγοντα που διαμορφώνει τη δυναμική των σχέσεων. Το γεγονός αυτό μας καλεί να μελετήσουμε την ασυμμετρία και τη δυϊκότητα ως δύο αλληλοσυμπληρούμενες όψεις της ίδιας δομής. με βάση αυτή τη νομοτέλεια, ένας άλλος σημαντικός πυλώνας του Λογισμού είναι η σχέση κυριαρχίας ή διάταξης. Αυτή η έννοια μας επιτρέπει να κατανοούμε και να συγκρίνουμε τα αντικείμενα όχι μόνο ως μεμονωμένα σημεία αλλά ως στοιχεία που κατέχουν μια ιεραρχική ή ταξινομητική σχέση μεταξύ τους. Η διάταξη καθορίζει πώς κάθε στοιχείο τοποθετείται σε σχέση με τα υπόλοιπα, δημιουργώντας μια δομή κυριαρχίας που είναι απαραίτητη για την κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων και της δυναμικής των συστημάτων στον Λογισμό. Το τρίπτυχο "αριθμός - εγγύτητα - σχέση κυριαρχίας" οδήγησε σε δύο θεμελιώδεις έννοιες για τον Λογισμό: το ανοικτό διάστημα και το όριο. Αυτές οι έννοιες αποτελούν τη βάση για την κατανόηση της προσέγγισης και της σύγκλισης, προσφέροντας ένα βαθύτερο πλαίσιο για το πώς οι οντότητες τείνουν να αγγίξουν την πλήρη έκφραση της ύπαρξής τους και πώς διαμορφώνονται οι μεταξύ τους σχέσεις. Το ανοικτό διάστημα εκφράζει την έννοια της εγγύτητας χωρίς να περιορίζεται από απόλυτα όρια, ενώ το όριο αποτυπώνει την πορεία μιας συνεχούς προσέγγισης προς ένα σημείο σταθερότητας. Μαζί, παρέχουν ένα πλαίσιο για την κατανόηση των θεμελιωδών δομών και αλληλεπιδρά- σεων, όπως διατυπώνονται μέσα από τον Λογισμό.

4.2 Μαθηματική θεμελίωση του συνόλου των πραγματικών αριθμών

Θα ξεκινήσουμε από την αξιωματική θεμελίωση των φυσικών αριθμών που βασίζεται στα αξιώματα Peano, τα οποία διατυπώθηκαν από τον Ιταλό μαθηματικό Giuseppe Peano. Συγκεκριμένα, υπάρχουν πέντε βασικά αξιώματα που παρέχουν έναν τυπικό ορισμό για τους φυσικούς αριθμούς και περιγράφουν τις βασικές ιδιότητες που τους διέπουν. Είναι τα ακόλου- θα:

4.2.1 Το σύνολο των Φυσικών Αριθμών

Τα Αξιώματα Peano για τους Φυσικούς Αριθμούς

Τα αξιώματα Peano ορίζουν τις θεμελιώδεις ιδιότητες του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Ας τα δούμε αναλυτικά:
1. *Αξίωμα της Ύπαρξης του μηδενός*:

$$0 \in \mathbb{N}$$

Υπάρχει ένας φυσικός αριθμός που ονομάζεται 0 και ανήκει στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$.
2. *Αξίωμα της Διαδοχής*:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S(n) \in \mathbb{N}$$

Κάθε φυσικός αριθμός n έχει έναν μοναδικό διάδοχο $S(n)$, ο οποίος επίσης ανήκει στο σύνολο $\mathbb{N}$.
3. *Αξίωμα της μη Ισότητας του μηδενός*:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S(n) \neq 0$$

Ο 0 δεν είναι διάδοχος κανενός φυσικού αριθμού.
4. *Αξίωμα της μοναδικότητας του Διαδόχου*:

$$\forall m,n \in \mathbb{N},\ S(m) = S(n) \Rightarrow m = n$$

Αν δύο φυσικοί αριθμοί έχουν τον ίδιο διάδοχο, τότε οι αριθμοί αυτοί είναι ίσοι.
5. *Αξίωμα της μαθηματικής Επαγωγής*:

$$\forall A \subseteq \mathbb{N},\ [0 \in A \wedge (\forall n \in A \Rightarrow S(n) \in A)] \Rightarrow A = \mathbb{N}$$

Εάν ένα υποσύνολο A των φυσικών αριθμών περιέχει το 0 και είναι κλειστό ως προς τον διάδοχο, τότε A περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς, δηλαδή $A = \mathbb{N}$.

Τα παραπάνω αξιώματα παρέχουν τη θεμελιώδη βάση για τον ορισμό των φυσικών αριθμών και καθορίζουν τις ιδιότητές τους.
Πιο απλά, το σύνολο των φυσικών αριθμών ορίζεται ως:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

και χαρακτηρίζεται από δύο ιδιότητες:

- Έχει αρχή, δηλαδή τον αριθμό 1.
- Αν n είναι στοιχείο του N, τότε και $n+1$ είναι στοιχείο του N.

Η δεύτερη ιδιότητα είναι γνωστή ως *ιδιότητα της διαδοχής* και δηλώνει ότι το σύνολο N είναι κλειστό στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.
Το αν το 0 ανήκει στους φυσικούς αριθμούς εξαρτάται από τη σύμβαση. Σε πολλά πλαίσια, οι φυσικοί αριθμοί περιλαμβάνουν το 0 και συμβολίζονται ως:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Εδώ, το 0 θεωρείται σημείο εκκίνησης, ιδιαίτερα χρήσιμο σε αξιωματικά συστήματα όπως τα αξιώματα Peano.
Αλλού, οι φυσικοί αριθμοί θεωρούνται ότι ξεκινούν από το 1, με τον συμβολισμό:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}\ (\mathbb{N}^+),$$

όπου το 0 αποκλείεται, π.χ., στη θεωρία αριθμών. Η επιλογή της σύμβασης εξαρτάται από το μαθηματικό πλαίσιο και το σκοπό της μελέτης.

4.2.2 Το σύνολο των Ακεραίων Αριθμών

Το σύνολο των ακεραίων αριθμών είναι:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

το οποίο χάνει την ιδιότητα της αρχής αλλά διατηρεί την ιδιότητα της διαδοχής. Είναι κλειστό στις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, και του πολλαπλασιασμού.

4.2.3 Το Σύνολο των Ρητών Αριθμών

Αν επεκτείνουμε τους ακεραίους με την πράξη της διαίρεσης (εκτός της διαίρεσης με το μηδέν), δημιουργούμε το σύνολο των ρητών αριθμών

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0 \right\}.$$

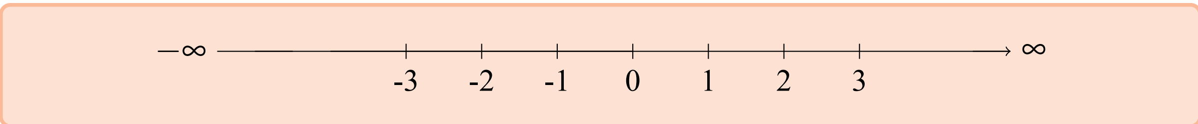
Το σύνολο $\mathbb{Q}$ δεν έχει την ιδιότητα της διαδοχής. Οι πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού, και της διαίρεσης (εκτός της διαίρεσης με μηδέν) δίνουν αποτελέσμα- τα μέσα στο $\mathbb{Q}$.

4.2.4 Το σύνολο των Πραγματικών Αριθμών

Το σύνολο των Πραγματικών Αριθμών $\mathbb{R}$ αποτελεί θεμέλιο για τον Λογισμό. Το κύριο χαρακτηριστικό του είναι ότι περιέχει όλους τους αριθμούς που αντιστοιχούν σε κάθε σημείο μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων πάνω στην ευθεία. Στη ευθεία αυτή, οι αριθμοί είναι τοποθετημένοι έτσι ώστε, αν κινηθούμε από τα αριστερά προς τα δεξιά, οι τιμές των αριθμών να αυξάνονται. Για παράδειγμα, αν πάρουμε ένα σημείο x πάνω στη γραμμή, τότε όλα τα σημεία που βρίσκονται αριστερά του αντι- στοιχούν σε αριθμούς μικρότερους από x, ενώ όσα βρίσκονται δεξιά του αντιστοιχούν σε μεγαλύτερους αριθμούς. Ειδικότερα, αν $x = 0$, τα σημεία στα αριστερά του 0

αντιστοιχούν στους αρνητικούς αριθμούς, ενώ στα δεξιά του βρίσκονται οι θετικοί αριθμοί. Αυτή η μοναδική ιδιότητα του $\mathbb{R}$, που απουσιάζει από τα υποσύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$, ονομάζεται *πληρότητα*. Η πληρότητα διασφαλίζει πως δεν υπάρχουν «κενά» μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών και κάθε θετικός πραγματικός αριθμός μπορεί να έχει ρίζα οποιουδήποτε τάξης. Αν αφαιρέσουμε τους ρητούς αριθμούς $\mathbb{Q}$ από το $\mathbb{R}$, απομένει το σύνολο των αρρήτων αριθμών, το οποίο συμβολίζεται ως $\mathbb{Q}^c$. Οι άρρητοι αριθμοί δεν μπορούν να γραφούν ως λόγος δύο ακεραίων και, αν εκφραστούν δεκαδικά, περιέχουν άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία. Είναι σχετικά εύκολο να κατανοήσει κανείς τη διαφορά ανάμεσα σε ένα σύνολο με πεπερασμένο αριθμό στοιχείων και ένα σύνολο με άπειρα στοιχεία. Ωστόσο, είναι πιο δύσκολο να αντιληφθούμε ότι κάποια άπειρα σύνολα έχουν περισσότερα στοιχεία από άλλα επίσης άπειρα σύνολα. Στα μαθηματικά, υπάρχουν πολλοί τύποι άπειρων συνόλων. Για τον Λογισμό, όμως, χρειαζόμαστε δύο βασικά είδη: το άπειρο των φυσικών αριθμών, το οποίο είναι μετρήσιμο, και το άπειρο των πραγματικών αριθμών, που είναι μεγαλύτερο, επειδή περιλαμβάνει περισσότερα στοιχεία από το πρώτο και καλείται υπεραριθμήσιμο. Σύνολα με ίδιο πλήθος στοιχείων με το $\mathbb{N}$ λέγονται αριθμή- σιμα, ενώ σύνολα όπως το $\mathbb{R}$, με περισσότερα στοιχεία, είναι μη αριθμήσιμα. Δύο σύνολα A και B θεωρούνται ότι έχουν ίσο πλήθος στοιχείων αν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κάθε στοιχείο του A με ένα μοναδικό στοιχείο του B, με τέτοιο τρόπο ώστε: (1) Κάθε στοιχείο του A να συνδέεται με ακριβώς ένα στοιχείο του B, και αντίστροφα. (2) Όλα τα στοιχεία και των δύο συνόλων να συμμετέχουν στην αντιστοίχηση, χωρίς να περισσεύει κανένα στοιχείο σε κανένα από τα δύο σύνολα. Έτσι, τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμα, ενώ τα $\mathbb{Q}^c$ και $\mathbb{R}$ δεν είναι. Η μετάβαση από το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ γίνεται μέσω της έννοιας της πραγματικής ευθείας. Το σύνολο $\mathbb{R}$ απεικονίζεται ως μια ευθεία γραμμή, όπου:

- Το σημείο 0 είναι η *αρχή του άξονα*[1].
- Το σημείο 1 ορίζεται ως η *μονάδα του άξονα*.



Σχήμα 4.1 *Η πραγματική ευθεία*

Η πραγματική ευθεία χωρίζεται σε δύο ημιάξονες: στον θετικό ημιάξονα βρίσκονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ενώ στον αρνητικό ημιάξονα βρίσκονται οι αρνητικοί πραγμα- τικοί αριθμοί. Κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό σημείο πάνω στην ευθεία, και κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό. Η συνέχεια της ευθείας εξασφαλίζει ότι δεν υπάρχουν κενά ή διακοπές, επιτρέποντας έτσι την άμεση σύνδεση κάθε τιμής με την επόμενη. Αυτή η συνεχής και αδιάσπαστη γραμμή, που περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς, είναι γνωστή ως πραγματική ευθεία και συμβολίζεται με $\mathbb{R}$. Στο θετικό ημιάξονα βρίσκονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και στο αρνητικό ημιάξονα οι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Η *συνέχεια* της ευθείας εξασφαλίζει ότι δεν υπάρχουν κενά ή διακοπές. Έτσι, μπορούμε να αναφερόμαστε στην *πραγματική ευθεία* $\mathbb{R}$, η οποία περιέχει το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών.

[1]Κάθε προσανατολισμένη ευθεία ε στην οποία έχουμε καθορίσει:

1. Ένα σημείο O σαν *αρχή*.
2. Ένα διάνυσμα $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ σαν μοναδιαίο, δηλαδή $\left|\overrightarrow{OI}\right| = \left|\vec{i}\right| = 1$

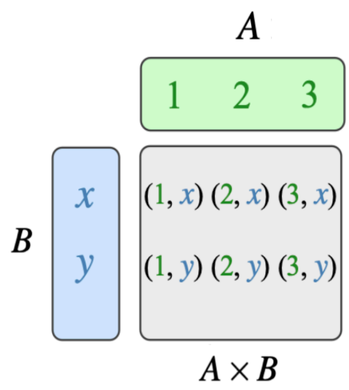
την καλούμε *άξονα* με αρχή το O και μοναδιαίο διάνυσμα το $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$. Τα άκρα του άξονα αντιστοιχούν στις τιμές $-\infty$ και $+\infty$, υποδηλώνοντας ότι ο άξονας εκτείνεται απεριόριστα προς δύο κατευθύνσεις του που συμβολίζονται με τα σύμβολα x' για την αρνητική κατεύθυνση και x για τη θετική κατεύθυνση. (i) Η ημιευθεία Ox λέγεται *θετικός ημιάξονας* Ox. (ii) Η ημιευθεία Ox' λέγεται *αρνητικός ημιάξονας* Ox'.

4.2.5 Ιστορικό Σχόλιο

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι τα μεγέθη είναι συμμετρικά, δηλαδή μπορεί να βρεθεί κοινό μέτρο μεταξύ αυτών, μέχρι που ανακάλυψαν την ύπαρξη ασυμμετρίας. Αυτή η κρίση ήρθε με την παρατήρηση ότι δεν υπάρχει κοινό μέτρο για τη διαγώνιο ενός τετραγώνου, δηλαδή η διαγώνιος δε μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο φυσικών αριθμών. Η λύση του προβλήματος της αξιωματικής θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών έγινε από τον Εύδοξο και βρίσκεται στο βιβλίο V, ορισμός 5, των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Η κατασκευή των άρρητων (ασύμμετρων) αριθμών, που βασίζεται στη θεωρία του Εύδοξου, δημοσιεύτηκε το 1872 από τον Dedekind και είναι γνωστή ως κατασκευή των πραγματικών αριθμών μέσω τομών (Dedekind cuts). Η θεωρία των Ευδόξου και Dedekind συνιστά ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά επιτεύγματα της θεωρίας αριθμών όλων των εποχών.

4.3 Καρτεσιανό Γινόμενο

Αν A και B είναι δύο μη κενά σύνολα, τότε το καρτεσιανό γινόμενο, $A \times B$, είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (a,b) με το πρώτο στοιχείο από το A και το δεύτερο από το B. Όπως και με τις άλλες πράξεις γινομένου, χρησιμοποιούμε το σύμβολο πολλαπλασιασμού $\times$ για να αναπαραστήσουμε το καρτεσιανό γινόμενο μεταξύ δύο συνόλων. Εδώ, χρησιμοποιούμε τη σημειογραφία $A \times B$ για το καρτεσιανό γινόμενο των A και B. Χρησιμοποιώντας τη σημειογραφία συνόλου, μπορούμε να γράψουμε το καρτεσιανό γινόμενο ως: $A \times B = \{(a,b)|a \in A, b \in B\}$. Αν τα δύο σύνολα είναι ίδια, δηλαδή αν $A = B$, τότε το $A \times B$ ονομάζεται το καρτεσιανό τετράγωνο του συνόλου A και σημειώνεται ως A^2: $A^2 = A \times A = \{(a,b)|a \in A, b \in A\}$

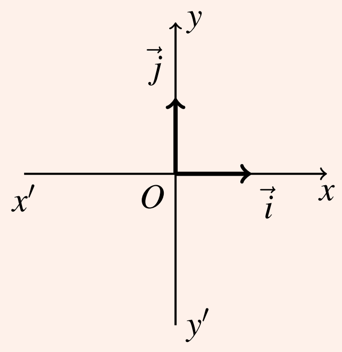


Σχήμα 4.2 *Καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων A και B.*

Το καρτεσιανό γινόμενο αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο στη μαθηματική ανάλυση και βρίσκει εφαρμογές σε πολλούς τομείς, όπως στην αναπαράσταση εικόνων, τη δομή της σκακιέρας, τον σχεδιασμό δεδομένων και άλλα πολλά. Προσφέρει έναν συστηματικό τρόπο να συσχετί- ζουμε στοιχεία από διαφορετικά σύνολα, σχηματίζοντας διατεταγμένα ζεύγη ή ν-πλέγματα, τα οποία διατηρούν τη σειρά των στοιχείων από τα αρχικά σύνολα. Αυτή η συσχέτιση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν θέλουμε να απεικονίσουμε πολύπλοκες σχέσεις και δομές. Για παράδειγμα, στην αναπαράσταση μιας ψηφιακής εικόνας, κάθε εικονοστοιχείο (pixel) μπορεί να περιγραφεί ως ένα διατεταγμένο ζεύγος συντεταγμένων που αντιστοιχεί στη θέση του στον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα. Έτσι, το καρτεσιανό γινόμενο μας επιτρέπει να ορίσουμε την εικόνα ως ένα σύνολο ζευγών συντεταγμένων που αντιστοιχούν στα σημεία της. Επιπλέον, σε παιχνίδια όπως το σκάκι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το καρτεσιανό γινόμενο για να ορίσουμε τη θέση κάθε τετραγώ- νου στη σκακιέρα. Αν θεωρήσουμε ότι οι γραμμές και οι στήλες της σκακιέρας αντιστοιχούν σε σύνολα, τότε το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων αυτών δίνει όλες τις πιθανές θέσεις των τετραγώνων. Συνεπώς, το καρτεσιανό γινόμενο παρέχει τη βάση για την κατασκευή πιο σύνθετων δομών και σχέσεων, διευκολύ- νοντας την κατανόηση και την ανάλυση δεδομένων που εξαρτώνται από πολλαπλές παραμέ- τρους. Με αυτή την προσέγγιση μπορούμε να δημιουργούμε πολυδιάστα- τες απεικονίσεις και να αναπτύσσουμε συστήματα που βασίζονται στη διασύνδεση στοιχείων από διάφορες πηγές ή σύνολα.

4.4 Καρτεσιανό Επίπεδο

Σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή O και μοναδιαία διανύσματα αντίστοιχα τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$, οπότε έχουμε ένα *ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο* ή ένα *σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο* ή ένα *καρτεσιανό επίπεδο* και το συμβολίζουμε με Oxy.



Σχήμα 4.3 *Καρτεσιανό επίπεδο*

Το σύστημα Oxy λέγεται ορθοκανονικό, γιατί:

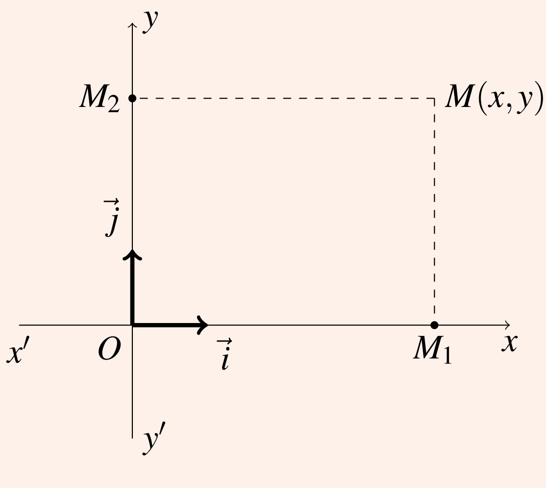
1. Είναι *ορθογώνιο* γιατί οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι κάθετοι.
2. Είναι *κανονικό* γιατί τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι ισομήκη.

4.5 Συντεταγμένες σημείου στο επίπεδο

Έστω M τυχαίο σημείο του καρτεσιανού επιπέδου Oxy. Από το M φέρνουμε $MM_1 \parallel y'y$ και $MM_2 \parallel x'x$. Αν x είναι η τετμημένη του M_1 ως προς τον άξονα $x'x$, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει

$$\overrightarrow{OM_1} = x \cdot \vec{i}$$

Τότε ο $x \in \mathbb{R}$ καλείται *τετμημένη* του M. 'Ομοια, αν y είναι η τετμημένη του M_2 ως προς τον άξονα $y'y$, υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OM_2} = y \cdot \vec{j}$. Τότε ο $y \in \mathbb{R}$ καλείται *τεταγμένη* του M. Η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου M λέγονται *συντεταγμένες του* M. Έτσι σε κάθε σημείο M του επιπέδου αντιστοιχεί ένα ζεύγος συντεταγμένων, δηλαδή ένα ζευγάρι (x, y) πραγματικών αριθμών. Ένα σημείο M με τετμημένη x και τεταγμένη y συμβολίζεται και με $M(x, y)$ ή απλά με (x, y). Αντίστροφα, σε κάθε ζεύγος (x, y) πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί ένα μοναδικό σημείο M του επιπέδου, το οποίο βρίσκουμε με τη διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω.



Σχήμα 4.4 *Καρτεσιανό επίπεδο*

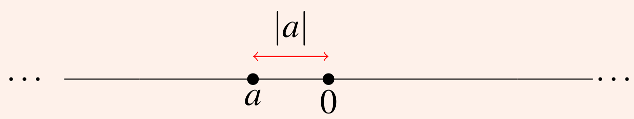
4.6 Η έννοια της απόστασης

Η έννοια της *απόστασης* ξεκινάει από την Ευκλείδεια γεωμετρία και φτάνει μέχρι τους σύγχρονους αφηρημένους μετρικούς χώρους. Σήμερα, η έννοια της απόστασης είναι ένα θεμελιώδες εργαλείο σε πολλούς τομείς των μαθηματικών και επιστημών, καθώς η ευελιξία της επιτρέπει τη μελέτη και την κατανόηση ποικίλων χώρων και δομών. Στη γραμμική άλγεβρα, την ανάλυση και την τοπολογία, η απόσταση παίζει κεντρικό ρόλο στη μελέτη των χώρων συναρτήσεων και των τελεστών, επιτρέποντας τη θεμελίωση και κατανόηση πολλών σημαντικών εννοιών. Πιο συγκεκριμένα, η έννοια της απόστασης στην Συναρτησιακή Ανάλυση είναι απαραίτητη για την μελέτη των διανυσματικών χώρων, όπου μετρικές και νόρμες χρησιμοποιούνται για να οριστεί το πόσο "κοντά" ή "μακριά" βρίσκονται στοιχεία μεταξύ τους. Η απόσταση επιτρέπει την οργάνωση και κατανόηση των ιδιοτήτων των διανυσματικών χώρων και των τελεστών που δρουν σε αυτούς τους χώρους. Για παράδειγμα, η σύγκλιση ακολουθιών σε χώρους Banach και Hilbert βασίζεται στην έννοια της απόστασης, αφού η σύγκλιση ενός στοιχείου προς ένα άλλο εξαρτάται από τη δυνατότητα μέτρησης της "πλησιέστερης απόστασης" μεταξύ τους. Οι εφαρμογές της απόστασης επεκτείνονται σε πολλούς τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας. Στη φυσική, για παράδειγμα, η απόσταση αποτελεί βασικό στοιχείο στη θεωρία του χωροχρόνου και στην περιγραφή των κβαντικών συστημάτων, όπου οι αποστάσεις μεταξύ καταστάσεων καθορίζουν την ομοιότητά τους. Στην επεξεργασία σήματος, η απόσταση βοηθά στην ανάλυση σημάτων και στην ανίχνευση μοτίβων, ενώ στην τεχνητή νοημοσύνη χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της "ομοιότητας" μεταξύ δεδομένων. Η έννοια της απόστασης έχει περάσει από πολλές φάσεις εξέλιξης, ξεκινώντας από την απλή ιδέα της απόλυτης τιμής, η οποία χρησιμοποιήθηκε για να μετρήσει την απόσταση μεταξύ δύο αριθμών στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

4.6.1 Η έννοια της απόλυτης τιμής

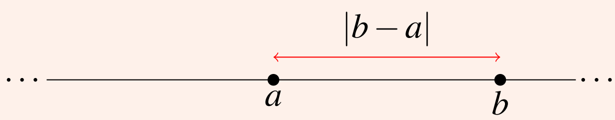
Η *απόλυτη τιμή* ενός αριθμού x, συμβολισμένη ως $|x|$, ορίζει την "απόσταση" του αριθμού αυτού από το μηδέν. Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού ορίζεται ως:

$$|x| = \text{απόσταση από την αρχή} = \begin{cases} x & \text{αν } x \geq 0 \\ -x & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$



Σχήμα 4.5 *$|a|$ είναι η απόσταση από το a έως την αρχή των αξόνων*

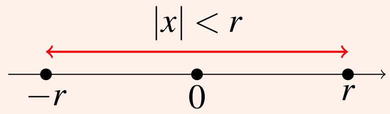
Η απόσταση μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών a και b είναι $|b-a|$, η οποία είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα a και b (Σχήμα 4.6).



Σχήμα 4.6 *Η απόσταση μεταξύ a και b.*

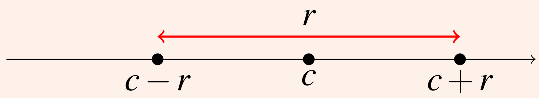
Τα ανοιχτά και τα κλειστά διαστήματα μπορούν να περιγραφούν από ανισότητες απόλυτης τιμής. Για παράδειγμα, το διάστημα $(-r, r)$ περιγράφεται από την ανισότητα $|x| < r$ (Σχήμα 4.7):
Πιο γενικά, για ένα διάστημα συμμετρικό γύρω από την τιμή c (Σχήμα 4.8):
Στη συνέχεια, η έννοια αυτή γενικεύτηκε για να μετρήσει την απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε αριθμών a και b ως $|a-b|$. Αυτός ο απλός ορισμός της απόστασης αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη της Ευκλείδειας γεωμετρίας, όπου η απόσταση μεταξύ δύο σημείων στο επίπεδο ορίζεται ως η απόσταση ανάμεσα στις συντεταγμένες τους, χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο

$$\boxed{|x| < r \quad \Leftrightarrow \quad -r < x < r \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-r, r)}$$



Σχήμα 4.7 *Το διάστημα* $(-r,r) = \{x : |x| < r\}$

$$\boxed{|x - c| < r \quad \Leftrightarrow \quad c - r < x < c + r \quad \Leftrightarrow \quad x \in (c - r, c + r)}$$



Σχήμα 4.8 *Το διάστημα* $(a,b) = (c - r, c + r)$

θεώρημα. Στον καρτεσιανό χώρο, η απόσταση μεταξύ δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Αυτός ο ορισμός επεκτάθηκε περαιτέρω στους τρισδιάστατους και ν-διάστατους Ευκλείδειους χώρους, όπου η απόσταση μεταξύ σημείων καθορίζεται με παρόμοιο τρόπο.
Η απόσταση, ωστόσο, δεν περιορίστηκε μόνο στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Με την ανάπτυξη της θεωρίας των συναρτήσεων και της ανάλυσης, η απόσταση μεταξύ συναρτήσεων ή στοιχείων πιο γενικών διανυσματικών χώρων άρχισε να μελετάται, χρησιμοποιώντας πιο αφηρημένες έννοιες όπως οι *νόρμες* και οι *μετρικές*. Στη συναρτησιακή ανάλυση, για παράδειγμα, η απόσταση μεταξύ δύο συναρτήσεων f και g στον χώρο L^2 δίνεται από:

$$d(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad a \leq b$$

Αυτή η έννοια της απόστασης έχει επεκταθεί και σε αφηρημένους μετρικούς χώρους, όπου η απόσταση μεταξύ στοιχείων καθορίζεται από μια συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί συγκεκριμένες ιδιότητες (μη-αρνητικότητα, ταυτοτική ιδιότητα, συμμετρία και ανισότητα τριγών

4.7 Μετρικός Χώρος

Ένας μετρικός χώρος είναι ένα ζεύγος (X, d), όπου X είναι ένα σύνολο και d είναι μια συνάρτηση που ονομάζεται *μετρική* και ορίζει την απόσταση μεταξύ δύο σημείων του συνόλου. Η μετρική $d : X \times X \to \mathbb{R}$ πρέπει να ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες για κάθε $x, y, z \in X$:

- *Μη Αρνητικότητα*: $d(x,y) \geq 0$ και $d(x,y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.
- *Συμμετρία*: $d(x,y) = d(y,x)$.
- *Ανισότητα Τριγώνου*: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Η μετρική d ορίζει μια έννοια "απόστασης" στον χώρο X.

Παραδείγματα μετρικών Χώρων

- *Ευκλείδειος χώρος*: Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια μετρική
$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$
- *Χώρος των απόλυτων διαφορών*: Στο $\mathbb{R}^n$ με μετρική
$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad (\text{μετρική } L_1).$$
- *Απλός διακριτός χώρος*: $d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \neq y \\ 0, & \text{αν } x = y \end{cases}$

Υπενθύμιση 4.7.1 Ένας διανυσματικός χώρος είναι ένα σύνολο V στοιχείων (που ονομάζονται διανύσματα), στο οποίο ορίζονται δύο πράξεις:

- η *πρόσθεση διανυσμάτων* και
- ο *πολλαπλασιασμός διανύσματος με πραγματικό αριθμό*,

οι οποίες ικανοποιούν ορισμένα αξιώματα (όπως προσεταιριστικότητα, ύπαρξη μηδενικού στοιχείου και αντιθέτου, κατανομή κ.λπ.).
Οι διανυσματικοί χώροι αποτελούν το βασικό πλαίσιο της Γραμμικής Άλγεβρας και της Ανάλυσης, καθώς επιτρέπουν τη μελέτη αντικειμένων όπως διανύσματα, συναρτήσεις και ακολουθίες με ενιαίο και αφηρημένο τρόπο. Παραδείγματα διανυσματικών χώρων είναι ο $\mathbb{R}^n$, ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων και ο χώρος των ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

4.7.1 Χώρος με Νόρμα (Normed Space)

Ένας χώρος με νόρμα είναι ένας διανυσματικός χώρος V εφοδιασμένος με μια *νόρμα* $\|\cdot\|$, που είναι μια συνάρτηση $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ και ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες για κάθε $x, y \in V$ και κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$:

- *Μη Αρνητικότητα*:
$$\|x\| \geq 0 \quad \text{και} \quad \|x\| = 0 \text{ αν και μόνο αν } x = 0.$$
- *Ομοιογένεια (Homogeneity)*:
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|.$$
- *Ανισότητα Τριγώνου*:
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Παραδείγματα Χώρων με Νόρμα

1. *Ο χώρος* $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια νόρμα

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

2. *Χώρος* $\mathbb{R}^n$ με την L_1 νόρμα (Manhattan ή taxicab norm):

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

3. *Χώρος* L^p: Οι χώροι L^p (όπως L^2, L^1) αποτελούν παραδείγματα χώρων με νόρμα που χρησιμοποιούνται στη λειτουργική ανάλυση, όπου η νόρμα είναι

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

4.8 Πράξεις στους Πραγματικούς Αριθμούς

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, μπορούμε να εκτελούμε τις βασικές αριθμητικές πράξεις:

- Πρόσθεση,
- Αφαίρεση, η οποία περιγράφεται ως "αντίστροφη πρόσθεση",
- Πολλαπλασιασμός, και
- Διαίρεση, η οποία περιγράφεται ως "αντίστροφος πολλαπλασιασμός".

Οι πράξεις αυτές μπορούν να εκτελούνται χωρίς προβλήματα όσο βρισκόμαστε στο πεδίο των πραγματικών αριθμών.

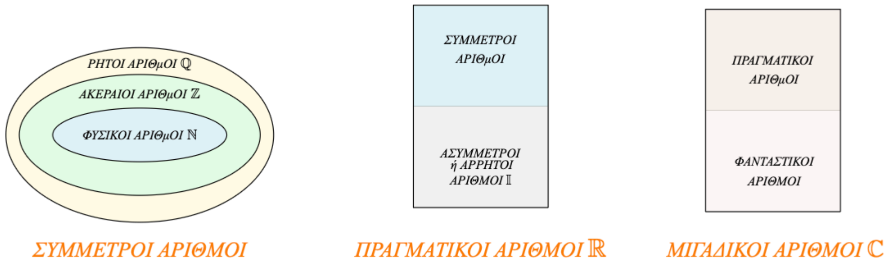
Περιορισμοί των Πραγματικών Αριθμών

Είναι επίσης δυνατό να εξάγουμε ρίζες στους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$, αλλά ο περιορισμός προκύπτει όταν ασχολούμαστε με άρτιες τάξεις ριζών (όπως τετραγωνικές ρίζες) από αρνητικούς αριθμούς. Αυτό συμβαίνει γιατί δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός του οποίου το τετράγωνο να είναι αρνητικό.
mmm

4.9 Εισαγωγή των μιγαδικών Αριθμών

Γνωρίζουμε ότι μια δευτεροβάθμια εξίσωση με αρνητική διακρίνουσα δεν έχει λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα, η εξίσωση $x^2 = -1$ δεν μπορεί να λυθεί μέσα στο σύνολο $\mathbb{R}$, αφού το τετράγωνο οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού είναι πάντα μη αρνητικό. Για να ξεπεράσουμε αυτόν τον περιορισμό, επεκτείνουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ σε ένα νέο σύνολο, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Το σύνολο $\mathbb{C}$ διατηρεί όλες τις πράξεις και ιδιότητες του $\mathbb{R}$ αλλά, επιπλέον, περιέχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $x^2 = -1$. Συγκεκριμένα, υπάρχει ένα στοιχείο i στο $\mathbb{C}$, για το οποίο ισχύει $i^2 = -1$. με βάση αυτές τις παραδοχές, το διευρυμένο σύνολο $\mathbb{C}$ περιλαμβάνει τα εξής στοιχεία:

1. Όλους τους πραγματικούς αριθμούς.
2. Όλα τα στοιχεία της μορφής yi, όπου y είναι πραγματικός αριθμός και το στοιχείο είναι το γινόμενο του b με το i.
3. Όλα τα αθροίσματα της μορφής $x+yi$, όπου x και y είναι πραγματικοί αριθμοί.



Σχήμα 4.9

Τα στοιχεία του συνόλου $\mathbb{C} = \{z = x+iy \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ ονομάζονται *μιγαδικοί αριθμοί*, και το $\mathbb{C}$ αναφέρεται ως το *σύνολο των μιγαδικών αριθμών*.

4.9.1 Ιστορικό Σχόλιο

Οι απαρχές για τη δημιουργία των μιγαδικών αριθμών ανάγονται στις προσπάθειες πολλών μαθηματικών να επιλύσουν εξισώσεις 3ου βαθμού. Αν στην εξίσωση $ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta = 0$ θέσουμε $x = y - \dfrac{\beta}{3a}$ και εκτελέσουμε τις πράξεις, τότε προκύπτει μια εξίσωση της μορφής

$$x^3 = px+q.$$

Στις αρχές του 16ου αιώνα, οι Ιταλοί αλγεβριστές S. del Ferro και N. Tartaglia ανακάλυψαν μια μέθοδο επίλυσης τέτοιων εξισώσεων, που με σημερινό συμβολισμό ισοδυναμεί με τον τύπο:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{2}-\frac{p^3}{3}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{2}-\frac{p^3}{3}}} \qquad (6.1)$$

Υπάρχουν εξισώσεις με πραγματικές ρίζες, όπως για παράδειγμα, η $x^3 = 15x+4$ που έχει μια προφανή ρίζα το 4 (οι άλλες δύο είναι οι $-2+\sqrt{3}$ και $-2-\sqrt{3}$), αλλά η διακρίνουσα D είναι αρνητική! Ο τύπος στη συγκεκριμένη περίπτωση δίνει

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Στα μέσα του 16ου αιώνα, ο R. Bombelli, με καινοτόμες για την εποχή του υποθέσεις, κατόρθωσε να δείξει ότι

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 2+\sqrt{-121} \quad \text{και} \quad (2-\sqrt{-1})^3 = 2-\sqrt{-121}.$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις ισότητες στην (6.1), προκύπτει άμεσα ότι $x = 4$, αποδεικνύοντας πως το αδιανόητο μπορεί να γίνει πραγματικότητα. Οι αριθμοί της μορφής $z = a+\beta i$, όπου $i = \sqrt{-1}$, που αρχικά ονομάστηκαν φανταστικοί και αργότερα μιγαδικοί, έγιναν από τότε ένα αναπόσπαστο εργαλείο των μαθηματικών και των εφαρμογών τους σε άλλες επιστήμες

Συζυγής Μιγαδικού Αριθμού

Ορισμός 4.9.1 Έστω $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Ο μιγαδικός αριθμός $x - yi$ καλείται *συζυγής* του z και συμβολίζεται με $\overline{z}$, δηλαδή

$$\overline{z} = x - yi.$$

Ιδιότητες Συζυγών

(i)
$$\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \cdots + \overline{z_n},$$
για κάθε $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

(ii)
$$\overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \cdots \overline{z_n},$$
για κάθε $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

(iii)
$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}},$$
για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ με $w \neq 0$.

(iv) Έστω $z \in \mathbb{C}$. Τότε:

(a)
$$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z), \qquad z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)\,i.$$

(b)
$$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z} \quad (\Longleftrightarrow z - \overline{z} = 0).$$

(c)
$$z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z} \quad (\Longleftrightarrow z + \overline{z} = 0).$$

Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού

Ορισμός 4.9.2 Έστω $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Ο πραγματικός αριθμός

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

καλείται *μέτρο* του z και συμβολίζεται με $|z|$, δηλαδή

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Έστω $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ τρεις μιγαδικοί αριθμοί. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες του μέτρου και του συζυγούς.

Ιδιότητες Μέτρου

(i) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει:

(a) $|z| \geq 0$

(b) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

(c) $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

(d) $|z|^2 = z\bar{z}$ (επομένως $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$)

(e) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

(f)

$$\big||\mathrm{Re}(z)| - |\mathrm{Im}(z)|\big| \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$$

(ii)

$$|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1||z_2| \cdots |z_n|,$$

για κάθε $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

(iii)

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|},$$

για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ με $w \neq 0$.

(iv)

$$\big||z| - |w|\big| \leq |z + w| \leq |z| + |w|,$$

για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$.

(τριγωνική ανισότητα)

Παράδειγμα 4.9.3 Να βρεθεί η εξίσωση:

(a) κύκλου με ακτίνα 2 και κέντρο $(-3, 4)$,

(b) έλλειψης με εστίες τα σημεία $(0, 2)$, $(0, -2)$ και μεγάλο άξονα μήκους 10.

Λύση.

(a) Το κέντρο του κύκλου παριστάνεται από τον μιγαδικό αριθμό $-3 + 4i$.
Η απόσταση ενός σημείου z του κύκλου από το κέντρο είναι ίση με 2, οπότε

$$|z - (-3 + 4i)| = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad |z + 3 - 4i| = 2,$$

που είναι η ζητούμενη εξίσωση. Σε καρτεσιανή μορφή, θέτοντας $z = x + iy$, έχουμε

$$|(x + 3) + i(y - 4)| = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4.$$

(b) Για κάθε σημείο z της έλλειψης, το άθροισμα των αποστάσεών του από τις εστίες είναι ίσο με 10. Οι εστίες παριστάνονται από τους μιγαδικούς αριθμούς

$$2i \quad \text{και} \quad -2i.$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$|z-2i|+|z+2i|=10.$$

Παράδειγμα 4.9.4 Να παρασταθεί γραφικά το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right|=2.$$

Λύση.

Η δοσμένη σχέση ισοδυναμεί με

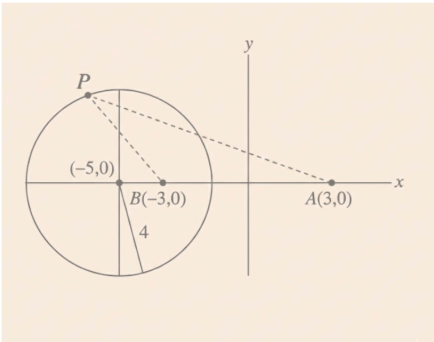
$$\frac{|z-3|}{|z+3|}=2 \quad \Longleftrightarrow \quad |z-3|=2|z+3|, \qquad z\neq -3.$$

Θέτουμε $z=x+iy$. Τότε

$$|z-3|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}, \qquad |z+3|=\sqrt{(x+3)^2+y^2}.$$

Άρα

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\sqrt{(x+3)^2+y^2}.$$



Σχήμα 4.10

Υψώνοντας στο τετράγωνο και απλοποιώντας, παίρνουμε

$$(x-3)^2+y^2=4\big((x+3)^2+y^2\big).$$

Αναπτύσσοντας τα τετράγωνα:

$$x^2-6x+9+y^2=4x^2+24x+36+4y^2.$$

Μεταφέροντας όλα τα μέλη στο ένα μέλος προκύπτει

$$x^2+y^2+10x+9=0.$$

Ολοκληρώνοντας τετράγωνο ως προς x:

$$(x+5)^2+y^2=16.$$

Επομένως

$$|z+5| = 4,$$

δηλαδή το ζητούμενο σύνολο είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $(-5,0)$ και ακτίνα 4.
Γεωμετρικά, η σχέση

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$$

εκφράζει ότι για κάθε σημείο P του επιπέδου που ανήκει στον κύκλο, η απόσταση του P από το σημείο $A(3,0)$ είναι διπλάσια της απόστασής του από το σημείο $B(-3,0)$.

Πρόταση 4.9.5 Έστω z_1 και z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί. Τότε ισχύει

$$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|.$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $|z|^2 = z\overline{z}$, έχουμε

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}).$$

Άρα

$$= z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}.$$

Δηλαδή

$$= |z_1|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+|z_2|^2.$$

Παρατηρούμε ότι

$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}),$$

οπότε

$$|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2.$$

Επειδή για κάθε μιγαδικό αριθμό w ισχύει $\mathrm{Re}(w) \leq |w|$, παίρνουμε

$$|z_1+z_2|^2 \leq |z_1|^2+2|z_1\overline{z_2}|+|z_2|^2.$$

Αλλά $|z_1\overline{z_2}| = |z_1||z_2|$,

άρα

$$|z_1+z_2|^2 \leq |z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2.$$

Λαμβάνοντας τετραγωνική ρίζα και από τα δύο μέλη, καταλήγουμε ότι

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Παράδειγμα 4.9.6 Να αποδειχθεί ότι

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος και να συναχθεί ότι

$$\left|a + \sqrt{a^2 - b^2}\right| + \left|a - \sqrt{a^2 - b^2}\right| = |a + b| + |a - b|,$$

όπου a, b είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Λύση. Υπολογίζουμε το αριστερό μέλος:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} + (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}.$$

Άρα

$$= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}).$$

Αναπτύσσοντας:

$$= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}.$$

Απλοποιώντας, προκύπτει

$$= 2z_1\overline{z_1} + 2z_2\overline{z_2} = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

4.10 Η άλγεβρα και η γεωμετρία των μιγαδικών αριθμών

Βασικές πράξεις στο μιγαδικό επίπεδο

(i) Πρόσθεση:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

(ii) Αφαίρεση:

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

(iii) Πολλαπλασιασμός:

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

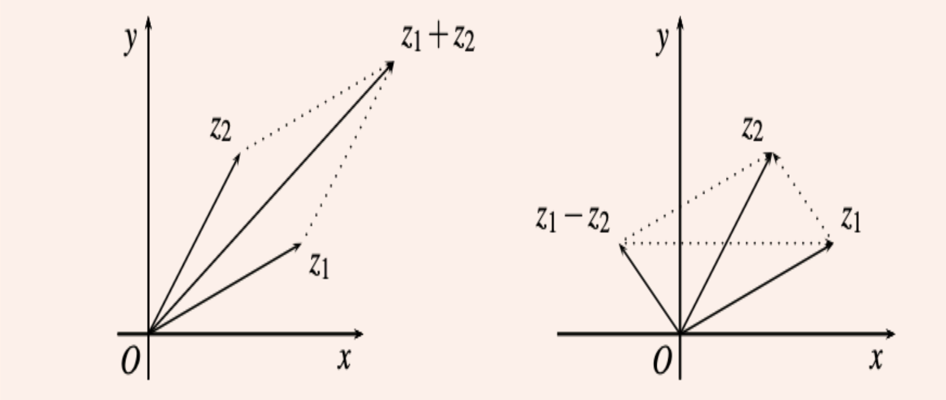
(iv) Διαίρεση:

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \quad x_2+iy_2\neq 0$$

(v) Ισότητα:

$$(x_1+iy_1)=(x_2+iy_2) \iff x_1=x_2 \text{ και } y_1=y_2$$

Επειδή ένας μιγαδικός αριθμός $z=x+iy$ μπορεί να θεωρηθεί, όπως είδαμε παραπάνω, σαν ένα διατεταγμένο ζεύγος (x,y), μπορούμε να παραστήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς με σημεία σ' ένα επίπεδο Oxy. Το επίπεδο αυτό ονομάζεται *μιγαδικό επίπεδο* ή *επίπεδο του Gauss* ή *επίπεδο του Argand*.



Σχήμα 4.11 *Κανόνας του παραλληλογράμμου*

Γεωμετρική ερμηνεία

Έστω A και B τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που παριστάνουν τους z_1 και z_2 αντίστοιχα. Συμπληρώνουμε το παραλληλόγραμμο $OACB$.

Τότε

$$|z_1|=OA, \quad |z_2|=OB, \quad |z_1+z_2|=OC, \quad |z_1-z_2|=BA.$$

Από την ιδιότητα του παραλληλογράμμου έχουμε

$$OC^2+BA^2=2OA^2+2OB^2,$$

που δίνει ακριβώς

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2.$$

Επομένως,

$$|z_1|^2+|z_2|^2=\tfrac{1}{2}|z_1+z_2|^2+\tfrac{1}{2}|z_1-z_2|^2.$$

Θέτουμε τώρα

$$z_1=a+\sqrt{a^2-b^2}, \qquad z_2=a-\sqrt{a^2-b^2}.$$

Τότε

$$z_1+z_2=2a, \qquad z_1-z_2=2\sqrt{a^2-b^2}.$$

Από τη σχέση (1) έχουμε

$$|z_1|^2+|z_2|^2=\tfrac{1}{2}|2a|^2+\tfrac{1}{2}|2\sqrt{a^2-b^2}|^2=2|a|^2+2|a^2-b^2|.$$

Επιπλέον,

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).$$

Με απλοποίηση προκύπτει

$$(|z_1|+|z_2|)^2=|a+b|^2+|a-b|^2+2|a^2-b^2|=\big(|a+b|+|a-b|\big)^2.$$

Λαμβάνοντας τετραγωνική ρίζα καταλήγουμε

$$|z_1|+|z_2|=|a+b|+|a-b|.$$

Άρα

$$\left|a+\sqrt{a^2-b^2}\right|+\left|a-\sqrt{a^2-b^2}\right|=|a+b|+|a-b|.$$

4.11 Πολική Μορφή Μιγαδικού Αριθμού

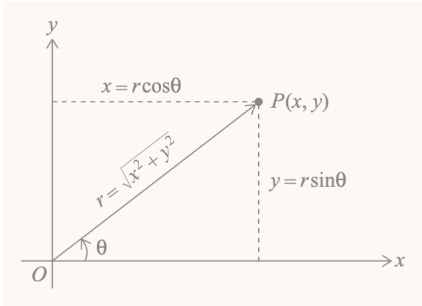
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις πολικές συντεταγμένες ως έναν εναλλακτικό τρόπο για να προσδιορίσουμε έναν μιγαδικό αριθμό. Έστω ότι το σημείο $P(x,y)$ παριστάνει τον μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό

$$z=x+iy.$$

Θέτουμε r το μήκος του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος OP και θ τη γωνία που σχηματίζει το OP με τον θετικό ημιάξονα x.

Τότε το σημείο P προσδιορίζεται από το ζεύγος (r,θ), που ονομάζεται *πολικές συντεταγμένες* του σημείου P. Η σχέση μεταξύ των καρτεσιανών και των πολικών συντεταγμένων δίνεται από:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$



Σχήμα 4.12

Ο αριθμός r είναι το μήκος του διανύσματος θέσης που παριστάνει τον z, δηλαδή

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2},$$

και ονομάζεται *μέτρο* του μιγαδικού αριθμού z. Η γωνία θ, μετρημένη σε ακτίνια, είναι η γωνία που σχηματίζει ο z με τον θετικό ημιάξονα x και ονομάζεται *πλάτος* ή *όρισμα* του z, συμβολιζόμενο με $\arg z$.
Για τον μιγαδικό αριθμό $z = x+iy$ μπορούμε να γράψουμε

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

που ονομάζεται *πολική μορφή* του μιγαδικού αριθμού z. Συχνά χρησιμοποιείται και η συντομογραφία

$$\operatorname{cis}\theta = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Η γωνία θ έχει άπειρες δυνατές τιμές, οι οποίες διαφέρουν κατά ακέραια πολλαπλάσια του 2π. Οι τιμές αυτές μπορούν να προσδιοριστούν από τη σχέση

$$\tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Η σχέση αυτή από μόνη της δεν καθορίζει μοναδικά τη γωνία, διότι η εφαπτομένη έχει περίοδο π. Η συνάρτηση $\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ δίνει τιμές μόνο στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε πρέπει να λάβουμε υπόψη το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται το σημείο (x,y) και, όταν χρειάζεται, να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε π, ώστε η γωνία να αντιστοιχεί σωστά στη θέση του μιγαδικού. Επειδή γενικά τα ορίσματα διαφέρουν κατά $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, δηλαδή

$$\arg z = \theta + 2k\pi,$$

για να εξασφαλίσουμε μοναδικότητα περιορίζουμε τη γωνία στο διάστημα

$$-\pi < \theta \leq \pi.$$

Η μοναδική τιμή του θ που ανήκει στο παραπάνω διάστημα ονομάζεται *κύρια τιμή του ορίσματος* του z και συμβολίζεται με $\operatorname{Arg} z$.

Σχόλιο 4.11.1

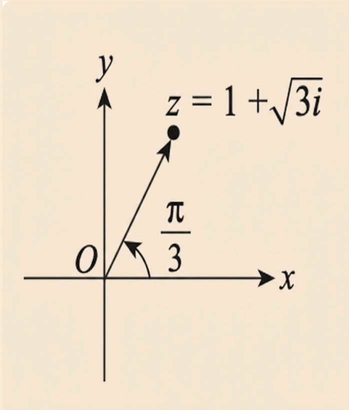
1. Ο μιγαδικός αριθμός πρέπει να είναι $z \neq 0$ όταν χρησιμοποιούνται πολικές συντεταγμένες, διότι αν $z = 0$, η γωνία θ δεν ορίζεται.

2. Αν $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, τότε

$$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$$

και

$$z^{-1} = \frac{1}{r}\big(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\big).$$



Σχήμα 4.13 *Πολικές συντεταγμένες*

3. Για αρνητικό πραγματικό αριθμό z, ισχύει

$$\operatorname{Arg} z = \pi.$$

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_4 = 1 - \sqrt{3}i.$$

Για όλους τους παραπάνω αριθμούς έχουμε

$$\tan^{-1}\left(\frac{|y|}{|x|}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

(i) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο. Άρα

$$\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{3}, \qquad \arg z = \frac{\pi}{3} + 2n\pi.$$

(ii) Ο $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο. Άρα

$$\operatorname{Arg} z = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, \qquad \arg z = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi.$$

(iii) Ο $z_3 = -1 - \sqrt{3}i$ ανήκει στο τρίτο τεταρτημόριο. Άρα

$$\operatorname{Arg} z = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3},$$

ή ισοδύναμα

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{2\pi}{3}, \qquad \arg z = -\frac{2\pi}{3} + 2n\pi.$$

(iv) Ο $z_3 = -1 - \sqrt{3}i$ ανήκει στο τρίτο τεταρτημόριο. Άρα

$$\operatorname{Arg} z = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3},$$

ή ισοδύναμα

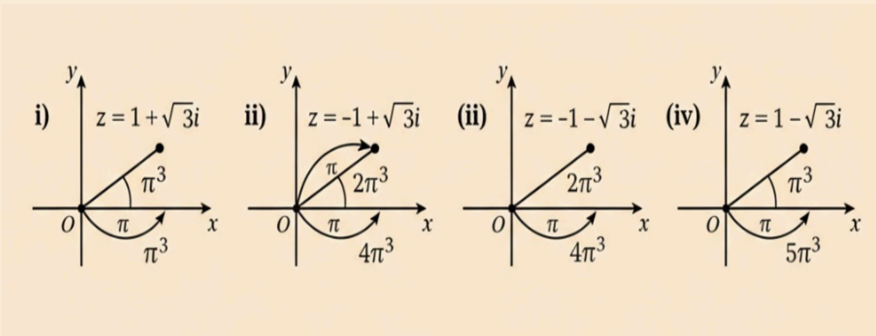
$$\operatorname{Arg} z = -\frac{2\pi}{3}, \qquad \arg z = -\frac{2\pi}{3} + 2n\pi.$$

(v) Ο $z_4 = 1 - \sqrt{3}i$ ανήκει στο τέταρτο τεταρτημόριο. Άρα

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{3},$$

ή ισοδύναμα

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{3}, \qquad \arg z = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi.$$



Σχήμα 4.14

Υπενθυμίζουμε ότι:

$$\operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{Arg}(-1) = \pi,$$

$$\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{Arg}(-1+i) = \frac{3\pi}{4}, \qquad \operatorname{Arg}(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}.$$

Σημείωση 4.11.2 Έστω ότι δίνονται δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$. Αξιοποιώντας την ταύτιση $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, κάθε μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ αντιστοιχεί φυσικά στο διάνυσμα $\vec{z} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Με αυτή την ερμηνεία, μπορούμε να αποδώσουμε στις πράξεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών γεωμετρική σημασία:

- Το γινόμενο $\Re(\bar{z}_1 z_2)$ παριστάνει το εσωτερικό (βαθμωτό) γινόμενο $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2$,
- Το γινόμενο $\Im(\bar{z}_1 z_2)$ παριστάνει το εξωτερικό (διανυσματικό) γινόμενο ως προσδιοριστή:

$$\boxed{\vec{z}_1 \times \vec{z}_2 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}}$$

Αυτή η αναπαράσταση δεν εισάγει νέα πράξη στους $\mathbb{C}$, αλλά αξιοποιεί την αντιστοιχία με το $\mathbb{R}^2$ για γεωμετρική ερμηνεία.

Κατ' αναλογία με τα διανύσματα, έστω ότι δίνονται δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$. Τότε, ισχύουν τα εξής:

(a) *Εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο*: Το εσωτερικό γινόμενο των δύο αριθμών ορίζεται ως

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| \cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 = \mathrm{Re}(\overline{z_1} z_2) = \frac{\overline{z_1} z_2 + z_1 \overline{z_2}}{2}.$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των z_1 και z_2, η οποία κυμαίνεται από 0 έως π. Αυτό το γινόμενο είναι ένας πραγματικός αριθμός και μοιάζει με το εσωτερικό γινόμενο των διανυ- σμάτων.

(b) *Εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο*: Το εξωτερικό γινόμενο των δύο αριθμών δίνεται από τη σχέση

$$z_1 \times z_2 = |z_1||z_2| \sin\theta = x_1y_2 - x_2y_1 = \mathrm{Im}(\overline{z_1} z_2) = \frac{\overline{z_1} z_2 - z_1 \overline{z_2}}{2i}.$$

Αυτή η ποσότητα είναι επίσης ένας πραγματικός αριθμός και είναι ανάλογη με το διανυσματικό γινόμενο των διανυσμάτων. Εάν οι z_1 και z_2 είναι διαφορετικοί από το μηδέν, τότε ισχύουν οι εξής προτάσεις:

(i) μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι οι z_1 και z_2 κάθετοι είναι το εσωτερικό γινόμενο $z_1 \cdot z_2 = 0$.

(ii) μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι οι z_1 και z_2 παράλληλοι είναι το εξωτερικό γινόμενο $z_1 \times z_2 = 0$.

Με άλλα λόγια, το εσωτερικό γινόμενο των z_1, z_2 σχετίζεται με τη γωνία θ μεταξύ τους και, ειδικότερα, μηδενίζεται αν και μόνο αν είναι κάθετα μεταξύ τους. Αντίθετα, το εξωτερικό γινόμενο μετρά το (προσανατολισμένο) εμβαδό του παραλληλογράμμου που ορίζουν και μηδενίζεται αν και μόνο αν τα z_1, z_2 είναι συνευθειακά (δηλαδή παράλληλα).

4.12 Ο τύπος του De Moivre και οι ρίζες των μιγαδικών αριθμών

Οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των μιγαδικών αριθμών είναι σχετικά εύκολες στην καρτεσιανή τους μορφή, δηλαδή όταν οι αριθμοί εκφράζονται ως $z = x + iy$. Ωστόσο, οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης είναι ακόμη πιο εύκολες όταν οι αριθμοί εκφράζονται στην πολική τους μορφή. Συγκεκριμένα, αν:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{και} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2), \quad \text{με } r_2 \neq 0$$

τότε μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Μια γενίκευση της σχέσης του πολλαπλασιασμού είναι η εξής:

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

Αν θέσουμε $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, τότε η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

Αυτή η σχέση ονομάζεται *τύπος του De Moivre* και μας δίνει την n-οστή δύναμη ενός μιγαδικού αριθμού.

Υπολογισμός n-οστής ρίζας

Η n-οστή ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού z ορίζεται ως ο μιγαδικός αριθμός w, έτσι ώστε να ισχύει:

$$w^n = z$$

Έστω $w = r_w[\cos\theta_w + i\sin\theta_w]$ και $z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$. Η σχέση $w^n = z$ γράφεται με τη χρήση του τύπου του De Moivre:

$$r_w^n [\cos(n\theta_w) + i\sin(n\theta_w)] = r[\cos\theta + i\sin\theta]$$

Από τον ορισμό της ισότητας δύο μιγαδικών αριθμών, προκύπτει:

$$r_w^n = r \quad \text{και} \quad n\theta_w = \theta + 2k\pi, \quad \text{με} \quad r_w,\ r > 0 \quad \text{και } k \in \mathbb{Z}$$

Αν τις δύο τελευταίες σχέσεις τις υψώσουμε στο τετράγωνο και τις προσθέσουμε, τότε:

$$r_w = \sqrt[n]{r}$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση του (1.8), έχουμε:

$$\cos n\theta_w = \cos\theta \quad \text{και} \quad \sin n\theta_w = \sin\theta$$

Άρα:

$$n\theta_w = \theta + 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad \theta_w = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Τελικά, η n-οστή ρίζα του μιγαδικού αριθμού $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι:

$$w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1.$$

Δύναμη μιγαδικού αριθμού

Δύναμη μιγαδικού αριθμού

Οι δυνάμεις ενός μιγαδικού αριθμού ορίζονται με ακριβώς όμοιο τρόπο όπως και στους πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή:

(a) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ορίζουμε

$$z^\nu = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{\nu \text{ φορές}}, \qquad \nu = 1,2,3,\ldots$$

(b) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$ ορίζουμε

$$z^0 = 1, \qquad z^{-\nu} = \frac{1}{z^\nu}, \qquad \nu = 1,2,3,\ldots$$

Για τις δυνάμεις των μιγαδικών αριθμών ισχύουν ακριβώς οι ίδιες ιδιότητες που ισχύουν και για τις δυνάμεις των πραγματικών αριθμών.
Ιδιαίτερα για τις δυνάμεις του i έχουμε:

$$i^0 = 1, \qquad i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1.$$

Έστω $\nu \in \mathbb{Z}$. Τότε, σύμφωνα με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης, υπάρχουν μοναδικά $\pi \in \mathbb{Z}$ και $\upsilon \in \{0,1,2,3\}$ τέτοια ώστε

$$\nu = 4\pi + \upsilon.$$

Άρα

$$i^{\nu} = i^{4\pi+\upsilon} = (i^4)^{\pi} i^{\upsilon} = 1^{\pi} i^{\upsilon} = i^{\upsilon},$$

οπότε

$$i^{\nu} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \upsilon = 0, \\ i, & \text{αν } \upsilon = 1, \\ -1, & \text{αν } \upsilon = 2, \\ -i, & \text{αν } \upsilon = 3. \end{cases}$$

4.13 Ο τύπος του Euler

Ο τύπος του Euler εκφράζει μια αναπάντεχη σχέση μεταξύ της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^x$ και των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων $g(x) = \sin x$ και $h(x) = \cos x$. Ο τύπος αυτός ισχύει για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς. Μπορούμε να προσθέτουμε και να πολλαπλασιάζουμε μιγαδικούς αριθμούς ως εξής:

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Ως αποτέλεσμα μπορούμε να υπολογίζουμε πολυωνυμικές συναρτήσεις της μιγαδικής μεταβλητής $z = a+bi$:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n.$$

Μπορούμε επίσης να μετρήσουμε την απόσταση d μεταξύ δύο μιγαδικών αριθμών ορίζοντας

$$d(a+bi, c+di) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}.$$

Με ένα τέτοιο μέτρο απόστασης μπορούμε να ορίσουμε τη σύγκλιση μιας ακολουθίας ή μιας σειράς μιγαδικών αριθμών σε ένα όριο, ακριβώς όπως στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών. Ειδικότερα, για καθεμία από τις δυναμοσειρές που σχετίζονται με τις e^x, $\sin x$ και $\cos x$ μπορούμε να δείξουμε ότι συγκλίνουν για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς. Οι αποδείξεις είναι ουσιαστικά ίδιες με εκείνες που δίνονται στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών. Στο πεδίο των μιγαδικών μεταβλητών χρησιμοποιείται συνήθως το γράμμα z αντί του x για να συμβολίσει τη γενική μετα- βλητή.

Θεώρημα 4.13.1 Τύπος του Euler Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

*Λύση.*Το κλειδί στην απόδειξη βρίσκεται στο μοτίβο των δυνάμεων του i. Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$i^0 = 1, \qquad i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = i^2 i = (-1)i = -i.$$

Επιπλέον,

$$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1 \quad \text{και} \quad i^5 = i^4 i = (1)i = i,$$

οπότε ο κύκλος των τιμών $1, i, -1, -i$ επαναλαμβάνεται. Επομένως, αρχίζοντας με $n = 0$, οι τιμές του i^n σχηματίζουν έναν επαναλαμβανόμενο κύκλο $1, i, -1, -i$.
Χρησιμοποιούμε τώρα την ανάπτυξη της εκθετικής συνάρτησης σε δυναμοσειρά:

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \cdots.$$

Υπολογίζοντας τις δυνάμεις του i παίρνουμε

$$= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} + \cdots.$$

Ομαδοποιώντας τους πραγματικούς και φανταστικούς όρους,

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right).$$

Αναγνωρίζουμε τις αναπτύξεις Taylor των συναρτήσεων $\cos z$ και $\sin z$ και επομένως

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Ο τύπος του Euler είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στην ηλεκτρολογική μηχανική. Περιοδικά σήματα συχνά εκφράζονται συναρτήσει του ημιτόνου και του συνημιτόνου. Οι πράξεις και οι υπολογισμοί που περιλαμβάνουν συνδυασμούς τέτοιων σημάτων εκτελούνται συχνά πιο απλά όταν τα σήματα εκφράζονται μέσω μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, όπως $f(z) = e^{iz}$.
Αν θέσουμε $z = \pi$ στον τύπο του Euler, προκύπτει

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i(0) = -1.$$

Με αναδιάταξη η σχέση γράφεται

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως *ταυτότητα Euler* και θεωρείται ιδιαίτερα εντυπωσιακή, διότι συνδέει πέντε από τους σημαντικότερους αριθμούς των μαθηματικών:

$$0, \ 1, \ e, \ \pi, \ i.$$

Σχόλιο 4.13.2 Αν γράψουμε τον μιγαδικό αριθμό σε εκθετική μορφή

$$z = re^{i\theta} \quad \text{(τύπος Euler)},$$

τότε η n-οστή ρίζα υπολογίζεται εύκολα, διότι η δύναμη ενεργεί χωριστά στο μέτρο και στο όρισμα:

$$(re^{i\theta})^{1/n} = r^{1/n} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Η προσθήκη $2k\pi$ στο επιχείρημα εκφράζει το ότι το όρισμα ενός μιγαδικού ορίζεται κατά 2π, γι' αυτό και προκύπτουν ακριβώς n διαφορετικές ρίζες.

Παράδειγμα 4.13.3 Να υπολογιστεί η παράσταση

$$\frac{(1+2i)^2}{1-i}.$$

Λύση. Υπολογίζουμε πρώτα το τετράγωνο:

$$(1+2i)^2 = 1+4i+4i^2.$$

Επειδή $i^2 = -1$, έχουμε

$$1+4i+4(-1) = -3+4i.$$

Άρα

$$\frac{(1+2i)^2}{1-i} = \frac{-3+4i}{1-i}.$$

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με το συζυγές $1+i$:

$$\frac{(-3+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}.$$

Ο παρονομαστής γίνεται

$$(1-i)(1+i) = 1-i^2 = 2.$$

Ο αριθμητής:

$$(-3+4i)(1+i) = -7+i.$$

Άρα

$$\frac{-7+i}{2} = -\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Παράδειγμα 4.13.4 Να υπολογιστεί η παράσταση

$$\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-2i}.$$

Λύση. Πολλαπλασιάζουμε με τα συζυγή:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2}.$$

$$\frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1+2i}{5}.$$

Άρα

$$\frac{1-i}{2}+\frac{1+2i}{5}=\frac{7}{10}-\frac{1}{10}i.$$

Παράδειγμα 4.13.5 Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7.$$

Λύση. Πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο με λόγο i:

$$S=\frac{1-i^8}{1-i}.$$

Επειδή $i^4=1$, έχουμε

$$i^8=(i^4)^2=1.$$

Άρα

$$S=\frac{1-1}{1-i}=0.$$

Λυμένες ασκήσεις 4.13.6 1. Αν $z_1z_2\neq 0$, να αποδειχθεί ότι

$$\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2)=|z_1||z_2| \quad\Longleftrightarrow\quad \arg z_1-\arg z_2=2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$$

2. Να βρεθούν όλες οι τιμές του

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3/4}$$

και να δειχθεί ότι το γινόμενο των τιμών αυτών είναι ίσο με 1.

Λύση.

1. Από την υπόθεση $z_1z_2\neq 0$ προκύπτει ότι $z_1\neq 0$ και $z_2\neq 0$, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πολική μορφή των μιγαδικών αριθμών.
Έστω

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\qquad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2).$$

Τότε

$$\overline{z_1}=r_1(\cos\theta_1-i\sin\theta_1)$$

και συνεπώς

$$\overline{z_1}z_2=r_1r_2\big[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\big].$$

Άρα

$$\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2)=r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2).$$

Επομένως

$$\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2) = |z_1||z_2| \iff r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = r_1 r_2.$$

Επειδή $r_1 r_2 \neq 0$, διαιρούμε και παίρνουμε

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1.$$

Αυτό ισοδυναμεί με

$$\theta_1 - \theta_2 = 2n\pi \iff \arg z_1 - \arg z_2 = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2. Συμπεραίνουμε ότι οι δύο μιγαδικοί αριθμοί βρίσκονται πάνω στην ίδια ημιευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων στο μιγαδικό επίπεδο.
Έχουμε

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Υπολογίζουμε το μέτρο:

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

και τη γωνία:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Άρα

$$z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{3}.$$

Τότε

$$z^3 = \left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}\right)^3 = \operatorname{cis}\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\pi = e^{i\pi}.$$

Πρέπει λοιπόν να βρούμε τις τέταρτες ρίζες του $e^{i\pi}$. Οι n-οστές ρίζες του $re^{i\theta}$ δίνονται από

$$z_k = r^{1/n}\exp\left(i\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Εδώ $r = 1$, $\theta = \pi$ και $n = 4$, άρα

$$z_k = \exp\left(i\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) = \exp\left(i\frac{(1+2k)\pi}{4}\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Επομένως οι ζητούμενες τιμές είναι

$$\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}, \quad \operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}, \quad \operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}.$$

Το γινόμενο τους είναι

$$\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}\right)=\operatorname{cis}4\pi=1.$$

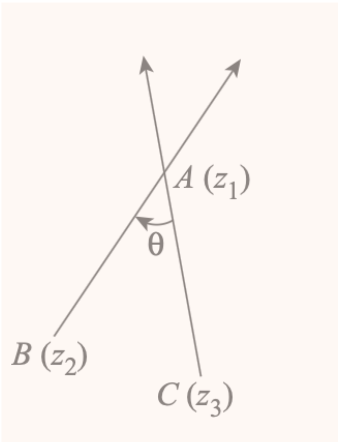
Ερμηνεία του $\arg\left(\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\right)$

Έστω ότι τα σημεία A,B και C παριστάνουν τους μιγαδικούς αριθμούς z_1,z_2 και z_3 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο.

Τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{CA}$ παριστάνουν αντίστοιχα τους μιγαδικούς αριθμούς z_1-z_2 και z_1-z_3. Η κύρια τιμή του

$$\arg\left(\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\right)$$

είναι η γωνία θ, με $-\pi<\theta\leq\pi$, κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί το διάνυσμα $\overrightarrow{CA}$ (δηλαδή ο αριθμός z_1-z_3) ώστε να συμπέσει με τη διεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{BA}$ (δηλαδή του z_1-z_2).



Σχήμα 4.15

Επομένως,

$$\arg\left(\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\right)$$

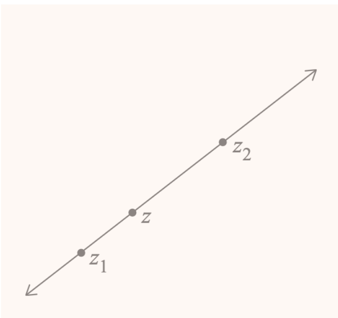
παριστά τη γωνία με κορυφή το σημείο z_1, η οποία σχηματίζεται από τις ευθείες που ενώνουν το z_2 με το z_1 και το z_3 με το z_1.

Εξίσωση ευθείας στο μιγαδικό επίπεδο

Έστω z ένα οποιοδήποτε σημείο της ευθείας που ενώνει τα σημεία z_1 και z_2. Τότε ισχύει

$$\arg\left(\frac{z-z_1}{z_1-z_2}\right)=0 \quad \text{ή} \quad \pi.$$

Άρα ο αριθμός $\frac{z-z_1}{z_1-z_2}$ είναι πραγματικός. Επομένως $\frac{z-z_1}{z_1-z_2}=\overline{\left(\frac{z-z_1}{z_1-z_2}\right)}$ και συνεπώς $\frac{z-z_1}{z_1-z_2}-\frac{\bar{z}-\overline{z_1}}{\overline{z_1}-\overline{z_2}}=0.$



Σχήμα 4.16

Πολλαπλασιάζοντας κατάλληλα, προκύπτει $z(\overline{z_1}-\overline{z_2})-\bar{z}(z_1-z_2)+(z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2)=0$. Πολλαπλασιάζοντας με i, λαμβάνουμε $zi(\overline{z_1}-\overline{z_2})-\bar{z}i(z_1-z_2)+i(z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2)=0$. Επειδή οι αριθμοί $z_1\overline{z_2}$ και $\overline{z_1}z_2$ είναι συζυγείς, η διαφορά $z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2$ είναι καθαρά φανταστική. Άρα ο αριθμός $i(z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2)$ είναι πραγματικός. Θέτοντας $b=i(z_2-z_1), \qquad c=i(z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2)$, όπου $b\neq 0$ και $c\in\mathbb{R}$, η παραπάνω σχέση γράφεται $\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$. Η εξίσωση $\overline{b}z+b\overline{z}+c=0, \quad b\neq 0,\ c\in\mathbb{R}$, είναι η γενική μορφή της εξίσωσης ευθείας στο μιγαδικό επίπεδο.

Παράδειγμα 4.13.7 Να εξετάσετε αν ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|<1 \quad\Longrightarrow\quad |a|<1 \text{ και } |b|<1.$$

Λύση. Έστω $a,b\in\mathbb{C}$ και γράφουμε $a=r_1e^{i\theta_1}, \qquad b=r_2e^{i\theta_2}$, όπου $r_1=|a|$ και $r_2=|b|$. Υποθέτουμε ότι

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|<1.$$

Τότε ισοδύναμα

$$|a-b|<|1-\overline{a}b| \quad\Longleftrightarrow\quad |a-b|^2<|1-\overline{a}b|^2.$$

Υπολογίζουμε: $a-b=r_1e^{i\theta_1}-r_2e^{i\theta_2}$, οπότε

$$|a-b|^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2).$$

Η ανισότητα δίνει

$$r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)<1+r_1^2r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2).$$

Πράγματι,

$$|a-b|^2=(a-b)\overline{(a-b)}.$$

Έχουμε

$$\overline{a}=r_1e^{-i\theta_1}, \qquad \overline{b}=r_2e^{-i\theta_2}.$$

Άρα

$$|a-b|^2=(r_1e^{i\theta_1}-r_2e^{i\theta_2})(r_1e^{-i\theta_1}-r_2e^{-i\theta_2}).$$

Αναπτύσσοντας:

$$=r_1^2+r_2^2-r_1r_2\left(e^{i(\theta_1-\theta_2)}+e^{-i(\theta_1-\theta_2)}\right).$$

Με τον τύπο του Euler

$$e^{i\phi}+e^{-i\phi}=2\cos\phi,$$

παίρνουμε

$$|a-b|^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2).$$

Επίσης,

$$1-\overline{a}b=1-r_1r_2e^{-i(\theta_1-\theta_2)}.$$

Πράγματι, έστω

$$a = r_1 e^{i\theta_1}, \qquad b = r_2 e^{i\theta_2}.$$

Τότε

$$\overline{a} = r_1 e^{-i\theta_1}, \qquad \overline{a}b = r_1 r_2 e^{i(\theta_2 - \theta_1)}.$$

Υπολογίζουμε

$$|1 - \overline{a}b|^2 = (1 - \overline{a}b)(1 - a\overline{b}).$$

Επειδή

$$a\overline{b} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 - \theta_2)},$$

έχουμε

$$|1 - \overline{a}b|^2 = 1 + r_1^2 r_2^2 - r_1 r_2 \left(e^{i(\theta_1 - \theta_2)} + e^{-i(\theta_1 - \theta_2)} \right).$$

Με τον τύπο του Euler

$$e^{i\phi} + e^{-i\phi} = 2\cos\phi,$$

καταλήγουμε

$$|1 - \overline{a}b|^2 = 1 + r_1^2 r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Επομένως, απο την σχέση

$$|a - b|^2 < |1 - \overline{a}b|^2.$$

καταλήγουμε ότι πρέπει να ισχύει

$$r_1^2 + r_2^2 < 1 + r_1^2 r_2^2.$$

Μεταφέρουμε μέλη και έχουμε:

$$r_1^2 + r_2^2 - 1 - r_1^2 r_2^2 < 0.$$

Παραγοντοποιώντας έχουμε:

$$(r_1^2 - 1)(1 - r_2^2) < 0.$$

Το γινόμενο είναι αρνητικό όταν οι δύο παράγοντες έχουν αντίθετο πρόσημο. Επομένως:

$$\text{είτε } r_1 < 1 \text{ και } r_2 > 1, \quad \text{είτε } r_1 > 1 \text{ και } r_2 < 1.$$

Συνεπώς, από την υπόθεση $\left| \dfrac{a - b}{1 - \overline{a}b} \right| < 1$ δεν προκύπτει κατ' ανάγκη ότι $|a| < 1$ και $|b| > 1$.

Για παράδειγμα, αν $a = b = 2$, τότε

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 0 < 1,$$

ενώ $|a| = |b| = 2 > 1$. Άρα η συνεπαγωγή είναι ψευδής.

Παράδειγμα 4.13.8 Να βρεθεί το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους

$$\frac{z-1}{z-2i}$$

είναι:

(a) φανταστικός (b) πραγματικός

Λύση. Θέτουμε $z = x+iy, \qquad x,y \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\frac{z-1}{z-2i} = \frac{(x-1)+iy}{x+i(y-2)}.$$

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με το συζυγές του παρονομαστή:

$$\frac{(x-1)+iy}{x+i(y-2)} \cdot \frac{x-i(y-2)}{x-i(y-2)}.$$

Ο παρονομαστής γίνεται $x^2+(y-2)^2$. και ο αριθμητής $\big((x-1)+iy\big)\big(x-i(y-2)\big)$. Αναπτύσσοντας:

$$= (x-1)x + y(y-2) + i\big(2x+y-2\big).$$

Άρα

$$\frac{z-1}{z-2i} = \frac{x^2-x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2} + i\,\frac{2x+y-2}{x^2+(y-2)^2}.$$

(a) Για να είναι φανταστικός πρέπει το πραγματικό μέρος να είναι μηδέν:

$$x^2-x+y^2-2y = 0.$$

Ολοκληρώνουμε τετράγωνα:

$$(x-\tfrac{1}{2})^2+(y-1)^2 = \frac{5}{4}.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο

$$\left(\frac{1}{2},1\right)$$

και ακτίνα

$$\sqrt{\frac{5}{4}}.$$

(b) Για να είναι πραγματικός πρέπει το φανταστικό μέρος να είναι μηδέν:

$$2x + y - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 2 - 2x.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι ευθεία. Σε κάθε περίπτωση πρέπει $z \neq 2i$, διότι ο παρονομαστής μηδενίζεται εκεί.