

# Γενικά Μαθηματικά Ι

## Διάλεξη 7

### Όρια και Συνέχεια Συναρτήσεων

---

Ε. Στεφανόπουλος

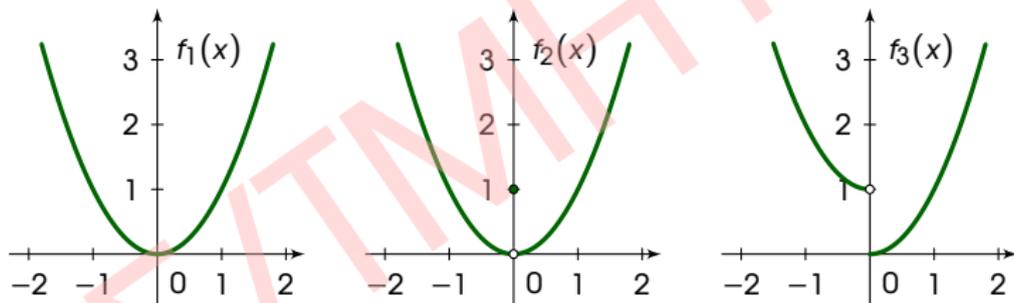
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

31 Μαρτίου 2025

## Όρια συναρτήσεων

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0, \\ 1 & x = 0, \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0, \\ x^2 & x \geq 0. \end{cases}$$



Καθώς το  $x$  προσεγγίζει το μηδέν οι αντίστοιχες τιμές των  $f_1$  και  $f_2$  προσεγγίζουν επίσης το μηδέν όχι όμως και αυτές της  $f_3$ . Αν το  $x$  προσεγγίζει το μηδέν από τα αριστερά ( $x < 0$ ) οι αντίστοιχες τιμές  $f_3(x)$  προσεγγίζουν το ένα, ενώ αν το  $x$  προσεγγίζει το μηδέν από τα δεξιά ( $x > 0$ ) οι αντίστοιχες τιμές  $f_3(x)$  προσεγγίζουν το μηδέν.

Λέμε ότι οι  $f_1$  και  $f_2$  συγκλίνουν στο μηδέν καθώς το  $x$  τείνει στο μηδέν και γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0.$$

Το μηδέν το λέμε **όριο** των  $f_1$  και  $f_2$  καθώς το  $x$  τείνει στο μηδέν. Για την  $f_3$  θέλοντας να δηλώσουμε τις διαφορετικές οριακές τιμές που προκύπτουν ανάλογα με τον τρόπο που προσεγγίζει το  $x$  το μηδέν γράφουμε

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f_3(x) := \lim_{x \rightarrow 0^-} f_3(x) = 1, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_3(x) := \lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x) = 0.$$

Γράφουμε επίσης

$$f_3(0-) := \lim_{x \rightarrow 0^-} f_3(x) = 1, \quad f_3(0+) := \lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x) = 0,$$

και λέμε το  $f_3(0-)$  **αριστερό πλευρικό όριο** της  $f_3$ , ή απλά **όριο από τα αριστερά** της  $f_3$  καθώς το  $x$  προσεγγίζει το μηδέν από τα αριστερά, και το  $f_3(0+)$  **δεξιό πλευρικό όριο** της  $f_3$ , ή απλά **όριο από τα δεξιά** της  $f_3$  καθώς το  $x$  προσεγγίζει το μηδέν από τα δεξιά.

## Ορισμός 1

Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  ορίζεται σε κάθε σημείο ενός διαστήματος γύρω από ένα σημείο  $x_0$ , εκτός ίσως από το  $x_0$ . Θα λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός  $L$  είναι τό όριο της  $f$  καθώς το  $x$  τείνει στο  $x_0$  και θα γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

ή  $f(x) \rightarrow L$  καθώς  $x \rightarrow x_0$ , εάν για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  (το οποίο εξαρτάται από το  $\epsilon$ ) ώστε

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{οποτεδήποτε} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Παρατηρούμε ότι αν για τα πλευρικά όρια της  $f$  στο  $x_0$  ισχύει

$$f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0+)$$

τότε το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  δεν υπάρχει.

## Παράδειγμα 1

Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Το κλάσμα στο ζητούμενο όριο γράφεται

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

κατά συνέπεια για  $x \neq 1$  είναι

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = (x + 1),$$

επομένως από τον ορισμό του ορίου έπεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

## Παράδειγμα 2

Υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|1+x| - |1-x|}{x}.$$

Ενδιαφερόμαστε για την συμπεριφορά του πηλίκου για  $x$  κοντά στο μηδέν, έτσι για  $-1 < x < 1$  είναι  $1-x > 0$  και  $1+x > 0$ , οπότε

$$\frac{|1+x| - |1-x|}{x} = \frac{1+x - (1-x)}{x} = \frac{2x}{x} = 2, \quad 0 < |x| < 1$$

κατά συνέπεια

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|1+x| - |1-x|}{x} = 2.$$

## Θεώρημα 1 (Ιδιότητες ορίων)

Έστω ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ορισμένες σε κάθε σημείο ενός διαστήματος γύρω από ένα σημείο  $x_0$ , εκτός ίσως από το  $x_0$  και έστω ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$$

τότε

- ①  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \mu \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lambda A + \mu B$ , για  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .
- ②  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right) = AB$ .
- ③  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$ , εάν  $B \neq 0$ .
- ④  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = A^n$ , για  $n \in \mathbb{N}$ .
- ⑤  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$ , για  $n \in \mathbb{N}$  και  $f(x) \geq 0$  σε διάστημα που περιέχει το  $x_0$  αν ο  $n$  είναι άρτιος.

## Θεώρημα 2 (Κριτήριο της παρεμβολής)

Έστω ότι οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  και  $h$  είναι ορισμένες σε κάθε σημείο ενός διαστήματος γύρω από ένα σημείο  $x_0$ , εκτός ίσως από το  $x_0$  και έστω ότι  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  για κάθε  $x$ . Εάν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ .

### Πρόταση 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

### Πόρισμα 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

### Παράδειγμα 3 (Το χαρακτηριστικό όριο)

Δείχνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Από την ανισότητα

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}, \quad x \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2)$$

το Πόρισμα εξασφαλίζει ότι το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

υπάρχει και από το Θεώρημα έπεται ότι το όριο αυτό είναι ίσο με 1.

## Παράδειγμα 4 (2ο χαρακτηριστικό όριο)

Δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Για  $x$  κοντά στο 0 το  $\cos x$  είναι κοντά στο 1, έτσι γράφοντας

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - 1}{x} &= \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} \\ &= -\frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{\cos x + 1} \end{aligned}$$

και αφού τα όρια των δύο κλασμάτων στο δεξί μέλος υπάρχουν, παίρνουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + 1} = -1 \frac{0}{2} = 0.$$

## Ορισμός 2

Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  ορίζεται σε κάθε σημείο ενός διαστήματος γύρω από ένα σημείο  $x_0$ , εκτός ίσως από το  $x_0$ .

• Θα λέμε ότι η  $f$  **αποκλίνει στο**  $+\infty$  καθώς το  $x$  τείνει στο  $x_0$  και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  αν για κάθε  $A > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε

$$f(x) > A \quad \text{οποτεδήποτε} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

• Θα λέμε ότι η  $f$  **αποκλίνει στο**  $-\infty$  καθώς το  $x$  τείνει στο  $x_0$  και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  αν για κάθε  $A > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε

$$f(x) < -A \quad \text{οποτεδήποτε} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Για τις συναρτήσεις

$$g_1(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{και} \quad g_2(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} g_1(x) \quad \text{δεν υπάρχει, ενώ} \quad \lim_{x \rightarrow 1} g_2(x) = +\infty.$$

Κοιτάζοντας τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης για αυθαίρετα μεγάλες τιμές του  $|x|$ , δηλαδή για  $x \rightarrow \pm\infty$ , έχουμε

### Ορισμός 3

Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  ορίζεται σε κατάλληλο άπειρο διάστημα.

- Γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

αν για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $A > 0$  ώστε

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{οποτεδήποτε} \quad x > A.$$

- Γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

αν για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $A > 0$  ώστε

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{οποτεδήποτε} \quad x < -A.$$

## Παράδειγμα 5

Γνωρίζοντας ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , δείξτε ότι  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .

Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της συνάρτησης

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad x > 0$$

καθώς  $x \rightarrow +\infty$ . Για  $x > 0$  αν  $n_x$  είναι το ακέραιο μέρος του  $x$ , τότε

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{n_x + 1} &\leq 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n_x} \\ \left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{n_x} &\leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n_x} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x + 1} \\ \left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{n_x + 1} &\leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x} \left(1 + \frac{1}{n_x}\right). \end{aligned}$$

Καθώς  $n_x \rightarrow \infty$  (ισοδύναμα  $x \rightarrow \infty$ ) τα δύο άκρα της ανισότητας τείνουν στο  $e$ , κατά συνέπεια και η ενδιάμεση ποσότητα συγκλίνει στο ίδιο όριο καθώς  $x \rightarrow \infty$ .

## Παράδειγμα 6

Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}), \quad a > 0.$$

Γράφοντας

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = \frac{x+a-x}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = \frac{a}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}$$

και παρατηρώντας ότι ο παρονομαστής στο τελευταίο κλάσμα τείνει στο  $+\infty$  καθώς  $x \rightarrow +\infty$  εκτιμάμε ότι το ζητούμενο όριο πρέπει να είναι ίσο με μηδέν. Πράγματι για  $\epsilon > 0$  έχουμε

$$0 < \sqrt{x+a} - \sqrt{x} = \frac{a}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} \leq \frac{a}{2\sqrt{x}} < \epsilon \quad \text{για } x > \left(\frac{a}{2\epsilon}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = 0.$$

## Συνέχεια συναρτήσεων

Για τις συναρτήσεις

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0, \\ 1 & x = 0, \end{cases}$$

είδαμε ότι τα όρια και των δύο καθώς  $x \rightarrow 0$  υπάρχουν και είναι ίσα με μηδέν αλλά διαφέρουν στο ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = f_1(0) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) \neq f_2(0).$$

### Ορισμός 4

Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  ορίζεται σε κάποιο διάστημα γύρω από το  $x_0$ . Η  $f$  λέγεται **συνεχής** στο  $x_0$  αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Για να είναι δηλαδή η  $f$  συνεχής στο  $x_0$  πρέπει να ισχύουν τα εξής:

- ①  $f(x_0)$  υπάρχει
- ②  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  υπάρχει, και
- ③  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ , σχηματικά μπορούμε να γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x).$$

## Ορισμός 5

Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  ορίζεται σε κάποιο διάστημα που περιέχει το  $x_0$ .

Η  $f$  λέγεται **συνεχής από αριστερά** στο  $x_0$  αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0).$$

Η  $f$  λέγεται **συνεχής από δεξιά** στο  $x_0$  αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0^+) = f(x_0).$$

## Ορισμός 6 (Συνέχεια σε διάστημα)

Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται συνεχής σε ένα διάστημα αν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του διαστήματος. Ειδικά η  $f$  είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα  $[a, b]$  αν η  $f$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο  $x \in (a, b)$  και επιπλέον  $f(a+) = f(a)$  και  $f(b-) = f(b)$ .

## Παράδειγμα 7

Κάθε γραμμική συνάρτηση  $f(x) = ax + b$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

Έστω  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Από τον ορισμό του ορίου έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (ax + b) = a \lim_{x \rightarrow x_0} x + b = ax_0 + b = f(x_0)$$

γεγονός που αποδεικνύει το ζητούμενο.

## Παράδειγμα 8

Η συνάρτηση  $f(x) = x^n$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και η συνάρτηση  $f(x) = x^{-n}$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

Το αποτέλεσμα είναι συνέπεια των ιδιοτήτων των ορίων. Για παράδειγμα για  $x_0 \in \mathbb{R}$  και  $n = 2$ , είναι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} x \right) \left( \lim_{x \rightarrow x_0} x \right) = x_0 x_0 = x_0^2,$$

ενώ για  $n = 3$ , έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^3 = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} x \right) \left( \lim_{x \rightarrow x_0} x^2 \right) = x_0 x_0^2 = x_0^3,$$

και για γενικό  $n$  εργαζόμαστε επαγωγικά. Για  $x_0 \neq 0$  και  $n \in \mathbb{N}$  έχουμε από το πρώτο μέρος

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} 1}{\lim_{x \rightarrow x_0} x^n} = \frac{1}{x_0^n}$$

που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε.

Τα σημεία στα οποία μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής λέγονται **σημεία ασυνέχειας** της συνάρτησης και η συνάρτηση λέγεται **ασυνεχής** στα σημεία αυτά.

### Παρατήρηση 1

Ας δούμε τι σημαίνει ότι μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε σημείο, έστω  $x_0$ . Σύμφωνα με τον ορισμό είτε το  $f(x_0)$  δεν ορίζεται, είτε αν ορίζεται θα υπάρχει ένας, τουλάχιστον, τρόπος όπου ενώ το  $x$  προσεγγίζει το σημείο  $x_0$  η εικόνα  $f(x)$  δεν προσεγγίζει το  $f(x_0)$ . Ισοδύναμα θα υπάρχει μια ακολουθία σημείων  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  με  $x_n \rightarrow x_0$ , αλλά  $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$ .

Ένας ισοδύναμος ορισμός της συνέχειας είναι

### Ορισμός 7

Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  ορίζεται σε κάποιο διάστημα γύρω από το  $x_0$ . Η  $f$  λέγεται **συνεχής** στο  $x_0$  αν για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  (το οποίο εξαρτάται από το  $\epsilon$  και το  $x_0$ ), ώστε

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \text{οποτεδήποτε} \quad |x - x_0| < \delta,$$

## Συνέχεια των συναρτήσεων $\sin$ και $\cos$

Δείχνουμε ότι οι συναρτήσεις  $\sin$  και  $\cos$  είναι συνεχείς στο  $\mathbb{R}$ .

Έστω  $x \in \mathbb{R}$  και έστω  $\epsilon > 0$ . Δείχνουμε ότι υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε

$$\text{αν } |x - y| < \delta, \text{ τότε } |\sin x - \sin y| < \epsilon.$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

παίρνουμε μέσω της  $|\sin x| \leq |x|$

$$|\sin x - \sin y| = 2 \left| \cos \frac{x+y}{2} \right| \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq |x - y|.$$

Έτσι για  $\delta = \epsilon$  έχουμε

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| < \delta = \epsilon.$$

## Συνέχεια των συναρτήσεων $\sin$ και $\cos$ (συνέχεια)

που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε.

Το αποτέλεσμα για τη συνάρτηση  $\cos$  προκύπτει με ανάλογο τρόπο από την αντίστοιχη ταυτότητα

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι η επιλογή του  $\delta$ , τόσο για την  $\sin$  όσο και για την  $\cos$ , είναι ανεξάρτητη του  $x$  και εξαρτάται μόνο από το  $\epsilon$ .

### Παράδειγμα 9

Εάν  $a > 0$  η συνάρτηση  $a^x$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

**Θεώρημα 3**

Εάν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι συνεχείς στο σημείο  $x_0$ , τότε οι

$$\lambda f(x) + \mu g(x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x_0) \neq 0$$

είναι συνεχείς στο  $x_0$ .

**Θεώρημα 4**

Έστω ότι η σύνθεση  $f \circ g$  ορίζεται. Εάν η  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $y_0 = g(x_0)$ , τότε η  $f \circ g$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

**Θεώρημα 5**

Εάν η συνάρτηση  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $I$  είναι διάστημα, είναι ένα-προς-ένα συνεχής συνάρτηση, τότε η  $f^{-1}$  είναι επίσης συνεχής συνάρτηση.

## Θεώρημα 6

Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς

- ① Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις στο  $\mathbb{R}$ .
- ② Οι τριγωνομετρικές  $\sin$  και  $\cos$  στο  $\mathbb{R}$ .
- ③ Οι εκθετικές  $a^x$ ,  $a > 0$  στο  $\mathbb{R}$ .
- ④ Οι ρητές εκτός από τα σημεία μηδενισμού του παρονομαστή.
- ⑤ Οι τριγωνομετρικές  $\tan$  και  $\sec$  σε κάθε διάστημα  $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Οι  $\cot$  και  $\csc$  σε κάθε διάστημα  $(k\pi, (k+1)\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- ⑥ Οι ρίζες  $\sqrt[n]{x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  στο  $\mathbb{R}$  αν ο  $n$  είναι περιττός, και στο  $[0, +\infty)$  αν ο  $n$  είναι άρτιος.
- ⑦ Οι λογαριθμικές  $\log_a x$ ,  $a > 0$  στο  $(0, +\infty)$ .
- ⑧ Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές  $\sin^{-1}$  και  $\cos^{-1}$  στο διάστημα  $[-1, 1]$ , και  $\tan^{-1}$  στο  $\mathbb{R}$ .

## Παράδειγμα 10

Δείχνουμε ότι για  $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Το αποτέλεσμα ισχύει για  $x = 0$ . Για  $x > 0$  θέτουμε  $t_n = n/x$ , οπότε  $t_n \rightarrow +\infty$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ . Έτσι γράφοντας

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = \left[\left(1 + \frac{1}{t_n}\right)^{t_n}\right]^x$$

από τη συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης και το αποτέλεσμα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

παίρνοντας το όριο  $n \rightarrow \infty$  έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = \left[\lim_{t_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t_n}\right)^{t_n}\right]^x = e^x.$$

## Παράδειγμα 11 (συνέχεια)

Για  $x < 0$  θέτουμε  $x = -t$ , με  $t > 0$  και γράφουμε για  $n > t$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \left(\frac{n-t}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{n-t}\right)^n} = \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{t}{n-t}\right)^{\frac{n-t}{t}}\right]^t} \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{n-t}\right)^t}.$$

Συνεπώς θέτοντας  $t_n = n/t - 1$  έχουμε

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{t_n}\right)^{t_n}\right]^x \left(1 + \frac{1}{t_n}\right)^x.$$

Επειδή  $t_n \rightarrow +\infty$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ , όπως στο προηγούμενο βήμα έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\lim_{t_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t_n}\right)^{t_n}\right]^x \left[\lim_{t_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t_n}\right)\right]^x = e^x.$$

## Παράδειγμα 12 (3ο χαρακτηριστικό όριο)

Δείχνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

**Βήμα 1.** Αποδεικνύουμε ότι

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}, \quad 0 \leq x < 1. \quad (1)$$

Η ανισότητα ισχύει ως ισότητα για  $x = 0$ , οπότε ας υποθέσουμε ότι  $0 < x < 1$ .

Από την ανισότητα Bernoulli, έχουμε

$$1 + x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

και από το δυωνυμικό Θεώρημα

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{x^k}{n^k} \leq 1 + \sum_{k=1}^n x^k \leq \frac{1}{1-x}.$$

### Παράδειγμα 13 (συνέχεια)

Έτσι για κάθε φυσικό αριθμό  $n$  και για  $0 \leq x < 1$  έχουμε

$$1 + x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{1}{1-x}$$

και η (1) προκύπτει παίρνοντας το όριο  $n \rightarrow \infty$ .

**Βήμα 2.** Από την (1) έπεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1. \quad (2)$$

**Βήμα 3.** Από την (1) παίρνουμε

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{1-x} \Rightarrow 1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x}$$

για  $0 < x < 1$ , επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

## Παράδειγμα 14 (συνέχεια)

Αν τώρα  $-1 < x < 0$ , θέτοντας  $y = -x$  έχουμε

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^{-y} - 1}{-y} = e^{-y} \frac{1 - e^y}{-y} = \frac{1}{e^y} \frac{e^y - 1}{y}, \quad 0 < y < 1,$$

οπότε από την (2) και την ύπαρξη του από τα δεξιά πλευρικού ορίου έπεται ότι και το από τα αριστερά πλευρικό όριο υπάρχει και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^y} \frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

Συνεπώς ο ισχυρισμός για την ύπαρξη και την τιμή του ορίου επιβεβαιώνεται.

**Σημειώνουμε** ότι από την (2) και τις ιδιότητες των ορίων έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^y} = \frac{1}{1} = 1$$

όπου θέσαμε  $y = -x$ . Έτσι τελικά συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1.$$

**Θεώρημα 7 (Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής)**

Έστω ότι η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[a, b]$  και  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$ . Εάν το  $C$  είναι μεταξύ  $A$  και  $B$ , τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα  $c \in [a, b]$  ώστε  $f(c) = C$ .  
Ειδικά αν  $f(a)f(b) < 0$ , τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (a, b)$  ώστε  $f(\xi) = 0$ .

**Θεώρημα 8 (Θεώρημα του σταθερού σημείου)**

Εάν η  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  είναι συνεχής τότε υπάρχει  $x_0 \in [0, 1]$  ώστε  $f(x_0) = x_0$ .

**Θεώρημα 9**

Έστω ότι η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[a, b]$ . Τότε η  $f$  παίρνει την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της στο διάστημα αυτό, δηλαδή υπάρχουν σημεία  $x_1$  και  $x_2$  στο  $[a, b]$  ώστε  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$  για κάθε  $x \in [a, b]$ . Γράφουμε

$$f(x_1) = \min_{a \leq x \leq b} f(x), \quad f(x_2) = \max_{a \leq x \leq b} f(x).$$

## Πόρισμα 2

Έστω ότι η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[a, b]$  και  $f(a)f(b) < 0$ . Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (a, b)$  ώστε  $f(\xi) = 0$ .

**Η μέθοδος της διχοτόμησης.** Δείχνουμε πως το αποτέλεσμα ύπαρξης ρίζας μιας εξίσωσης  $f(x) = 0$  μπορεί να δώσει και τρόπο προσέγγισης της ρίζας. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[a, b]$  και ότι  $f(a)f(b) < 0$ .

1. Θέτουμε  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  και  $c_0 = (a_0 + b_0)/2$ . Αν  $f(c_0) = 0$  η ρίζα εντοπίστηκε. Αν  $f(c_0) \neq 0$  τότε  $f(a_0)f(c_0) < 0$ , ή  $f(c_0)f(b_0) < 0$ , διαφορετικά οι  $f(a_0), f(c_0), f(b_0)$  θα ήταν ομόσημοι πράγμα άτοπο από την υπόθεση. Ας υποθέσουμε ότι  $f(a_0)f(c_0) < 0$ .
2. Θέτουμε  $a_1 = a_0$ ,  $b_1 = c_0$  και  $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ . Αν  $f(c_1) = 0$  η ρίζα εντοπίστηκε. Αν  $f(c_1) \neq 0$  τότε  $f(a_1)f(c_1) < 0$ , ή  $f(c_1)f(b_1) < 0$ , διαφορετικά οι  $f(a_1), f(c_1), f(b_1)$  θα ήταν ομόσημοι πράγμα άτοπο από την υπόθεση. Ας υποθέσουμε ότι  $f(c_1)f(b_1) < 0$ .
3. Θέτουμε  $a_2 = c_1$ ,  $b_2 = b_1$  και  $c_2 = (a_2 + b_2)/2$  και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

Έτσι προκύπτουν

- Ⓐ Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών  $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ , με  $a < c_n < b$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και
- Ⓑ Μια ακολουθία διαστημάτων  $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ , με  $I_n = [a_n, b_n]$ , όπου ένα από τα άκρα είναι το  $c_{n-1}$ , για τα οποία ισχύει ότι  $I_n \subset I_{n+1}$  και επιπλέον αν με  $|I_n|$  συμβολίσουμε το μήκος του  $I_n$ , τότε

$$|I_n| = \frac{1}{2} |I_{n-1}| = \frac{1}{2^n} (b - a).$$

Παρατηρούμε ότι αν  $\xi$  είναι η ρίζα που περιέχεται σε κάθε  $I_n$  τότε για  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $N$  ώστε

$$|\xi - c_n| < \frac{1}{2^n} (b - a) < \frac{1}{2^N} (b - a) < \epsilon \quad (3)$$

για  $n > N$ , κατά συνέπεια η ακολουθία  $(c_n)_{n=1}^{\infty}$  συγκλίνει στη ρίζα  $\xi$  της  $f(x) = 0$ . Επιπλέον η (3) παρέχει το σφάλμα της προσέγγισης της ρίζας.

## Παράδειγμα 15

Για τη συνάρτηση  $f(x) = x^2$ , με  $x \in (0, 1)$  δείξτε ότι για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε

$$\text{αν } |x_1 - x_2| < \delta, \text{ τότε } |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \quad (4)$$

για κάθε  $x_1, x_2$  στο  $(0, 1)$ .

Αν  $x_1$  και  $x_2$  είναι σημεία του  $(0, 1)$  έχουμε

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| \leq 2|x_1 - x_2| \quad (5)$$

έτσι για δοσμένο  $\epsilon > 0$  επιλέγοντας  $\delta = \epsilon/2$  η (4) έπεται από την (5).

## Ορισμός 8

Θα λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι **ομοιόμορφα συνεχής** σε κάποιο διάστημα  $I$  αν για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  (το οποίο εξαρτάται μόνο από το  $\epsilon$ ), ώστε

$$\text{αν } |x_1 - x_2| < \delta, \text{ τότε } |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \quad \forall x_1, x_2 \in I.$$

## Παράδειγμα 16

Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f(x) = 1/x$  είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $(a, +\infty)$ , όπου  $a > 0$ .

Αν  $x_1 > a$  και  $x_2 > a$ , βρίσκουμε

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{a^2},$$

αφού  $x_1 x_2 > a^2$ . Έτσι για  $\epsilon > 0$  και  $\delta = a^2 \epsilon$  έπεται ότι αν  $|x_1 - x_2| < \delta$ , τότε

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{a^2} < \frac{\delta}{a^2} = \epsilon,$$

κατά συνέπεια η συνάρτηση  $1/x$  είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα  $(a, +\infty)$ . Σημειώνουμε ότι η  $1/x$  είναι, επίσης, ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα  $[a, +\infty)$ .

## Άσκηση 1

Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f(x) = 1/x$  δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $(0, 1)$ .

## Πρόταση 2

Έστω  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνεχής συνάρτηση, όπου  $I$  είναι ένα διάστημα στο  $\mathbb{R}$ . Εάν  $[a, b] \subset I$ , τότε η  $f$  είναι ομοιόμορφα συνεχής στο  $[a, b]$ . Διαφορετικά, μια συνάρτηση ορισμένη και συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα αυτό.

Εάν το  $I$  είναι διάστημα και  $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $k = 1, 2, \dots, n$  είναι συνεχείς συναρτήσεις η συνάρτηση  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  που ορίζεται με τη σχέση

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

λέγεται **καμπύλη**. Αν  $n = 2$  έχουμε μια καμπύλη στο επίπεδο, ενώ αν  $n = 3$  έχουμε καμπύλη στο χώρο.

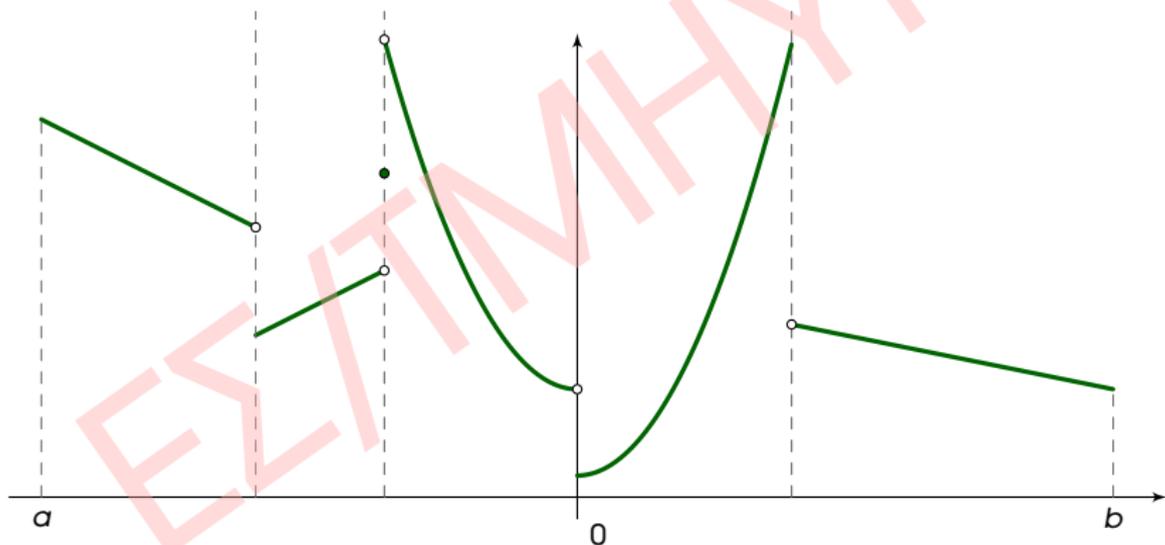
Αν η  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  είναι μια συνεχής συνάρτηση, παρατηρούμε ότι το γράφημα της  $f$ ,  $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in I\}$ , είναι το πεδίο τιμών μια ειδικής περίπτωσης επίπεδης καμπύλης της

$$\gamma_f(x) = (x, f(x)), \quad x \in I,$$

αφού η ταυτοτική συνάρτηση  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $\tau(x) = x$  είναι συνεχής στο  $I$ . Πολλές φορές, καταχρηστικά, λέμε καμπύλη την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , δηλαδή το γεωμετρικό αντικείμενο το οποίο είναι η αποτύπωση του γραφήματος της  $f$ . Για καμπύλες θα μιλήσουμε αναλυτικότερα σε επόμενα κεφάλαια.

## Ορισμός 9

Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται **τμηματικά συνεχής** στο διάστημα  $[a, b]$  εάν το διάστημα μπορεί να χωριστεί σε υποδιαστήματα σε καθένα από τα οποία η  $f$  είναι συνεχής και τα πλευρικά όρια στα άκρα των υποδιαστημάτων υπάρχουν.



Είναι η  $f(x) = \tan x$  τμηματικά συνεχής στο  $[0, \pi]$ ;