

Μαθηματικά Ι - Εξέταση Σεπτέμβριος 2021 (CEID101)

Ασκήσεις



Προεπισκόπηση



Διαγώνισμα Μαθηματικά Ι - 16/IX/2021 (Αρχικό)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ερώτηση: 1 Εάν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο, τότε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 f'(cx) dx,$$

όπου c είναι μια πραγματική σταθερά,**Απάντηση****Σχόλιο**Υπάρχει για όλα τα c .

(Βαθμολογία: 2)



Ισούται με

$$f(c) - f(-c).$$

(Βαθμολογία: -1)



Ισούται με

$$\frac{1}{c}f(c) - \frac{1}{c}f(-c),$$

αν $c \neq 0$.

(Βαθμολογία: 2)

Αν $c = 0$ το ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

(Βαθμολογία: -1)

Για κάθε πραγματικό αριθμό c υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε

$$I = 2f'(\xi).$$

(Βαθμολογία: 2)

Βαθμολογία ερώτησης: 6**Ερώτηση: 2**

Av

$$I = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx,$$

Απάντηση**Σχόλιο**Το ολοκλήρωμα δεν ορίζεται γιατί στο $x = 1$ η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση δεν ορίζεται.

(Βαθμολογία: -1)



$$I = \sqrt{3}.$$

(Βαθμολογία: 2)

<input type="checkbox"/>	$I = \frac{1}{\sqrt{3}}$	
	(Βαθμολογία: -1)	
		Βαθμολογία ερώτησης: 2

Ερώτηση: 3

Για κάθε φυσικό αριθμό k υπάρχει r_k στο διάστημα $(0, 1)$ ώστε

$$\ln(k+1) = \ln k + \frac{1}{k+r_k}.$$

Απάντηση		Σχόλιο
<input checked="" type="checkbox"/>	Σωστό (Βαθμολογία: 2)	
<input type="checkbox"/>	Λάθος (Βαθμολογία: -1)	
		Βαθμολογία ερώτησης: 2

Ερώτηση: 4

Αν $k > 0$, τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-kn} =$$

Απάντηση		Σχόλιο
<input type="checkbox"/>	e^k (Βαθμολογία: -0.5)	
<input type="checkbox"/>	$e^{1/k}$ (Βαθμολογία: -0.5)	
<input checked="" type="checkbox"/>	e^{-k} (Βαθμολογία: 3)	
<input type="checkbox"/>	$e^{-1/k}$ (Βαθμολογία: -0.5)	
		Βαθμολογία ερώτησης: 3

Ερώτηση: 5

Το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)^2}$$

Απάντηση		Σχόλιο
<input type="checkbox"/>	είναι ίσο με 0. (Βαθμολογία: -0.5)	
<input type="checkbox"/>	είναι ίσο με 1. (Βαθμολογία: -0.5)	
<input checked="" type="checkbox"/>	είναι ίσο με 1/2. (Βαθμολογία: 3)	

<input type="checkbox"/>	δεν υπάρχει. (Βαθμολογία: -0.5)	
		Βαθμολογία ερώτησης: 3

Ερώτηση: 6

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$. Αν $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, τότε

Απάντηση	Σχόλιο
<input checked="" type="checkbox"/> υπάρχει x^* στο $[a, b]$ ώστε $f(x^*) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$ (Βαθμολογία: 3)	
<input type="checkbox"/> υπάρχει x^* στο $[a, b]$ ώστε $f(x^*) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$ (Βαθμολογία: -1)	
<input checked="" type="checkbox"/> αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε υπάρχει x^* μεταξύ x_1 και x_2 ώστε $f(x^*) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$ (Βαθμολογία: 3)	
<input type="checkbox"/> υπάρχει x^* στο $[a, b]$ ώστε $f'(x^*) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$ (Βαθμολογία: -1)	
Βαθμολογία ερώτησης: 6	

Ερώτηση: 7

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = (1 + i)^m$, όπου m είναι φυσικός αριθμός.

Απάντηση	Σχόλιο
<input checked="" type="checkbox"/> Αν $m = 4k + 2$, για κάποιο φυσικό αριθμό k , τότε $\operatorname{Re} z = 0$. (Βαθμολογία: 2)	
<input type="checkbox"/> Ισχύει $\operatorname{Im} z \neq 0$ για κάθε φυσικό αριθμό m . (Βαθμολογία: -0.5)	
<input checked="" type="checkbox"/> Αν ο m είναι άρτιος, τότε το μέτρο $ z $ είναι φυσικός αριθμός. (Βαθμολογία: 2)	
<input type="checkbox"/> $\operatorname{Arg} z = \frac{m\pi}{4}$. (Βαθμολογία: -0.5)	
Βαθμολογία ερώτησης: 4	

Ερώτηση: 8

Για $r \geq 1$ και $s \geq 1$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x^r(1-x)^s, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Τότε

Απάντηση	Σχόλιο
----------	--------

<input checked="" type="checkbox"/>	<p>Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x = \frac{1}{2}$ αν και μόνο αν $r = s$.</p> <p>(Βαθμολογία: 2)</p>	
<input type="checkbox"/>	<p>$\min f(x) = 0$ και $\max f(x) = (r + s)^{r+s}$.</p> <p>(Βαθμολογία: -0.5)</p>	
<input checked="" type="checkbox"/>	<p>$\min f(x) = 0$ και $\max f(x) = \frac{r^r s^s}{(r + s)^{r+s}}$.</p> <p>(Βαθμολογία: 2)</p>	
<input type="checkbox"/>	<p>$\min f(x) = 0$ και $\max f(x) = \frac{r^r s^s}{r^r + s^s}$.</p> <p>(Βαθμολογία: -0.5)</p>	
Βαθμολογία ερώτησης: 4		

Ερώτηση: 9

Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων a και b ώστε η ευθεία $y = ax - 2$ είναι εφαπτομένη της $f(x) = bx^3 - 1$ στο $x = 1$.

Απάντηση**Σχόλιο**

<input type="checkbox"/>	<p>$a = 2$ και $b = 1$.</p> <p>(Βαθμολογία: -0.5)</p>	
<input type="checkbox"/>	<p>$a = 1/2$ και $b = 3/2$.</p> <p>(Βαθμολογία: -0.5)</p>	
<input checked="" type="checkbox"/>	<p>$a = 3/2$ και $b = 1/2$.</p> <p>(Βαθμολογία: 3)</p>	
<input type="checkbox"/>	<p>$a = 3$ και $b = 2/3$.</p> <p>(Βαθμολογία: -0.5)</p>	

Βαθμολογία ερώτησης: 3**Ερώτηση: 10**

Για ποιες τιμές των παραμέτρων a και b το πολυώνυμο $p(x) = 1 + a(x - 1) + b(x - 1)^2$ είναι πολυώνυμο Taylor για την

$$f(x) = \sqrt[5]{x}$$

γύρω από το $x = 1$;

Απάντηση**Σχόλιο**

<input type="checkbox"/>	<p>$a = 1/5$ και $b = -4/25$.</p> <p>(Βαθμολογία: -0.5)</p>	
<input type="checkbox"/>	<p>$a = -1/5$ και $b = 4/25$.</p> <p>(Βαθμολογία: -0.5)</p>	
<input type="checkbox"/>	<p>$a = -1/5$ και $b = 2/25$</p> <p>(Βαθμολογία: -0.5)</p>	
<input checked="" type="checkbox"/>	<p>$a = 1/5$ και $b = -2/25$</p> <p>(Βαθμολογία: 3)</p>	

Βαθμολογία ερώτησης: 3**Ερώτηση: 11**

Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$I = \int_a^b \tan x \, dx,$$

με $a < b$.

Απάντηση		Σχόλιο
<input type="checkbox"/>	Αν $a = -\pi/2$ και $b = \pi/2$, τότε $I = 0$ αφού η \tan είναι περιττή συνάρτηση σ' αυτό το διάστημα. (Βαθμολογία: -1)	
<input checked="" type="checkbox"/>	Αν το ολοκλήρωμα υπάρχει, τότε αναγκαστικά $b - a < \pi$. (Βαθμολογία: 2)	
<input type="checkbox"/>	Αν $a = \pi/2 - \pi/3$ και $b = \pi/2 + \pi/3$, τότε το ολοκλήρωμα υπάρχει. (Βαθμολογία: -1)	
<input checked="" type="checkbox"/>	Αν το ολοκλήρωμα υπάρχει, τότε $I = (b - a) \tan \xi$ για κάποιο $\xi \in (a, b)$. (Βαθμολογία: 2)	
		Βαθμολογία ερώτησης: 4

Συνολική βαθμολογία άσκησης: 40