

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ – ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΑΑΕΣ

23 Ιουνίου 2025

Στοιχεία Εξεταζόμενου/ης	
ΕΠΩΝΥΜΟ :	ΟΝΟΜΑ :
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ :	ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ :
ΑΙΘΟΥΣΑ : ΑΦΕ	ΣΤΗΛΗ : ΜΟΝΑΔΕΣ :

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

Στο διαγώνισμα υπάρχουν τριών ειδών ερωτήσεις.

- Ερωτήσεις με την ένδειξη ■. Σε αυτά πρέπει να δώσετε τη λύση με ένα σύντομο υπολογισμό, ή δίχως αιτιολόγηση αν κρίνετε ότι δεν χρειάζεται.
- Ερωτήσεις του τύπου “Σωστό/Λάθος” ή πολλαπλής επιλογής και καλείσθε, μετά από ένα σύντομο έλεγχο να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
- Ερωτήσεις στις οποίες καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά “οικονομική απόδειξη-λύση” για το ζητούμενο στο χώρο που παρέχεται.

Σε όλες τις περιπτώσεις συστήνεται και σε κάποιες επιβάλλεται να “δουλέψετε” κάθε ερώτηση ή υποερώτηση στο πρόχειρο ώστε η απάντησή σας να μην είναι τυχαία.

Ερωτήσεις του τύπου 1 και 2 είναι ισοδύναμες.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 15 λεπτά. Η παράδοση των γραπτών αρχίζει 1 ώρα μετά από την έναρξη της εξέτασης.

Καλή Επιτυχία!

Σε οποιοδήποτε πρόβλημα με τριγωνομετρικές συναρτήσεις ο τριγωνομετρικός κύκλος δίνει πολλές πληροφορίες και αναμφισβήτητα βοηθάει.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί κάποιων γωνιών					
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Λύσεις και Σχόλια

Θ1. Δίνεται η εξίσωση $y' = \alpha x(\beta - y)$, όπου α, β είναι θετικοί αριθμοί.

(α) Να βρεθούν όλες οι λύσεις της εξίσωσης.

Η εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών αλλά και γραμμική αφού

$$y' = \alpha\beta x - \alpha xy \Rightarrow y' + \alpha xy = \alpha\beta x. \quad (1)$$

i. Ως χωριζομένων μεταβλητών: Η $y = \beta$ είναι μία λύση της εξίσωσης και για $y \neq \beta$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{y'}{\beta - y} = \alpha x &\Rightarrow \int \frac{y'}{\beta - y} dx = \int \alpha x dx \\ &\Rightarrow \int \frac{y'}{y - \beta} dx = - \int \alpha x dx \\ &\Rightarrow \ln |y - \beta| = -\frac{\alpha}{2} x^2 + c \\ &\Rightarrow y - \beta = \pm e^{-\frac{\alpha}{2} x^2} e^c \\ &\Rightarrow y = \beta + C e^{-\frac{\alpha}{2} x^2}, \quad \text{όπου } C = \pm e^c. \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι η λύση $y = \beta$ προκύπτει για $C = 0$.

ii. Ως γραμμική: Ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για την (1) είναι η $\mu(x) = e^{\frac{\alpha}{2} x^2}$, οπότε παλλαπλασιάζοντας την εξίσωση με $\mu(x)$ έχουμε

$$\begin{aligned} y' e^{\frac{\alpha}{2} x^2} + y \alpha x e^{\frac{\alpha}{2} x^2} &= \alpha \beta x e^{\frac{\alpha}{2} x^2} \Rightarrow (y e^{\frac{\alpha}{2} x^2})' = \alpha \beta x e^{\frac{\alpha}{2} x^2} = \beta (e^{\frac{\alpha}{2} x^2})' \\ &\Rightarrow y e^{\frac{\alpha}{2} x^2} = \beta e^{\frac{\alpha}{2} x^2} + c \\ &\Rightarrow y = \beta + c e^{-\frac{\alpha}{2} x^2} \end{aligned}$$

Επειδή η εξίσωση είναι γραμμική, είτε το δούμε είτε όχι, οποιαδήποτε λύση προκύπτει από ένα γενικό τύπο λύσης, τη γενική λύση. Το c στη γραμμική δεν έχει κανένα περιορισμό, είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης, και για $c = 0$ προκύπτει και η λύση $y = \beta$. Το C , στην προσέγγιση των χωριζομένων μεταβλητών που είναι το $\pm e^c$ μπορεί να γίνει μηδέν ώστε να πάρουμε τη λύση $y = \beta$; Παρατηρούμε ότι καθώς $c \rightarrow -\infty$, το $|C|$ γίνεται αυθαίρετα μικρό, οσοδήποτε κοντά στο 0.

(β) Αν η y είναι μια λύση να βρεθεί το όριο της y , καθώς $x \rightarrow \infty$.

Επειδή $\alpha > 0$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} (\beta + c e^{-\frac{\alpha}{2} x^2}) = \beta + 0 = \beta.$$

(γ) Να βρεθεί η λύση με $y(0) = y_0$.

Επειδή

$$y(0) = \beta + c = y_0 \Rightarrow c = y_0 - \beta$$

η λύση είναι η

$$y = \beta + (y_0 - \beta) e^{-\frac{\alpha}{2} x^2}.$$

Θ2. Υπολογίστε, ή δώστε την απάντηση

$$(α) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{9n}\right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1/3}{3n}\right)^{3n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1/3}{k}\right)^k = e^{1/3}.$$

Γενικά

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{an}\right)^{bn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b/a}{bn}\right)^{bn} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b/a}{k}\right)^k = e^{b/a}.$$

$$(β) \blacksquare \text{ Αν } n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^n}{e^x + x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{x^n}{e^x}}{1 + \frac{x^n}{e^x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1,$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

$$(γ) \text{ Αν } p > 0, \lim_{x \rightarrow 0+} x^p \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x}{-p/x^{p+1}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^p}{-p} = 0.$$

Θ3. Αν $a > 0$ και $p > 1$ είναι πραγματικοί αριθμοί, να βρεθεί το μέγιστο διάστημα I_a ώστε

$$|(x+a)^p - (x-a)^p| > a$$

για όλα τα σημεία x του διαστήματος.

Επειδή $a > 0$ έχουμε ότι $x+a > x-a$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η έκφραση $(x-a)^p$ ορίζεται, για πραγματικό $p > 1$, για $x \geq a$. Έτσι η ποσότητα $(x+a)^p - (x-a)^p$ είναι θετική. Επιπλέον η συνάρτηση $f(x) = x^p$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ επομένως από το ΘΜΤ έχουμε ότι για κάθε $x > a$

$$|(x+a)^p - (x-a)^p| = (x+a)^p - (x-a)^p = p\xi^{p-1}[(x+a) - (x-a)],$$

για κάποιο ξ ώστε $x-a < \xi < x+a$, επομένως θέλουμε

$$p\xi^{p-1}2a > a \Leftrightarrow \xi^{p-1} > \frac{1}{2p} \Leftrightarrow \xi > \left(\frac{1}{2p}\right)^{1/(p-1)}.$$

Η τελευταία ανισότητα εξασφαλίζεται αν η μικρότερη δυνατή τιμή του ξ την ικανοποιεί, έτσι θέλουμε

$$x-a > \left(\frac{1}{2p}\right)^{1/(p-1)} \Rightarrow x > a + \left(\frac{1}{2p}\right)^{1/(p-1)}$$

κατά συνέπεια το ζητούμενο διάστημα είναι το

$$\left(a + \left(\frac{1}{2p}\right)^{1/(p-1)}, +\infty\right).$$

Θ4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - \ln x - 1, \quad x > 0.$$

- (α) Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού $P_2(x)$ που προσεγγίζει την $f(x)$ σε διάστημα γύρω από το $x_0 = 1$.

Η συνάρτηση είναι **super duper** καλή στο $(0, +\infty)$, και το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού που προσεγγίζει την συνάρτηση σε ένα διάστημα γύρω από το $x = 1$, έστω $(1 - \delta, 1 + \delta)$ με $\delta > 0$, δίνεται από τη σχέση

$$P_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2.$$

Έτσι υπολογίζουμε

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x}, \quad f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$$

επομένως

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = 3,$$

επομένως το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το

$$P_2(x) = (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2.$$

Κάτι ακόμα ηρωικοί απόγονοι ηρωικών προγόνων, το παραπάνω $P_2(x)$ είναι μια χαρά πολυώνυμο, που δείχνει ότι είναι ένα ανάπτυγμα γύρω από το $x = 1$. Δεν χρειάζεται ντε και καλά να το γράψουμε στη μορφή

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c.$$

- (β) Να εκτιμηθεί το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης της $f(x)$ από το $P_2(x)$ στο διάστημα $(1 - 1/2, 1 + 1/2)$.

Επειδή

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x), \quad \text{όπου} \quad R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-1)^3,$$

με ξ μεταξύ 1 και x , είναι το υπόλοιπο, η ακρίβεια της προσέγγισης καθορίζεται από το υπόλοιπο, μέσω της

$$|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| \leq \max_{1/2 < x < 3/2} |R_2(x)|.$$

Επειδή

$$f^{(3)}(x) = -\frac{2}{x^3},$$

έπεται ότι

$$R_2(x) = -\frac{2}{3!\xi^3}(x-1)^3$$

και το μέγιστο δυνατό της $|R_2(x)|$ στο διάστημα συμβαίνει εκεί όπου ο αριθμητής είναι ο μέγιστος δυνατός, για $x = 3/2$ και ο παρονομαστής ο ελάχιστος δυνατός, για $\xi = 1/2$, έτσι

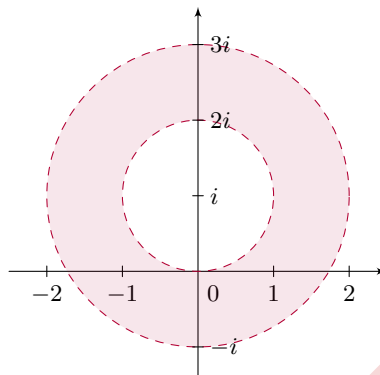
$$\max_{1/2 < x < 3/2} |R_2(x)| \leq \frac{(3/2 - 1)^3}{3(1/2)^3} = \frac{1}{3}.$$

Κάτι ακόμα, η τρίτη παράγωγος της f είναι η $f^{(3)}$ και όχι η f^3 , ξηγημένα πράγματα, η τελευταία είναι δύναμη!

Θ5. Υπολογίστε, ή δώστε την απάντηση.

(α) **Ένα σχήμα είναι χρήσιμο.** Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + iy$ για τους οποίους ισχύει $1 < |z - i| < 2$, και να περιγραφούν γεωμετρικά.

Η σχέση $|z - i| = \rho$ εκφράζει τον κύκλο κέντρου i και ακτίνας ρ , έτσι η δοσμένη σχέση εκφράζει όλους τους κύκλους κέντρου i και ακτίνες μεταξύ 1 και 2, ισοδύναμα τον δακτύλιο με κέντρο το i , εσωτερική ακτίνα $r = 1$ και εξωτερική ακτίνα $R = 2$.



Σχήμα 1: Ο δακτύλιος $1 < |z - i| < 2$.

Βλέπε Άσκηση 16 β' από τις Ασκήσεις 2 στους μιγαδικούς.

(β) Αν $z = 1 + \sqrt{3}i$, τότε

i. Η τριγωνομετρική μορφή του z είναι η

$$\text{Έχουμε } |z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2, \text{ έτσι}$$

$$z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

από τον πίνακα στην πρώτη σελίδα.

ii. Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί n ώστε $z^n \in \mathbb{R}$.

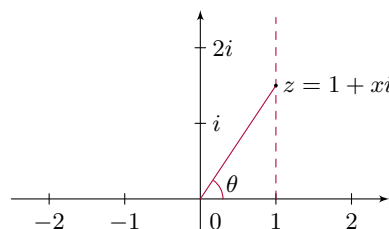
Από τον τύπο του de Moivre βρίσκουμε

$$z^n = 2^n \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}\right),$$

επομένως $z^n \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\text{Im } z = 0$, ισοδύναμα

$$\sin \frac{n\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow n = 3k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(γ) **Ένα τρίγωνο είναι χρήσιμο.** Αν $x > 0$ και $z = 1 + xi$ εκφράστε ένα όρισμα θ του z μέσω της $\arctan$ ως συνάρτηση του x .



$$\tan \theta = \frac{x}{1} \Leftrightarrow \theta = \arctan x = \text{Arg } z$$

Σχήμα 2: $\theta = \text{Arg } z$.

(δ) Βρείτε ένα μέγιστο διάστημα στο οποίο η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (\cos x)^n$ συγκλίνει.

Η σειρά είναι γεωμετρική, κατά συνέπεια συγκλίνει αν $|\cos x| < 1$, και $|\cos x| = 1$ αν και μόνο αν $x = k\pi$, όπου το k είναι ακέραιος, $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Έτσι ένα μεγιστικό διάστημα σύγκλισης είναι το $(0, \pi)$, ή $(\pi, 2\pi)$, ή $(-\pi, 0)$, γενικά $(k\pi, (k+1)\pi)$ με k ακέραιο.

Αγαπητοί και αγαπητές, το $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, δεν είναι διάστημα, είναι η ένωση όλων των ανοικτών διαστημάτων $(k\pi, (k+1)\pi)$ με k ακέραιο. Ξηγηθήκαμε;

(ε) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ συγκλίνει. (Σ) Λ

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει έπεται ότι $|a_n| \rightarrow 0$, άρα υπάρχει N ώστε

$$|a_n| < 1, \quad n \geq N \Rightarrow 0 \leq |a_n|^n \leq |a_n|, \quad n \geq N$$

επομένως

$$0 \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^n \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$$

κατά συνέπεια η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ συγκλίνει απολύτως, άρα συγκλίνει. Βλέπε Άσκηση 3 από τις Ασκήσεις 5 στις σειρές.

Θ6. Εξετάστε για ποιες τιμές της παραμέτρου p το παρακάτω ολοκλήρωμα συγκλίνει

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2p}}{x^{5p} + 1} dx.$$

Δεν αναφέρεται αλλά μας ενδιαφέρει η περίπτωση όπου $p > 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2p}}{x^{5p} + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2p}}{x^{5p} + 1} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^{2p}}{x^{5p} + 1} dx$$

και αν $0 \leq x \leq 1$, τότε $x^{2p} \leq 1 \leq 1 + x^{5p}$, έτσι

$$\int_0^1 \frac{x^{2p}}{x^{5p} + 1} dx \leq \int_0^1 dx = 1$$

επομένως

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2p}}{x^{5p} + 1} dx \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{x^{2p}}{x^{5p} + 1} dx.$$

Τώρα για $x \geq 1$ έχουμε $x^{5p} < 1 + x^{5p} < x^{5p} + x^{5p}$, επομένως

$$\frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{x^{2p}}{x^{5p}} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{x^{2p}}{x^{5p} + 1} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{x^{2p}}{x^{5p}} dx.$$

Το ολοκλήρωμα στα άκρα της ανισότητας είναι το

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{2p}}{x^{5p}} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3p}} dx$$

το οποίο συγκλίνει αν και μόνο αν $3p > 1 \Rightarrow p > 1/3$. Έπεται λοιπόν ότι το δοσμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1/3$. Βλέπε Άσκηση 19 από τις Ασκήσεις 10 & 11 στα ολοκληρώματα.

Θ7. Για $t > 0$ θέτουμε

$$A(t) = \int_0^t x e^{-x^2} dx.$$

(α) Υπολογίστε το

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(1+h) - A(1)}{h}.$$

Έχουμε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(1+h) - A(1)}{h} = A'(1)$$

και από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού έχουμε $A'(t) = t e^{-t^2}$, επομένως

$$A'(1) = 1 e^{-1^2} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

(β) Υπολογίστε το $A(t)$.

Επειδή $(e^{-x^2})' = -2x e^{-x^2}$ έχουμε

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^t x e^{-x^2} dx = \int_0^t -\frac{1}{2} (-2x e^{-x^2}) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^t (e^{-x^2})' dx \\ &= -\frac{1}{2} (e^{-t^2} - 1) \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{t^2}}. \end{aligned}$$

(γ) ■ $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$, αφού

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x e^{-x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x e^{-x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{t^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Στον υπολογισμό του $A(t)$ παρατηρήθηκαν σημεία και τέρατα. Πολλά λάθη που είχαν να κάνουν με αλλαγή μεταβλητής, ή με παραγοντική ολοκλήρωση. Σκέτη διαστροφή. Όταν κάνουμε αλλαγή μεταβλητής αλλάζουν και τα άκρα ολοκλήρωσης, αλλού μεταβάλεται η αρχική μεταβλητή και αλλού η νέα. Για παράδειγμα αν θέσουμε $u = x^2$, τότε $du = 2x dx$, και $0 \leq x \leq t$, ενώ $0 \leq u \leq t^2$, οπότε

$$\begin{aligned} \int_0^t x e^{-x^2} dx &= \int_0^{t^2} \frac{1}{2} e^{-u} du = -\frac{1}{2} e^{-u} \Big|_0^{t^2} = -\frac{1}{2} (e^{-t^2} - 1) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^{t^2}} \right). \end{aligned}$$

Πάντως το ολοκλήρωμα επιλέχθηκε ώστε να υπολογισθεί εύκολα χωρίς ειδικά “εργαλεία”. Αγαπητοί, αγαπητές φροντίστε να καταλάβατε όλα αυτά τα στοιχεία που θα σας χρειασθούν και στη συνέχεια. Τώρα είναι η ώρα. Αν δεν ... ΔΕΝ.

Καλό καλοκαίρι.