Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Διδάσκοντες: Α. Ανδρικόπουλος, Ε. Στεφανόπουλος 29 Ιανουαριου 2019

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

Στο διαγώνισμα υπάρχουν κυρίως τριών ειδών ερωτήματα.

- Ερωτήματα με την ένδειξη □ είναι ερωτήματα του τύπου "σωστό/λάθος" και καλείσθε να γράψετε Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) στο τετράγωνο αν η έκφραση που ακολουθεί είναι, αντίστοιχα, αληθής ή ψευδής.
- Ερωτήματα με την ένδειξη ■ στα οποία πρέπει να δώσετε την απάντηση με μια σύντομη εξήγηση.
- Ερωτήματα στα οποία καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά "οικονομική απόδειξη-λύση" για το ζητούμενο.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Η παράδοση των γραπτών αρχίζει 1 ώρα και 15 λεπτά μετά από την έναρξη της εξέτασης.

Καλή Επιτυχία!

Στη συνέχεια παρατίθενται οι λύσεις σε μια σύνθεση από τις διαφορετικές εκδοχές του διαγωνίσματος. Τα προβλήματα των διαφορετικών εκδοχών είναι παρεμφερή.

Θ1. Υποθέστε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και ότι $a_n \geq 0$.

Σ (3 μον.) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ συγκλίνει.

$$0 \leq \frac{a_n}{n} \leq a_n \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$$

Σ (3 μον.) Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει απολύτως αν $x \in (-1,1)$.

Αν $x \in (-1,1)$, τότε $0 \leq |a_n x^n| \leq a_n \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$

Σ (3 μον.) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 0$.

Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, επομένως $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, οπότε $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 0$

Σ (3 μον.) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει.

Αφού $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, υπάρχει N ώστε $a_n < 1$, για $n \geq N$, έτσι $0 \leq a_n^2 \leq a_n$ για $n \geq N$, επομένως $0 \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n < +\infty$, άρα $0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty$

Θ2. $\boxed{\Sigma}$ (3 μον.) Η εξίσωση $x^3 = \tan x$ έχει άπειρες ρίζες στους πραγματικούς αριθμούς.
Σε κάθε διάστημα $[k\pi, k\pi+\pi/2)$ για $k = 0, 1, 2, \dots$ (το ανάλογο ισχύει και για $k < 0$) η γραφική παράσταση της $y = x^3$ είναι μια "αύξουσα καμπύλη γραμμή" από το σημείο $(k\pi, (k\pi)^3)$ στο $(k\pi+\pi/2, (k\pi+\pi/2)^3)$, ενώ η η γραφική παράσταση της $y = \tan x$ είναι επίσης μια "αύξουσα καμπύλη γραμμή" από το σημείο $(k\pi, 0)$ η οποία εκτείνεται ασυμπτωτικά στο $(k\pi+\pi/2, +\infty)$, κατά συνέπεια για κάποιο $\delta_k \in (0, \pi/2)$ είναι

$$\tan(k\pi + \delta_k) = (k\pi + \pi/2)^3 + 1.$$

Δηλαδή η καμπύλη $y = \tan x$ αρχίζει κάτω από το σημείο $(k\pi, (k\pi)^3)$ και περιέχει το σημείο $(k\pi + \delta_k, (k\pi + \pi/2)^3 + 1)$ πάνω από το πέρας της $y = x^3$, κατά συνέπεια οι δύο καμπύλες τέμνονται, ισοδύναμα υπάρχει $\xi_k \in (k\pi, k\pi+\pi/2)$ ώστε $\tan \xi_k = \xi_k^3$ για κάθε $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

■ (7 μον.) Για ποιά a είναι η συνάρτηση $f(x) = ax + \cos x$ αύξουσα, φθίνουσα, ή τίποτα από τα δύο;
$f'(x) = a - \sin x$ και $-1 \leq \sin x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, κατά συνέπεια

i. Αύξουσα $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $a \geq \sin x$ $\Leftrightarrow$ $a \geq 1$
ii. Φθίνουσα $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ $\Leftrightarrow$ $a \leq \sin x$ $\Leftrightarrow$ $a \leq -1$
iii. Μη μονότονη $\Leftrightarrow$ η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο $\Leftrightarrow$ $-1 < a < 1$

Θ3. (α΄) (9 μον.) Δείξτε ότι αν $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq 2$, τότε υπάρχει $\delta_n \in (0, 1)$ ώστε

$$\sqrt[n-1]{e} - \sqrt[n+1]{e} = \frac{2e^{\delta_n}}{n^2 - 1}.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = e^x$.
ΘΜΤ: $e^a - e^b = (a - b)e^\delta$, όπου το δ είναι μεταξύ a και b. Έτσι για $a = 1/(n-1)$ και $b = 1/(n+1)$ είναι $b < a$ και

$$e^{1/(n-1)} - e^{1/(n+1)} = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)e^{\delta_n}, \qquad \frac{1}{n+1} < \delta_n < \frac{1}{n-1}$$

επομένως

$$\sqrt[n-1]{e} - \sqrt[n+1]{e} = \frac{2}{(n-1)(n+1)}e^{\delta_n} = \frac{2e^{\delta_n}}{n^2 - 1}, \qquad 0 < \delta_n < 1.$$

(β΄) (9 μον.) Να βρεθεί το ανάπτυγμα Maclaurin της $f(x) = e^{-x^2}$, καθώς και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.
Γνωρίζουμε ότι

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x, το διάστημα σύγκλισης, δηλαδή, είναι το $(-\infty, +\infty)$. Επειδή για κάθε πραγματικό αριθμό x ο $-x^2$ περιέχεται στο διάστημα σύγκλισης της εκθετικής σειράς έπεται ότι

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως το διάστημα σύγκλισης είναι επίσης ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

(γ΄) (9 μον.) Προσεγγίστε την $f(x) = e^{-x^2}$ με το σχετικό πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού και εκτιμήστε την ακρίβεια της προσέγγισης όταν $-1/2 \leq x \leq 1/2$.
Το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού είναι από το προηγούμενο ερώτημα $P_2(x) = 1 - x^2$ και

$$e^{-x^2} = P_2(x) + R_2(x) = 1 - x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3,$$

με ξ μεταξύ 0 και x. Επειδή

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \qquad f''(x) = (4x^2-2)e^{-x^2}, \qquad f'''(x) = (-8x^3+12x)e^{-x^2}$$

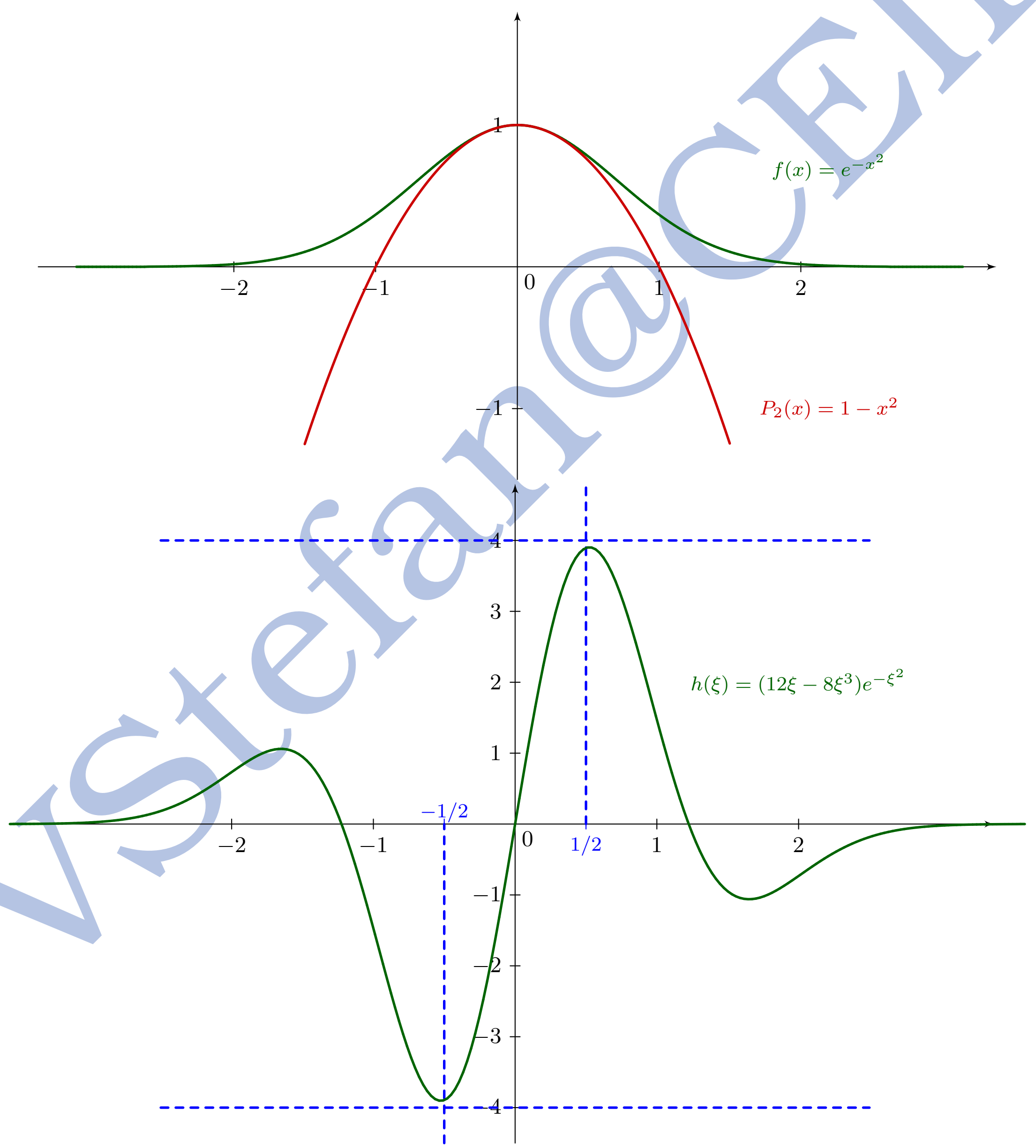
βρίσκουμε

$$|e^{-x^2} - P_2(x)| = |R_2(x)| = \frac{|-8\xi^3+12\xi|}{e^{\xi^2}3!}|x^3| \le \frac{(1/2)^3}{3!} \max_{|\xi|\le 1/2} \left(\frac{12\xi-8\xi^3}{e^{\xi^2}}\right)$$

βλέπε σχήμα. Επομένως στο διάστημα $[-1/2, 1/2]$ είναι $e^{-x^2} \approx 1 - x^2$ με σφάλμα το πολύ

$$\frac{1}{48}\frac{5}{\sqrt[4]{e}} = 0.081125081569938 \qquad \left(\text{για } \xi = \frac{1}{2}\right).$$

Σχήμα για το Θ3 (γ΄)



Η συνάρτηση $h(\xi) = (12\xi - 8\xi^3)e^{-\xi^2}$ είναι περιττή και $h'(\xi) = (12 - 48\xi^2 + 16\xi^4)e^{-\xi^2}$.

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi^4 - 3\xi^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \xi = \pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{6}}{2}}.$$

Επειδή $\sqrt{(3-\sqrt{6})/2} > 1/2$ τα ακρότατα της h βρίσκονται εκτός του διαστήματος $[-1/2, 1/2]$, έτσι στο διάστημα αυτό η h είναι μονότονη. Επομένως

$$\max_{|\xi|\le 1/2} h(\xi) = h(1/2).$$

Παρατήρηση.

1. Μια εκτίμηση της ακρίβειας της προσέγγισης προκύπτει επίσης παρατηρώντας το πρώτο σχήμα, συγγεκριμένα η μέγιστη απόσταση στις δύο γραφικές παραστάσεις συμβαίνει στα άκρα του διαστήματος, έτσι

$$\begin{aligned}|e^{-x^2} - P_2(x)| &\le |f(1/2) - P_2(1/2)|\\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{e}} - 1 + \frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{e^{0.25}} - 0.75\\ &= 0.0288007830714049.\end{aligned}$$

2. Επειδή η σειρά

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} + \cdots, \qquad x\in\mathbb{R}$$

είναι εναλλασσόμενη και για $-1 < x < 1$ είναι

$$1 \ge \frac{x^2}{1!} \ge \frac{x^4}{2!} \ge \cdots \ge \frac{x^{2n}}{n!} \ge \cdots \ge 0,$$

από το Θεώρημα 6 (εκτίμηση σφάλματος αποκοπής) των Σημειώσεων, έπεται ότι

$$|e^{-x^2} - P_2(x)| \le \frac{x^4}{2},$$

κατά συνέπεια στο διάστημα $[-1/2, 1/2]$ έχουμε

$$\begin{aligned}|e^{-x^2} - P_2(x)| &\le \frac{(1/2)^4}{2}\\ &= \frac{1}{32}\\ &= 0.03125.\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν τρείς διαφορετικές εκτιμήσεις της ακρίβειας της προσέγγισης της $f(x) = e^{-x^2}$ με το πολύωνυμο Taylor $P_2(x) = 1 - x^2$ στο διάστημα $-1/2 \le x \le 1/2$. **Όλες οι εκτιμήσεις είναι σωστές και η κάθε μια σχετίζεται με τον τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος**, δηλαδή Θεώρημα μέσης τιμής του Taylor, ή άμεση εύρεση του μεγίστου της $f(x) - P_2(x)$, ή εκτίμηση του σφάλματος αποκοπής σε εναλλασσόμενες σειρές.

Θ4. (α΄) (9 μον.) Εξετάστε για ποιά $p > 0$ το ολοκλήρωμα $\quad I(p) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^p}\, dx \quad$ συγκλίνει.

Είναι

$$I(p) = \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^p}\, dx = \lim_{\xi \to +\infty} \int_1^{\xi} \frac{\log x}{x^p}\, dx.$$

i. Για $p = 1$ και $y = \log x$ έχουμε

$$\int_1^{\xi} \frac{\log x}{x}\, dx = \int_0^{\log \xi} y\, dy = \frac{y^2}{2}\bigg|_0^{\log \xi} = \frac{1}{2}(\log \xi)^2 \to +\infty \quad \text{καθώς } \xi \to +\infty.$$

ii. Για $p \neq 1$

$$\begin{aligned}
\int_1^{\xi} \frac{\log x}{x^p}\, dx &= \int_1^{\xi} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)' \log x\, dx \\
&= \frac{x^{1-p}}{1-p} \log x \bigg|_1^{\xi} - \int_1^{\xi} \frac{x^{1-p}}{1-p} \frac{1}{x}\, dx \\
&= \frac{1}{p-1}\left(-\frac{\log \xi}{\xi^{p-1}} + \int_1^{\xi} \frac{1}{x^p}\, dx\right) \\
&= \frac{1}{p-1}\left[-\frac{\log \xi}{\xi^{p-1}} + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{\xi^{p-1}}\right)\right]
\end{aligned}$$

Αν $p < 1$ και τα δύο κλάσματα που εξαρτώνται από το p αποκλίνουν στο $+\infty$ καθώς $\xi \to +\infty$, άρα $I(p) = +\infty$ (γιατί;).
Αν $p > 1$ γράφουμε $p - 1 = q > 0$ και

$$\lim_{\xi \to +\infty} \frac{\log \xi}{\xi^q} = \lim_{\xi \to +\infty} \frac{1/\xi}{q\xi^{q-1}} = \lim_{\xi \to +\infty} \frac{1}{q\xi^q} = 0 \qquad \text{(L'Hospital)}$$

$$\lim_{\xi \to +\infty} \frac{1}{\xi^q} = 0$$

Άρα το ολοκλήρωμα συγκλίνει για $p > 1$ και στην περίπτωση αυτή $I(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2}$.

(β΄) (9 μον.) Υπολογίστε το όριο της σειράς $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$.

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

άρα η σειρά είναι τηλεσκοπική, αφού $2n \pm 1 \in \mathbb{N}$, έτσι

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} &= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\
&= \lim_{N \to \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N+1}\right) \\
&= \lim_{N \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2N+1}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Θ5. (9 μον.) Δείξτε ότι

$$ax \leq \frac{a^6}{6} + \frac{5}{6}x^{6/5}$$

για κάθε $x > 0$ όπου $a > 0$.

Ορίζοντας

$$f(x) = \frac{a^6}{6} - ax + \frac{5}{6}x^{6/5}$$

αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$. Υπολογίζουμε

$$f'(x) = -a + x^{1/5} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a^5.$$

Αν $x < a^5$, τότε $f'(x) < 0$, επομένως η f είναι φθίνουσα στο $(0, a^5)$, ενώ αν $x > a^5$, τότε $f'(x) > 0$, επομένως η f είναι αύξουσα στο $(a^5, +\infty)$. Κατά συνέπεια η f έχει ελάχιστο στο $x = a^5$, επομένως $f(x) \geq f(a^5)$, ισοδύναμα

$$\frac{a^6}{6} - ax + \frac{5}{6}x^{6/5} \geq \frac{a^6}{6} - a^6 + \frac{5}{6}a^6 = 0,$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Θ6. ☒ (3 μον.) $\lim_{x\to 0+} x \log x = 0.$

$$\lim_{x\to 0+} x \log x = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{1/x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0.$$

☒ (3 μον.) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

(α') (9 μον.) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\, dx = \cdots$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \log x \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} (\log 1 - \log \varepsilon) = - \lim_{\varepsilon\to 0+} \log \varepsilon = +\infty.$$

(β') (9 μον.) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\, dx = \cdots$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 x^{-1/5}\, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{5}{4}x^{4/5}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{5}{4}(1 - \varepsilon^{4/5}) = \frac{5}{4}.$$