Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Διδάσκων: Ε. Στεφανόπουλος — 2 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2017

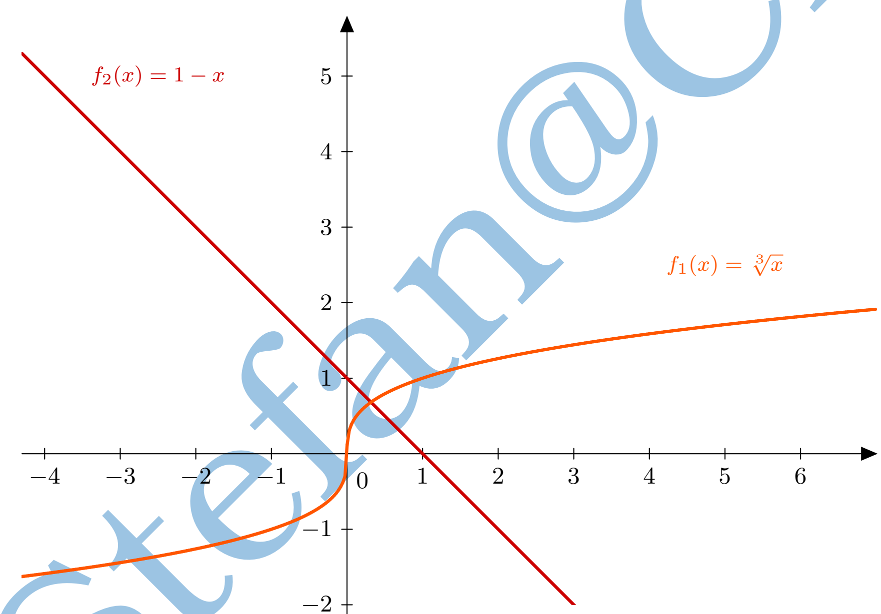
Θ1. (α΄) Δείξτε ότι η εξίσωση $\sqrt[3]{x} = 1 - x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στους πραγματικούς αριθμούς και δώστε ένα λογικό διάστημα το οποίο την περιέχει.

(β΄) Αν $0 < a < b$ και $x, y \in [a, b]$, να δειχτεί ότι

$$\frac{|y-x|}{3\sqrt[3]{b^2}} \leq |\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x}| \leq \frac{|y-x|}{3\sqrt[3]{a^2}}.$$

Σχόλια και Λύση

(α΄) Στο σχήμα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\sqrt[3]{x}$ και $1 - x$ οι οποίες τέμνονται σε κάποιο σημείο μεταξύ 0 και 1

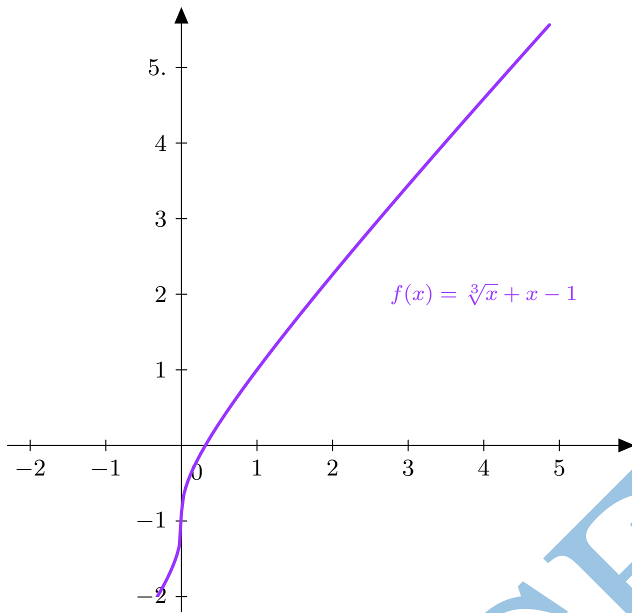


Δείχνουμε ότι η εξίσωση $\sqrt[3]{x} + x - 1 = 0$ έχει μοναδική ρίζα. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x} + x - 1$ είναι συνεχής σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Επιπλέον $f(0) = -1$ και $f(1) = 1$, κατά συνέπεια το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός τουλάχιστον σημείου $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ και

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} + 1 = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 1 > 0 \qquad x \neq 0.$$

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$, και από τη συνέχεια έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, κατά συνέπεια έχει μοναδικό σημείο μηδενισμού, γεγονός που ισοδυναμεί με το ότι η εξίσωση $\sqrt[3]{x} = 1 - x$ έχει ακριβώς μία ρίζα.



(β΄) Η ανισότητα είναι προφανής αν $x = y$. Έστω λοιπόν $x \neq y$. Η συνάρτηση $g(x) = \sqrt[3]{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, έτσι για $x > 0$, $y > 0$ και $x \neq y$ από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής έπεται ότι

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = g'(\xi) \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}{x - y} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi^2}}$$

για κάποιο ξ μεταξύ x και y. Έτσι, αν επιπλέον, $0 < a < x, y < b$ είναι

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{b^2}} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi^2}} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}},$$

επομένως

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{b^2}} \leq \left| \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}{x - y} \right| \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}},$$

απ' όπου πολλαπλασιάζοντας με $|x - y|$ έπεται το ζητούμενο.

Θ2. (α΄) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

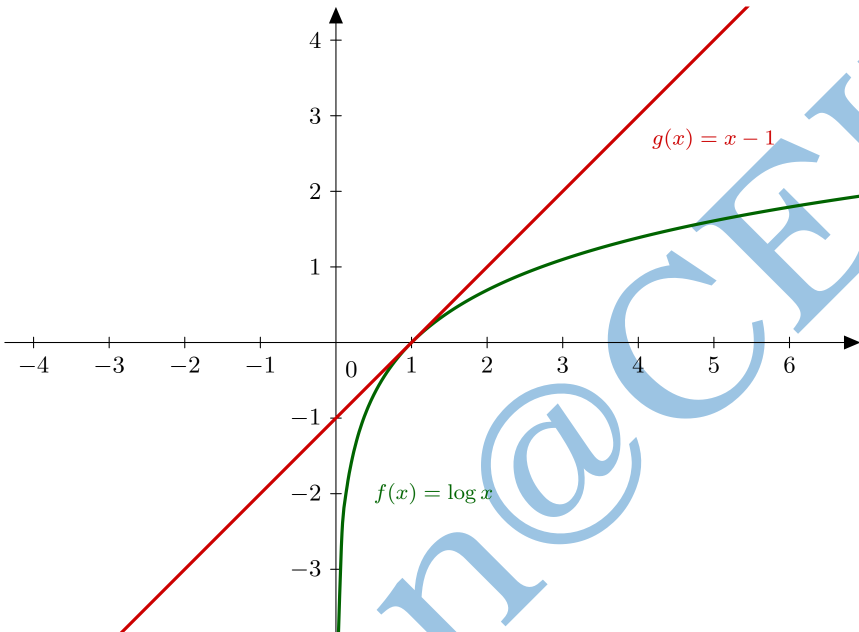
$$\log x \le x - 1.$$

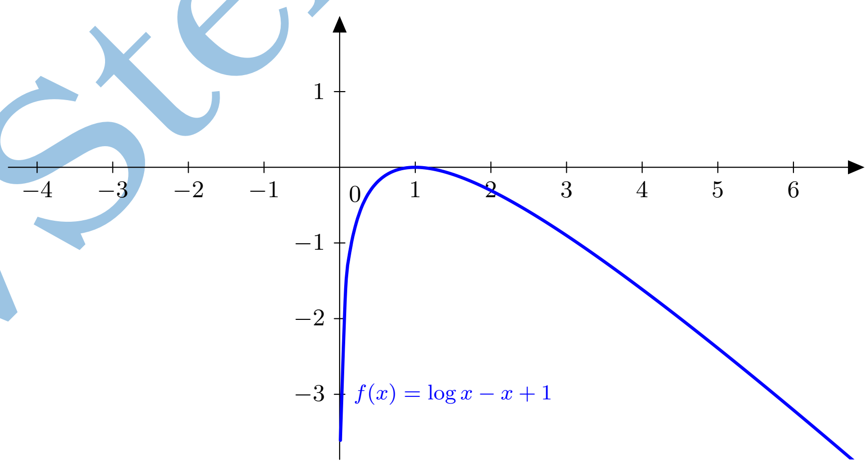
(β΄) Δεδομένου ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$ καθώς $n \to \infty$ να βρεθεί το όριο, εφόσον αυτό υπάρχει,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log n}.$$

Σχόλια και Λύση

Στα σχήματα που ακολουθούν βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\log x$, $x-1$, και $\log x - x + 1$.





(α΄) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \log x - x + 1$ για $x > 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη και

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}, \qquad x > 0.$$

Άρα $f' > 0$ στο $(0,1)$ και $f' < 0$ στο $(1, +\infty)$, δηλαδή η f είναι αύξουσα για $0 < x < 1$ και φθίνουσα για $x > 1$, κατά συνέπεια έχει μέγιστο στο $x = 1$, ισοδύναμα

$$\log x - x + 1 \le f(1) = 0 \Rightarrow \log x \le x - 1, \qquad x > 0.$$

(β΄) Από το (α΄) έχουμε ότι $\log n \leq n - 1$ για κάθε φυσικό αριθμό n. Επιπλέον η $\log n$ είναι αύξουσα ακολουθία, αφού η $\log x$, $x > 0$ είναι αύξουσα συνάρτηση ($\log' x = 1/x > 0$), κατά συνέπεια για $n \geq 3$ είναι $\log n \geq \log 3 > \log e = 1$. Έτσι τελικά έχουμε

$$1 \leq \log n \leq n - 1 < n \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{\log n} \leq \sqrt[n]{n}, \qquad n \geq 3$$

Επειδή από την υπόθεση έχουμε ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$, έπεται ότι το όριο του ενδιάμεσου μέλους, καθώς $n \to \infty$, υπάρχει και

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log n} = 1.$$

Θ3. Προσεγγίστε την $f(x) = \sqrt{1+x}$ με το σχετικό πολυώνυμο Taylor δεύτερου βαθμού στο $x = 0$, και εκτιμήστε την ακρίβεια της προσέγγισης όταν $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

Σχόλια και Λύση

Από τον τύπο του Taylor έχουμε

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = P_2(x) + R_2(x)$$

για κάποιο $\xi = \xi(n,x)$ μεταξύ 0 και x. Στη συνέχεια υπολογίζουμε

$$\begin{array}{llll} f(x) = (1+x)^{1/2} & f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} & f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} & f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \\ f(0) = 1 & f'(0) = \frac{1}{2} & f''(0) = -\frac{1}{4} & f'''(\xi) = \frac{3}{8(1+\xi)^{5/2}}, \end{array}$$

οπότε το πολυώνυμο Taylor δεύτερου βαθμού, στο 0, είναι

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2,$$

έτσι για x κοντά στο 0 είναι

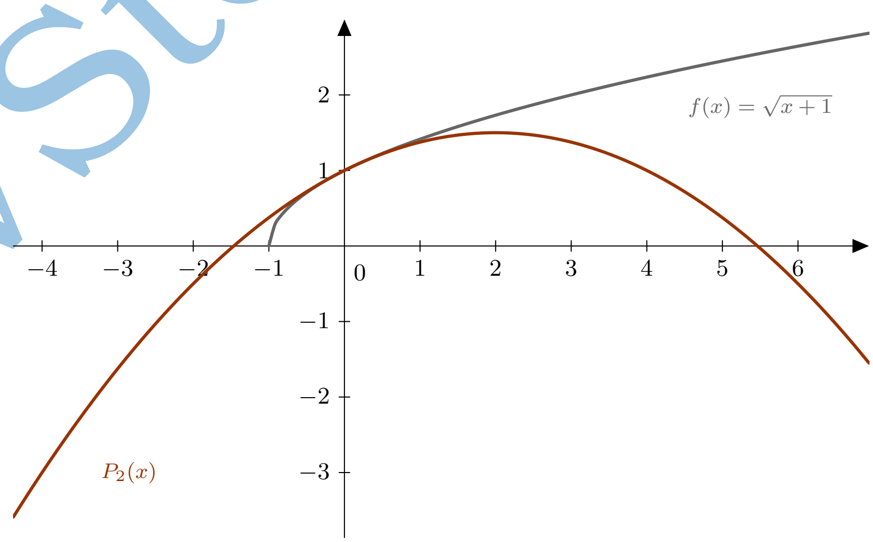
$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2.$$

Την ακρίβεια της προσέγγισης εκτιμά το υπόλοιπο $R_2(x)$, αφού $f(x) - P_2(x) = R_2(x)$, έτσι

$$\left|\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)\right| = \left|\frac{3x^3}{8(1+\xi)^{5/2}3!}\right| \leq \frac{(1/2)^3}{16(1-1/2)^{5/2}} = \frac{1}{16\sqrt{2}} = 0.0442$$

επειδή $x \in [-1/2, 1/2]$ και $0 < |\xi| < |x|$.

Στα σχήματα που ακολουθούν βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{1+x}$, και $P_2(x)$.



Θ4. (α΄) Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{x\to 0+} x\log x$.

(β΄) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x\log x\,dx$.

Σχόλια και Λύση

(α΄) Γράφοντας

$$x\log x = \frac{\log x}{1/x}$$

βλέπουμε ότι καθώς $x\to 0+$ ο αριθμητής και ο παρονομαστής, οι οποίοι είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις για $x>0$, απειρίζονται, έτσι από τον κανόνα του l' Hospital παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0+} x\log x = \lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+} x = 0.$$

(β΄) Η συνάρτηση $x\log x$ δεν είναι συνεχής στο $x=0$ γιατί ο λογάριθμος ορίζεται μόνο για $x>0$. Στο (α΄) δείξαμε ότι

$$\lim_{x\to 0+} x\log x = 0,$$

κατά συνέπεια η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ x\log x & x>0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο, επομένως

$$\int_0^1 x\log x\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 x\log x\,dx,$$

όπου $0<\epsilon<1$. Για δε τον υπολογισμό του ολοκληρώματος έχουμε

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^1 x\log x\,dx = \int_\epsilon^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx &= \frac{x^2}{2}\log x\Big|_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{x}{2}(x\log x)\Big|_\epsilon^1 - \frac{x^2}{4}\Big|_\epsilon^1 \\ &= -\frac{\epsilon}{2}(\epsilon\log\epsilon) - \left(\frac{1}{4}-\frac{\epsilon^2}{4}\right)\end{aligned}$$

όπου εμφανίζεται το όριο που υπολογίσαμε στο (α΄). Κατά συνέπεια

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\log x\,dx &= \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 x\log x\,dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0+}\left[-\frac{\epsilon}{2}(\epsilon\log\epsilon) - \frac{1}{4} + \frac{\epsilon^2}{4}\right] \\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

αφού $\epsilon\log\epsilon\to 0$, καθώς $\epsilon\to 0+$, από το (α΄).

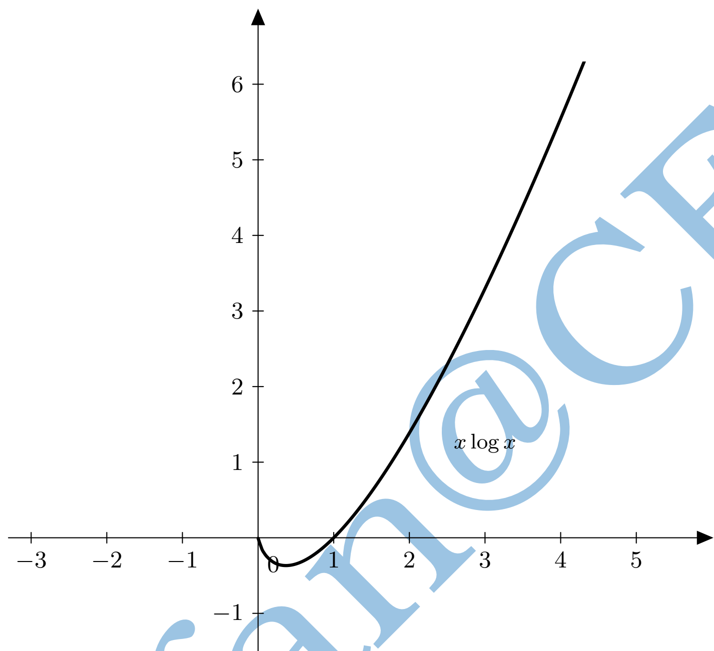
Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x \log x & x > 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ κατά συνέπεια το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 f(x)\, dx$$

είναι ολοκλήρωμα Riemann, δηλαδή δεν είναι γενικευμένο. Στο σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της f η οποία ταυτίζεται με αυτή της $x \log x$ στο $(0, +\infty)$.



Θ5. Εξετάστε για ποιές τιμές της παραμέτρου s το γενικευμένο ολοκλήρωμα $F(s) = \int_0^{+\infty} xe^{sx}\,dx$ συγκλίνει και για αυτές τις τιμές να βρεθεί το όριο.

Σχόλια και Λύση

Αν $s \geq 0$, τότε $e^{sx} \geq 1$ για $x \geq 0$, οπότε για $L > 0$ έχουμε

$$\int_0^L xe^{sx}\,dx \geq \int_0^L x\,dx = \frac{L^2}{2} \to +\infty$$

καθώς $L \to +\infty$, έτσι το ολοκλήρωμα $F(s)$ αποκλίνει για $s \geq 0$. Θεωρούμε την περίπτωση $s < 0$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε με $s = -t$ για $t > 0$ και $L > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^L xe^{sx}\,dx = \int_0^L xe^{-tx}\,dx = \int_0^L x\left(-\frac{e^{-tx}}{t}\right)'\,dx &= -\frac{xe^{-tx}}{t}\Big|_0^L + \int_0^L \frac{e^{-tx}}{t}\,dx\\ &= -\frac{xe^{-tx}}{t}\Big|_0^L - \frac{e^{-tx}}{t^2}\Big|_0^L\\ &= -\frac{L}{te^{tL}} - \frac{1}{t^2e^{tL}} + \frac{1}{t^2}.\end{aligned}$$

Αν $L \to +\infty$, τότε $e^{tL} \to +\infty$, αφού $t > 0$, οπότε από τον κανόνα του l' Hospital έχουμε

$$\lim_{L\to+\infty} \frac{L}{te^{tL}} = \lim_{L\to+\infty} \frac{1}{t^2e^{tL}} = 0,$$

κατά συνέπεια

$$\lim_{L\to+\infty} \int_0^L xe^{sx}\,dx = \lim_{L\to+\infty}\left(-\frac{L}{te^{tL}} - \frac{1}{t^2e^{tL}} + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{t^2} = \frac{1}{s^2}.$$

Έτσι

$$F(s) = \int_0^{+\infty} xe^{sx}\,dx = \frac{1}{s^2}, \qquad s < 0.$$

Θ6. Να βρεθεί το ανάπτυγμα Maclaurin, δηλαδή η δυναμοσειρά γύρω από το $x = 0$ (πιθανόν να μη χρειάζεται να υπολογισθούν οι παράγωγοι ανώτερης τάξης, βλέπε τυπολόγιο), καθώς και το διάστημα σύγκλισης της κάθε σειράς:

(α΄) $f(x) = \sin(-x^2)$.

(β΄) $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Σχόλια και Λύση

(α΄) Το ανάπτυγμα Maclaurin της $\sin x$ συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε θέτοντας $-x^2$ στη θέση του x παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sin(-x^2) &= (-x^2) - \frac{(-x^2)^3}{3!} + \frac{(-x^2)^5}{5!} - \frac{(-x^2)^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{(-x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\ &= -x^2 + \frac{x^6}{3!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{14}}{7!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!} + \cdots\end{aligned}$$

και το διάστημα σύγκλισης της σειράς είναι όλο το $\mathbb{R}$.

(β΄) Επειδή

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

για $-1 < x < 1$, από το Θεώρημα που αφορά στη παράγωγο (και παράγουσα) του ορίου δυναμοσειράς παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) &= \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots\right)' \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots\end{aligned}$$

και το διάστημα σύγκλισης του αναπτύγματος της παραγώγου είναι το ίδιο με αυτό της αρχικής, δηλαδή το $(-1, 1)$.

Θ7. Να βρεθεί το όριο της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1/4}$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Ο παρονομαστής είναι διαφορά τετραγώνων.

Σχόλια και Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{n^2 - 1/4} = \frac{1}{(n-1/2)(n+1/2)} = \frac{a}{n-1/2} + \frac{b}{n+1/2}$$

για κάποια a και b, ισοδύναμα

$$\frac{1}{(n-1/2)(n+1/2)} = \frac{(a+b)n + (a-b)/2}{(n-1/2)(n+1/2)} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} a+b=0 \\ a-b=2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow a = -b = 1,$$

οπότε η σειρά γράφεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1/4} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1/2} - \frac{1}{n+1/2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1/2} - \frac{1}{n+1-1/2} \right).$$

Η σειρά είναι τηλεσκοπική, και το μερικό άθροισμα S_N της σειράς είναι

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n-1/2} - \frac{1}{n+1-1/2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1-1/2} - \frac{1}{2-1/2} \right) + \left(\frac{1}{2-1/2} - \frac{1}{3-1/2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{N-1/2} - \frac{1}{N+1-1/2} \right) \\ &= \frac{1}{1/2} - \frac{1}{(2N+1)/2} \\ &= 2 - \frac{2}{2N+1}, \end{aligned}$$

άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1/4} = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \left(2 - \frac{2}{2N+1} \right) = 2.$$