ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Διάλεξη 3

Οι φυσικοί αριθμοί, Μαθηματική επαγωγή
Σύνολα

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

5 Μαρτίου 2025

Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ ορίζεται μοναδικά από τα αξιώματα του Peano (1858–1932).

- **Αξίωμα 1** Ο 1 είναι φυσικός αριθμός.
- **Αξίωμα 2** Για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει μοναδικός επόμενος φυσικός αριθμός n^+.
- **Αξίωμα 3** Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός n με $n^+ = 1$.
- **Αξίωμα 4** Εάν m και n είναι φυσικοί αριθμοί με $m^+ = n^+$, τότε $m = n$.
- **Αξίωμα 5** Εάν A είναι ένα σύνολο φυσικών αριθμών με τις ιδιότητες: (i) $1 \in A$ και (ii) για κάθε $n \in A$, ο $n^+ \in A$, τότε $A = \mathbb{N}$.

Ορίζουμε $1^+ = 2$, $2^+ = 3$, $3^+ = 4$, και τα λοιπά, οπότε $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Θεώρημα 1 (Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής)

Έστω $p(n)$ να είναι μία πρόταση που διατυπώνεται για τον τυχαίο φυσικό αριθμό n, και είναι τέτοια ώστε:

(1) *Η $p(1)$ είναι αληθής*

(2) *Για κάθε φυσικό αριθμό k όταν η $p(k)$ είναι αληθής, τότε και η $p(k^+)$ είναι αληθής.*

Τότε η πρόταση $p(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού ότι η $p(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ακολουθούμε τα βήματα:

(B$_1$) Αποδεικνύουμε ότι η $p(1)$ είναι αληθής.

(B$_2$) Υποθέτουμε ότι η $p(k)$ είναι αληθής και δείχνουμε ότι η $p(k+1)$ είναι αληθής.

Παράδειγμα 1

Να δειχθεί ότι το άθροισμα των n πρώτων φυσικών αριθμών $1, 2, \ldots, n$ ισούται με $n(n+1)/2$, δηλαδή

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

(B$_1$) Για $n = 1$ η (1) γίνεται

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

που ισχύει. Άρα η (1) είναι αληθής για $n = 1$.

(B$_2$) Υποθέτουμε ότι για κάποιο φυσικό k είναι

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \tag{2}$$

και αποδεικνύουμε ότι

$$1+2+3+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}. \qquad (3)$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+(k+1) &= 1+2+3+\cdots+k+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \qquad \text{(από την υπόθεση (2))} \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

που είναι η (3).

Συμπέρασμα: Σύμφωνα λοιπόν με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής η (1) είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Εάν A είναι ένα σύνολο που περιέχει ένα πεπερασμένο αριθμό στοιχείων με $|A|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του. Εάν $|A| = n$ μπορούμε να γράφουμε $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Παρατηρούμε ότι εάν A και B είναι πεπερασμένα σύνολα τότε $|A \cup B| \leq |A| + |B|$, συγκεκριμμένα $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Παράδειγμα 2

Έστω ότι A είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και έστω $\mathscr{P}(A)$ το δυναμοσύνολο του A. Εάν $|A| = n$, τότε $|\mathscr{P}(A)| = 2^n$, όπου $n \in \mathbb{N}$.

(B$_1$) Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό για $n = 1$. Έστω A ένα σύνολο με ένα στοιχείο, δηλαδή έστω $A = A_1 = \{a_1\}$. Τότε $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, A\}$, οπότε

$$|\mathscr{P}(A)| = 2 = 2^1.$$

(B$_2$) Δεχόμαστε ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός για $n = k$, υποθέτουμε δηλαδή ότι εάν $|A| = k$ τότε $|\mathscr{P}(A)| = 2^k$. Με αυτή την υπόθεση αποδεικνύουμε ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός για $n = k + 1$, δηλαδή εάν A είναι ένα σύνολο με $k + 1$ στοιχεία τότε $|\mathscr{P}(A)| = 2^{k+1}$. Έστω λοιπόν ότι

$$A = A_{k+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}$$

Τότε όμως

$$A = A_k \cup \{a_{k+1}\}, \qquad \text{όπου} \qquad A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

Έτσι θα έχουμε

$$\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(A_k) \cup \{B \cup \{a_{k+1}\} : B \in \mathscr{P}(A_k)\}$$

(γιατί;). Αρα

$$|\mathscr{P}(A)| = |\mathscr{P}(A_k)| + |\mathscr{P}(A_k)| = 2^k + 2^k = 2^{k+1},$$

που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

Έτσι ο ισχυρισμός είναι σωστός για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε εδώ ότι εάν $A = \varnothing$, τότε $|A| = 0$, και $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing\}$, οπότε $|\mathscr{P}(A)| = 1 = 2^0$, δηλαδή η πρόταση: Εάν $|A| = n$, τότε $\mathscr{P}(A)| = 2^n$ είναι αληθής για $n = 0, 1, 2, \ldots$. Αρκετές φορές γράφουμε

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}. \tag{4}$$

Παράδειγμα 3 (Η ανισότητα του Bernoulli)

Εάν $a \geq -1$, να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$(1+a)^n \geq 1+na. \tag{5}$$

Παρατηρούμε ότι για $a=-1$ η ανισότητα ισχύει τετριμμένα αφού $0 \geq 1-n$.

(B_1) Αποδεικνύουμε ότι η ανισότητα ισχύει για $n=1$. Πραγματικά

$$(1+a)^1 = 1+a,$$

άρα η (5) ιχύει σαν ισότητα.

(B_2) Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η (5) ισχύει για $n=k$, δηλαδή

$$(1+a)^k \geq 1+ka$$

και αποδεικνύουμε ότι ισχύει και για $n=k+1$, δηλαδή

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a.$$

Θα έχουμε

$$\begin{aligned}
(1+a)^{k+1} &= (1+a)(1+a)^k \\
&\geq (1+a)(1+ka) && (\text{από την υπόθεση, αφού } 1+a \geq 0) \\
&= 1 + ka + a + ka^2 \\
&= 1 + (k+1)a + ka^2 \\
&\geq 1 + (k+1)a && (ka^2 \geq 0)
\end{aligned}$$

που είναι η ανισότητα που θέλουμε.
Άρα η (5) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 1

Εάν $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε τον αριθμό ***n* παραγοντικό**, $n!$ με τη σχέση

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Έτσι $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, κοκ. Ορίζουμε επίσης $0! = 1$. Για κάθε $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ και $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ορίζουμε τον **δυωνυμικό συντελεστή** n ανά k με τη σχέση

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ιδιότητες των δυωνυμικών συντελεστών

Εάν $n = 0, 1, 2, \ldots$ και $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, τότε ισχύουν οι ταυτότητες

1. $\displaystyle \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$
2. $\displaystyle \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$

Θεώρημα 2 (Το Δυωνυμικό Θεώρημα)

Εάν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί τότε

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \qquad (6)$$

για κάθε φυσικό αριθμό n.

Από την (6) για $a = b = 1$ έπεται ότι

Πόρισμα 1

Εάν n είναι φυσικός αριθμός, τότε

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n. \qquad (7)$$

- Η έννοια του **συνόλου** (set) είναι αρχική και δεν επιδέχεται ορισμού. Ωστόσο λέγοντας σύνολο εννοούμε μια συλλογή διακεκριμμένων αντικειμένων που αποτελούν ολότητα. Έτσι για παράδειγμα μπορούμε να μιλάμε για το σύνολο των κορυφών ενός πολυγώνου, το σύνολο των σημείων ενός ευθυγράμμου τμήματος, το σύνολο των λέξεων στον πρώτο στίχο της Ιλιάδας.

- Τα σύνολα τα συμβολίζουμε, συνήθως, με κεφαλαία γράμματα $A, B, \ldots$. Ένα αντικείμενο που ανήκει στο σύνολο A λέγεται **στοιχείο** ή **σημείο** του A. Τα στοιχεία συνόλων τα συμβολίζουμε με μικρά γράμματα. Εάν το x είναι στοιχείο του A γράφουμε $x \in A$ και λέμε ότι το x **ανήκει** στο A ή ότι το x είναι στοιχείο του A. Εάν το x δεν είναι στοιχείο του A γράφουμε $x \notin A$.

- Εάν A και B είναι δύο σύνολα θα λέμε ότι το A είναι **υποσύνολο** (subset) του B και γράφουμε $A \subseteq B$ ή $B \supseteq A$ εάν κάθε στοιχείο του A περιέχεται στο σύνολο B. Παρατηρούμε ότι για κάθε σύνολο A ισχύει $A \subseteq A$. Μερικές φορές θέλοντας να δηλώσουμε ότι το A είναι **γνήσιο υποσύνολο** του B, υπάρχει δηλαδή στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A γράφουμε $A \subsetneq B$.

- Λέμε ότι δύο σύνολα A και B είναι **ίσα** και γράφουμε $A = B$ εάν περιέχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Εάν τα A και B δεν είναι ίσα γράφουμε $A \neq B$.

Θεώρημα 3

Έστω A και B να είναι δύο σύνολα. Εάν $A = B$ τότε $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή εάν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A = B$.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι $A = B$ και δείχνουμε ότι $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Έστω $x \in A$ τότε $x \in B$, γιατί $A = B$, άρα $A \subseteq B$. Όμοια εάν $x \in B$ τότε $x \in A$, άρα $B \subseteq A$. Υποθέτουμε τώρα ότι $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και κάθε στοιχείο του B είναι και του A. Άρα $A = B$. $\square$

Ένα σύνολο μπορεί να δηλωθεί με **αναγραφή** των στοιχείων του, για παράδειγμα εάν A είναι το σύνολο των φωνηέντων του ελληνικού αλφαβήτου, τότε γράφουμε

$$A = \{\mathrm{α}, \mathrm{ε}, \mathrm{η}, \mathrm{ι}, \mathrm{ο}, \mathrm{υ}, \mathrm{ω}\},$$

ή με **περιγραφή** των στοιχείων του όπου για το ίδιο παράδειγμα θα έχουμε

$$A = \{x : x \text{ είναι φωνήεν του ελληνικού αλφαβήτου}\}.$$

Παράδειγμα 4

Εάν D είναι το σύνολο των λέξεων μήκους τρία που παράγονται με αλφάβητο το $\{0,1\}$, τότε

$$D = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}, \quad \text{ή}$$
$$D = \{xyz : x \in \{0,1\},\ y \in \{0,1\},\ z \in \{0,1\}\}$$
$$\text{πλήθος στοιχείων του } D = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} = 2^3.$$

• Το σύνολο που περιέχει κανένα στοιχείο λέγεται **κενό σύνολο** (empty set ή null set) και συμβολίζεται με $\varnothing$. Σημειώνουμε ότι εάν A είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο τότε $\varnothing \subseteq A$ γιατί κάθε στοιχείο του $\varnothing$ περιέχεται στο A, ισοδύναμα δεν υπάρχει στοιχείο του $\varnothing$ που να μη περιέχεται στο A.

• Σε αρκετές περιπτώσεις τα σύνολα που χρησιμοποιούμε είναι ή θεωρούνται υποσύνολα ενός και του αυτού συνόλου το οποίο θα ονομάζουμε **βασικό σύνολο**, ή **σύμπαν** (universe). Συνήθως το συμβολίζουμε με Ω. Παρατηρούμε ότι για κάθε υποσύνολο A του Ω έχουμε $\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$.

Πράξεις μεταξύ συνόλων

Έστω A και B υποσύνολα του Ω.

1. Η **ένωση** (union) των A και B είναι το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα A και B. Συμβολίζεται με $A \cup B$, έτσι

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}. \tag{8}$$

2. Η **τομή** (intersection) των A και B είναι το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν και στα δύο σύνολα A και B. Συμβολίζεται με $A \cap B$, έτσι

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}. \tag{9}$$

3. Η **διαφορά** (difference) του A από το B είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του A που δεν ανήκουν στο B. Συμβολίζεται με $A \smallsetminus B$, έτσι

$$A \smallsetminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}. \tag{10}$$

Παρατηρούμε ότι $A \cup B = B \cup A$ και $A \cap B = B \cap A$, ενώ $A \smallsetminus B \neq B \smallsetminus A$. Εάν $A \cap B = \varnothing$ τότε τα σύνολα A και B λέγονται **ξένα μεταξύ τους** ή **διαζευγμένα**.

(4) Το **συμπλήρωμα** (complement) ενός συνόλου A ως προς το σύμπαν Ω είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο A. Συμβολίζεται με A^c, έτσι

$$A^c = \{x : x \in \Omega \text{ και } x \notin A\}. \tag{11}$$

Συγκρίνοντας με την (10) βλέπουμε ότι

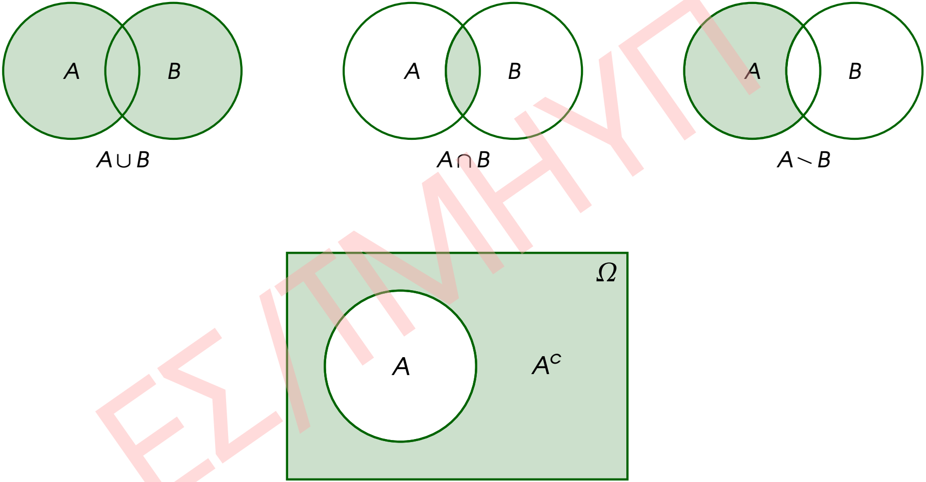
$$A^c = \Omega \setminus A. \tag{12}$$

Επιπλέον ισχύουν οι νόμοι

$$A \cup A^c = \Omega, \qquad A \cap A^c = \varnothing, \qquad (A^c)^c = A. \tag{13}$$

Από την (10) επίσης έχουμε

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\} = \{x : x \in A \text{ και } x \in B^c\} = A \cap B^c. \tag{14}$$



Σχήμα: Η ένωση $A \cup B$, η τομή $A \cap B$, η διαφορά $A \setminus B$ και το συμπλήρωμα συνόλου.

Ιδιότητες και συνέπειες των πράξεων

Εάν A, B, C είναι σύνολα, υποσύνολα του Ω, τότε ισχύουν οι ιδιότητες/νόμοι:

$$A \cup \varnothing = A, \qquad A \cap \varnothing = \varnothing, \qquad A \setminus \varnothing = A, \tag{15}$$

$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A, \qquad A \setminus A = \varnothing. \tag{16}$$

Αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A. \tag{17}$$

Προσεταιριστική ιδιότητα:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \tag{18}$$

Επιμεριστική ιδιότητα:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \tag{19}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{20}$$

Νόμοι του De Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c. \tag{21}$$

Ορισμός 2

Το **καρτεσιανό γινόμενο** (cartesian product) των μη κενών συνόλων A και B είναι το σύνολο όλων των στοιχείων της μορφής (a,b) όπου $a \in A$ και $b \in B$. Συμβολίζεται με $A \times B$, έτσι

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ και } b \in B\}. \tag{22}$$

Το στοιχείο (a,b) λέγεται **διατεταγμένο ζεύγος** με πρώτο στοιχείο το a και δεύτερο το b.

Η ισότητα στο καρτεσιανό γινόμενο ορίζεται με τη σχέση

$$(a,b) = (a',b') \quad \text{εάν και μόνον εάν } a = a' \text{ και } b = b'. \tag{23}$$

Κατά συνέπεια $(a,b) \neq (b,a)$ εκτός εάν $a = b$. Εν γένει $A \times B \neq B \times A$. Εάν $A = B$ γράφουμε $A \times A = A^2$.

Ορισμός 3

Εάν A είναι ένα σύνολο με $\mathscr{P}(A)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A. Έτσι

$$\mathscr{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}. \tag{24}$$

Το σύνολο $\mathscr{P}(A)$ λέγεται **δυναμοσύνολο** (power set) του A.

Βλέπουμε αμέσως ότι $\varnothing \in \mathscr{P}(A)$ και $A \in \mathscr{P}(A)$. Τονίζουμε ότι τα στοιχεία του δυναμοσυνόλου είναι σύνολα.

Παράδειγμα 5

Εάν $A = \{0, 1, 2\}$, τότε

$$\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

Αποδεικνύεται ότι εάν το A αποτελείται από n στοιχεία τότε το $\mathscr{P}(A)$ περιέχει 2^n στοιχεία.

Παρατήρηση 1

Εάν A είναι ένα τυχαίο σύνολο τότε ισχύουν τα παρακάτω

$$\varnothing \neq \{\varnothing\}, \quad \varnothing \subseteq A, \quad \varnothing \subseteq \mathscr{P}(A), \quad \varnothing \in \mathscr{P}(A), \quad \{\varnothing\} \subseteq \mathscr{P}(A).$$

Να δοθεί παράδειγμα συνόλου A τέτοιου ώστε $\varnothing \in A$.

Παρατήρηση 2 (Γενικεύσεις)

Ας θεωρήσουμε την οικογένεια συνόλων $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, τότε ορίζουμε

$$\begin{aligned}\bigcup_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \\ &= \{x : x \in A_k \text{ για ένα τουλάχιστον } k \in \{1, 2, \dots, n\}\} \\ \bigcap_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \\ &= \{x : x \in A_k \text{ για κάθε } k \in \{1, 2, \dots, n\}\}\end{aligned}$$