

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

2η Διάλεξη

Το σώμα των μιγαδικών αριθμών

Το μιγαδικό επίπεδο

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις, η εκθετική συνάρτηση

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

24 Φεβρουαρίου 2025

Οι μιγαδικοί αριθμοί

Η εξίσωση

$$x^2 + 1 = 0$$

δεν έχει λύση στους πραγματικούς αριθμούς αφού για κάθε πραγματικό αριθμό x είναι $x^2 \geq 0$. Διατυπώνεται λοιπόν το ερώτημα κατά πόσον υπάρχει ένα σύστημα αριθμών που κατά κάποια έννοια επεκτείνει τους πραγματικούς αριθμούς και είναι τέτοιο ώστε η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ να έχει λύση. Αποδεικνύεται ότι ένα τέτοιο σύστημα υπάρχει και αυτό είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών. Σε αυτό το σύστημα οι λύσεις της $x^2 + 1 = 0$ δεν θα μπορούσαν να είναι άλλες από τις

$$x = \sqrt{-1}, \quad \text{και} \quad x = -\sqrt{-1}.$$

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Στο σύνολο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, όπου

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \text{και} \quad y_1 = y_2,$$

με τη γνωστή πρόσθεση

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (1)$$

ορίζουμε την πράξη του πολλαπλασιασμού με τη σχέση

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι για $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y) \quad (3)$$

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0) \quad (4)$$

$$(x, y)(1, 0) = (x, y), \quad (5)$$

δηλαδή το $(0,0)$ είναι το **ουδέτερο** στοιχείο της πρόσθεσης, δηλαδή το μηδέν, το $(-x, -y)$ είναι το **αντίθετο** του (x, y) , ενώ το $(1,0)$ είναι **ουδέτερο** στοιχείο του πολλαπλασιασμού, δηλαδή η μονάδα. Εξετάζοντας εάν υπάρχει το αντίστροφο του (x, y) , δηλαδή εκείνο το (x', y') για το οποίο

$$(x, y)(x', y') = (1, 0)$$

και παρατηρώντας ότι

$$(0,0)(x', y') = (0,0) \quad (6)$$

υποθέτουμε ότι $(x, y) \neq (0,0)$. Εάν (a, b) είναι το αντίστροφο στοιχείο του (x, y) , εάν αυτό υπάρχει, τότε θα πρέπει

$$(x, y)(a, b) = (xa - yb, xb + ya) = (1, 0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Λύνοντας αυτό το σύστημα $xa - yb = 1$ και $xb + ya = 0$ βρίσκουμε

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad b = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Οι αριθμοί a και b υπάρχουν, καθότι $x^2 + y^2 > 0$ οποτεδήποτε $(x, y) \neq (0, 0)$, επομένως το αντίστροφο του (x, y) το οποίο συμβολίζουμε με $(x, y)^{-1}$ είναι το

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right). \quad (7)$$

Ορισμός 1

Το σύνολο των σημείων

$$z = (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

εφοδιασμένο με τις πράξεις (1) και (2) συμβολίζουμε με \mathbb{C} και τα στοιχεία του καλούμε *μιγαδικούς αριθμούς* (complex numbers).

Έτσι οι μιγαδικοί αριθμοί είναι τα σημεία του επιπέδου, \mathbb{R}^2 , στο οποίο έχουμε ορίσει επιπλέον της πρόσθεσης, μια δεύτερη πράξη, τον πολλαπλασιασμό.

Το σώμα των μιγαδικών αριθμών

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι το \mathbb{C} είναι σώμα, ικανοποιούνται δηλαδή οι νόμοι

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, για κάθε z_1, z_2 στο \mathbb{C} .
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, για κάθε z_1, z_2, z_3 στο \mathbb{C} .
3. Υπάρχει ο μοναδικός μιγαδικός αριθμός $\mathbf{0} = (0, 0)$, έτσι ώστε $z + \mathbf{0} = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
4. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός $-z$, έτσι ώστε $z + (-z) = \mathbf{0}$.
5. $z_1 z_2 = z_2 z_1$, για κάθε z_1, z_2 στο \mathbb{C} .
6. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$, για κάθε z_1, z_2, z_3 στο \mathbb{C} .
7. Υπάρχει ο μοναδικός μιγαδικός αριθμός $\mathbf{1} = (1, 0)$, έτσι ώστε $z \cdot \mathbf{1} = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
8. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$ υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός z^{-1} έτσι ώστε $z \cdot z^{-1} = \mathbf{1}$.
9. $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$, για κάθε z_1, z_2, z_3 στο \mathbb{C} .

Απόρροια των πράξεων (1) και (2) είναι ότι

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

$$(0, 1)(y, 0) = (0, y)$$

έτσι κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0). \quad (8)$$

Εάν x είναι ένας πραγματικός αριθμός, σημείο της ευθείας, τότε μπορεί να ταυτοποιηθεί με το $(x, 0)$, σημείο του επιπέδου. Επιπλέον παρατηρούμε ότι

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \quad (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0),$$

δηλαδή το σώμα των μιγαδικών αριθμών επεκτείνει κατά φυσιολογικό τρόπο το σώμα των πραγματικών αριθμών, και υπό το πρίσμα της ταυτοποίησης $x \equiv (x, 0)$ μπορούμε να θεωρούμε ότι $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Στη συνέχεια θα γράφουμε 0 αντί για $\mathbf{0}$ και 1 αντί για $\mathbf{1}$. Θέτοντας $i = (0, 1)$ σύμφωνα με την παραπάνω ταυτοποίηση η (8) γράφεται

$$(x, y) = x + iy. \quad (9)$$

Ο μιγαδικός αριθμός i λέγεται **φανταστική μονάδα** (imaginary unit) για λόγους που θα γίνουν κατανοητοί παρακάτω. Εάν $z = (x, y)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $z = x + iy$. Εάν $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε το άθροισμα $z_1 + z_2$ και το γινόμενο $z_1 z_2$ δίνονται, μέσω των (1) και (2), από τις σχέσεις

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (10)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (11)$$

Όπως και στους πραγματικούς αριθμούς, επαγωγικά ορίζουμε $z^{n+1} = z^n z$, για κάθε φυσικό αριθμό n . Παρατηρούμε ότι

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

σύμφωνα με την ταυτοποίηση, γεγονός που δικαιολογεί την ονομασία φανταστική μονάδα. Επειδή $-i = (0, -1)$ θα είναι

$$(-i)^2 = (0, -1)(0, -1) = (-1, 0) = -1.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι $i^2 + 1 = 0$ και $(-i)^2 + 1 = 0$.

Παρατήρηση 1

Ας θεωρήσουμε τον μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$. Από τον αντιμεταθετικό νόμο (νόμος M5) έχουμε $iy = yi$ οπότε ο μπορούμε να γράφουμε

$$z = x + iy, \quad \text{ή} \quad z = x + yi.$$

Επίσης από την μοναδικότητα του αντίθετου μιγαδικού αριθμού έπεται ότι

$$i(-y) = (-1)iy = -iy.$$

Έτσι από τις (9), (4) και (7) έπεται ότι οι $-z$ και z^{-1} , εφόσον $z \neq 0$, δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$-z = -x + i(-y) = -x - iy \quad (12)$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} \quad (13)$$

Παρατήρηση 2

Έστω $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$, τότε κάνοντας χρήση του νόμου M9 (επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\
 &= x_1(x_2 + iy_2) + iy_1(x_2 + iy_2) && \text{(νόμος M9)} \\
 &= x_1 x_2 + x_1 iy_2 + iy_1 x_2 + iy_1 iy_2 && \text{(νόμος M9)} \\
 &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 && \text{(νόμος M5)} \\
 &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 - y_1 y_2 && (i^2 = -1) \\
 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) && \text{(νόμος M9)}
 \end{aligned}$$

που είναι η (11). Ο πολλαπλασιασμός δηλαδή, μιγαδικών αριθμών μπορεί να εκτελεσθεί με χρήση της οικείας, από τους πραγματικούς αριθμούς, επιμεριστικής ιδιότητας.

Παρατήρηση 3

Εάν $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$, είναι μιγαδικοί αριθμοί, όπως στους πραγματικούς αριθμούς, η αφαίρεση και το πηλίκο ορίζονται, αντίστοιχα, με τις σχέσεις

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 + iy_1) + (-x_2 + i(-y_2)) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad (14)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = (x_1 + iy_1) \left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (15)$$

Παρατηρούμε ότι για $z_1 = 1 = 1 + i0$ και $z_2 = z = x + iy$ από την τελευταία σχέση έπεται

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = z^{-1}. \quad (16)$$

Επακόλουθο της τελευταίας αυτής σχέσης είναι η

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}. \quad (17)$$

Ορισμός 2

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$, τότε $x \in \mathbb{R}$ και $y \in \mathbb{R}$. Ο x λέγεται **πραγματικό μέρος** (real part) του z και γράφουμε $x = \operatorname{Re} z$, και ο y λέγεται **φανταστικό μέρος** (imaginary part) του z και γράφουμε $y = \operatorname{Im} z$.

Έτσι εάν $z \in \mathbb{R}$ τότε $\operatorname{Re} z = z$ και $\operatorname{Im} z = 0$, ενώ εάν $z = iy$, με $y \in \mathbb{R}$, τότε $\operatorname{Re} z = 0$ και $\operatorname{Im} z = -iz$.

Ορισμός 3

Οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ είναι *ίσοι* και γράφουμε $z_1 = z_2$, εάν και μόνον εάν $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$, ισοδύναμα $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ και $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.

Ερώτημα: Υπάρχει στο \mathbb{C} μία διάταξη που να είναι συμβατή με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και να επεκτείνει τη γνωστή διάταξη του \mathbb{R} ;

Αν υπάρχει, έστω ' \leq ', τότε θα πρέπει είτε $0 \leq i$, είτε $0 \geq i$. Εάν $0 \leq i$, τότε πολλαπλασιάζοντας με i παίρνουμε $0i \leq i^2$, ή ισοδύναμα $0 \leq -1$, ή ισοδύναμα $0 \geq 1$ που είναι άτοπο. Όμοια εάν $0 \geq i$ τότε πολλαπλασιάζοντας πάλι με i θα είχαμε $0i \leq i^2$, ή ισοδύναμα $0 \leq -1$, ή ισοδύναμα $0 \geq 1$ που είναι επίσης άτοπο.

Ορισμός 4

Έστω $z = x + iy$ ένας μιγαδικός αριθμός.

- ❶ **Το μέτρο** (modulus) του z , συμβολίζεται με $|z|$, ορίζεται να είναι ο πραγματικός αριθμός

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (18)$$

- ❷ **Ο συζυγής** (conjugate) του z , συμβολίζεται με \bar{z} , ορίζεται να είναι ο μιγαδικός αριθμός

$$\bar{z} = x - iy. \quad (19)$$

Παρατηρούμε ότι αν $z \in \mathbb{R}$, ισοδύναμα $y = 0$, τότε

$$|z| = \sqrt{x^2} = |x| \quad (20)$$

δηλαδή το μέτρο μιγαδικού αριθμού γενικεύει την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού. Για το λόγο αυτό το μέτρο το λέμε και απόλυτη τιμή. Επιπλέον αν $z \in \mathbb{R}$, τότε $\bar{z} = z$.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το μέτρο και ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού $-i(2 - i3)$.

Εάν $z = -i(2 - i3)$, τότε $z = -i2 + 3i^2 = -3 - i2$, οπότε

$$|z| = |-i(2 - i3)| = |-3 - i2| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$\bar{z} = \overline{-i(2 - i3)} = \overline{-3 - i2} = -3 + i2.$$

Παρατήρηση 4

Εάν $z = x + iy$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε $x = \operatorname{Re}z$ και $y = \operatorname{Im}z$. Επειδή $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$, και $z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = i2y$, συμπεραίνουμε

$$\operatorname{Re}z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}z = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (21)$$

Επίσης $x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, όμοια $y \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, οπότε

$$\operatorname{Re}z \leq |\operatorname{Re}z| \leq |z|, \quad \operatorname{Im}z \leq |\operatorname{Im}z| \leq |z|. \quad (22)$$

Ιδιότητες του μέτρου και του συζυγούς μιγαδικού αριθμού:

- 1 $|z| \geq 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$, και $|z| = 0$ εάν και μόνον εάν $z = 0$.
- 2 $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 .
- 3 $|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$, για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 με $z_2 \neq 0$.
- 4 $z = \bar{z}$ εάν και μόνον εάν $z \in \mathbb{R}$.
- 5 $z = \overline{\bar{z}}$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
- 6 $|z| = |\bar{z}|$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
- 7 $|z|^2 = z\bar{z}$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
- 8 $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 .
- 9 $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 .
- 10 $\overline{(z_1 / z_2)} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$, για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 με $z_2 \neq 0$.

Άσκηση 1

Να δειχθεί ότι ο αριθμός a είναι πραγματικός εάν και μόνον εάν $\operatorname{Re} a = a$.

Παρατήρηση 5

Ας είναι z_1 , και z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί. Τότε ισχύει η **τριγωνική ανισότητα**

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (23)$$

Από τις ιδιότητες έχουμε

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) && \text{(ιδιότητες 7 και 8)} \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} + |z_2|^2 && \text{(ιδιότητες 7 και 5)} \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 && \text{(σχέση (21))} \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 && \text{(σχέση (22))} \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| + |z_2|^2 && \text{(ιδιότητα 2)} \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 && \text{(ιδιότητα 6)} \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται η ζητούμενη τριγωνική ανισότητα.

Άσκηση 2

Εάν $z \in \mathbb{C}$ δείξτε ότι

$$|z| \leq |\operatorname{Re}z| + |\operatorname{Im}z| \leq \sqrt{2}|z|.$$

Παρατήρηση 6

Από τις ιδιότητες έπεται ότι για $z \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (24)$$

που είναι ακριβώς η σχέση που δίνει τον αντίστροφο. Θυμίζουμε ότι αν $z = x + iy \neq 0$, τότε

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Για $|z| = 1$, από την (24) έπεται ότι $1/z = \bar{z}$. Ειδικά για $z = i$ έχουμε

$$\frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{i\bar{i}} = \frac{-i}{|i|^2} = -i. \quad (25)$$

Αν $z = x + iy \neq 0$, τότε $|z| > 0$, οπότε τα κλάσματα

$$\frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{και} \quad \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ορίζονται και ικανοποιούν τη σχέση

$$\left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|z|}\right)^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 1,$$

κατά συνέπεια υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\cos \theta = \frac{x}{|z|} \quad \text{και} \quad \sin \theta = \frac{y}{|z|}.$$

Ορισμός 5

Έστω $z \neq 0$, και έστω $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad \text{και} \quad \sin \theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Ορίζουμε ως **όρισμα** (argument) του z και γράφουμε $\arg z$ το σύνολο όλων των τιμών $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή

$$\arg z = \{\theta + 2k\pi : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Ορισμός 6

Ορίζουμε ως **κύριο** ή **πρωτεύον** (principal) όρισμα του z εκείνο το θ για το οποίο ισχύει $\theta \in (-\pi, \pi]$. Συμβολίζουμε με $\operatorname{Arg} z$ το κύριο όρισμα του z , οπότε για κάθε $z \neq 0$ στο \mathbb{C} είναι $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$.

Πολλοί συγγραφείς επιλέγουν ως κύριο όρισμα εκείνο το θ που περιέχεται στο διάστημα $[0, 2\pi)$, δηλαδή $0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το όρισμα και το κύριο όρισμα για κάθε έναν από τους αριθμούς

(i) $z = 1$, (ii) $z = -2$, (iii) $z = i$, (iv) $z = -1 - i$.

(i) Επειδή $z = x = |z| = 1$, είναι $\cos \theta = 1$, $\sin \theta = 0$, επομένως

$$\arg 1 = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{και} \quad \text{Arg} 1 = 0.$$

(ii) Εδώ είναι $x = -2$, $y = 0$ και $|z| = 2$, άρα $\cos \theta = -1$, $\sin \theta = 0$, επομένως

$$\arg(-2) = \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{και} \quad \text{Arg}(-2) = \pi.$$

(iii) Εδώ είναι $x = 0$, $y = 1$ και $|z| = 1$, άρα $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = 1$, επομένως

$$\arg i = \{\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{και} \quad \text{Arg} i = \pi/2.$$

(iv) Εδώ είναι $x = y = -1$ και $|z| = \sqrt{2}$, άρα $\cos \theta = \sin \theta = -1/\sqrt{2}$, άρα ένα όρισμα είναι $\theta = 5\pi/4$, και ένα άλλο το $\theta = -3\pi/4$, επομένως

$$\arg(-1 - i) = \{5\pi/4 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \{-3\pi/4 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{και}$$

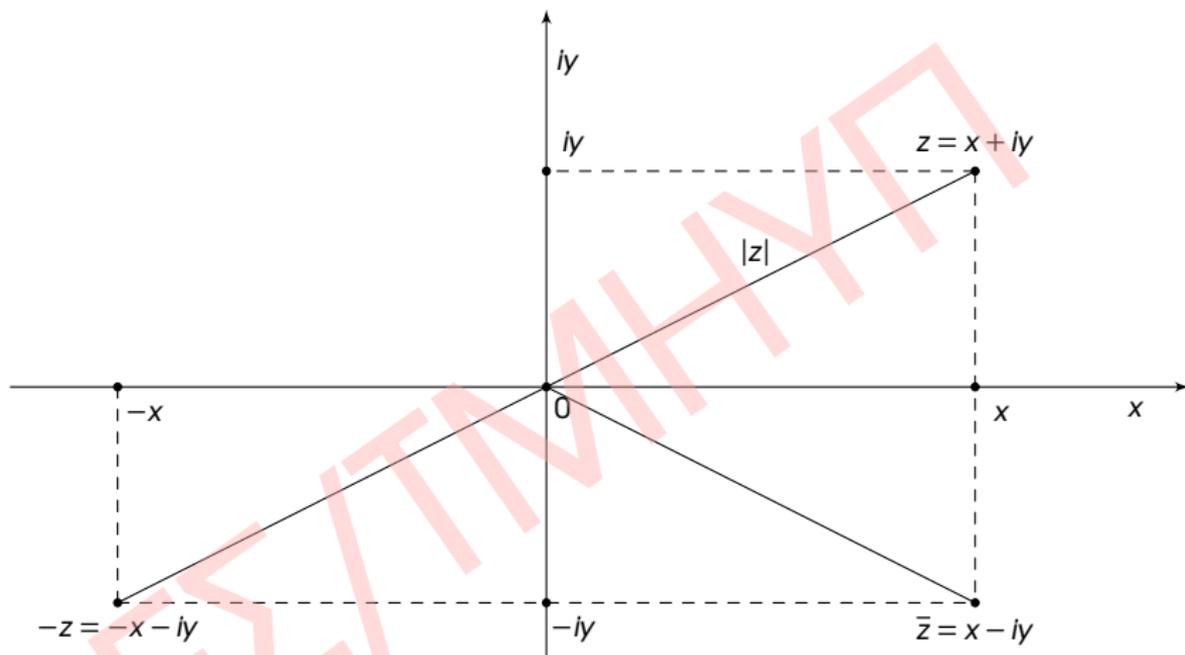
$$\text{Arg}(-1 - i) = -3\pi/4.$$

Σημειώνουμε ότι $5\pi/4 \notin (-\pi, \pi]$.

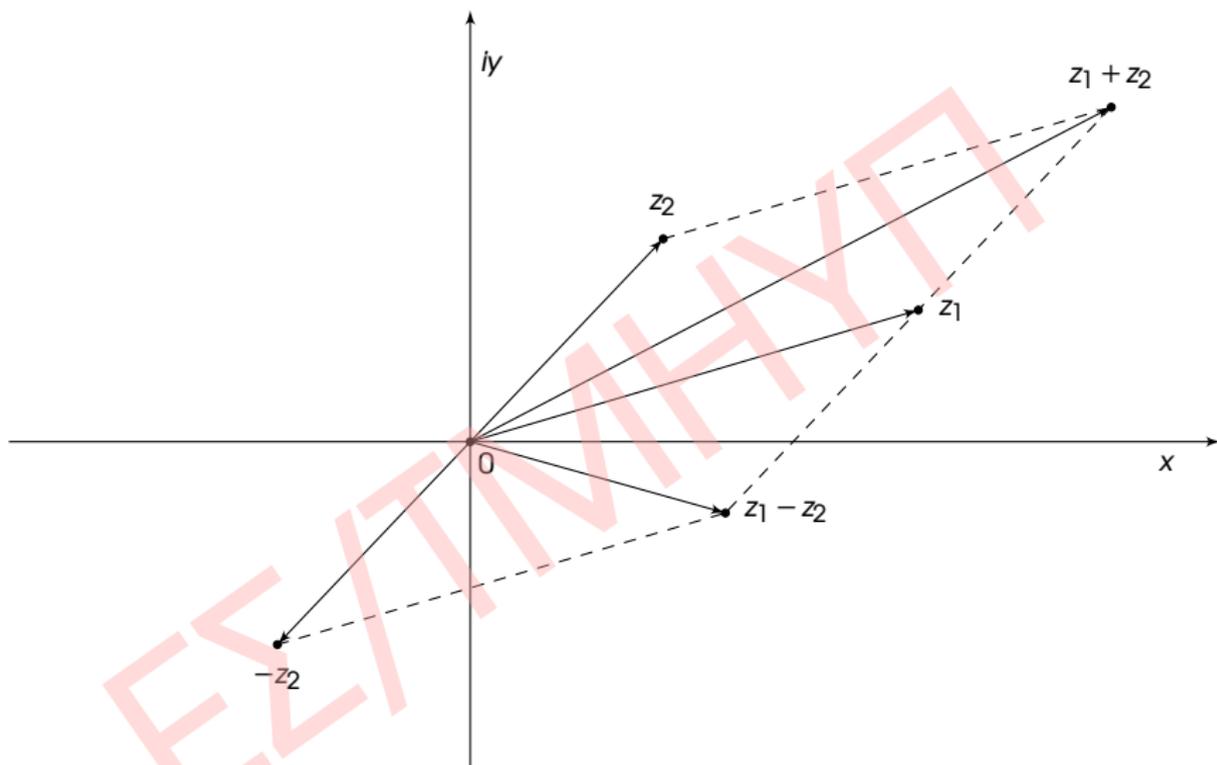
Το μιγαδικό επίπεδο

Από τον ορισμό των μιγαδικών αριθμών έπεται ότι υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ του μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ και του σημείου (x, y) του επιπέδου. Έτσι το επίπεδο του οποίου κάθε σημείο (x, y) ταυτίζουμε με τον μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$ ονομάζουμε **μιγαδικό επίπεδο** (complex plane).

- Ο άξονας των x λέγεται **πραγματικός άξονας** (real axis).
- Ο άξονας των y λέγεται **φανταστικός άξονας** (imaginary axis).
- Το μέτρο $|z|$ είναι η απόσταση του σημείου z από το 0 .
- Ο συζυγής \bar{z} του z είναι το συμμετρικό σημείο του z ως προς τον πραγματικό άξονα.



Σχήμα: Γραφική απεικόνιση των μιγαδικών αριθμών z , \bar{z} και $-z$.



Σχήμα: Το άθροισμα και η διαφορά μιγαδικών αριθμών.

Το άθροισμα των $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ αντιστοιχεί στο σημείο $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Έτσι λοιπόν ο αριθμός $z = x + iy$ μπορεί να ταυτιστεί με το διάνυσμα με αρχή το σημείο $(0, 0)$ και πέρας το (x, y) ενώ το μέτρο $|z|$ είναι το μέτρο του διανύσματος, δηλαδή το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος από το $(0, 0)$ στο (x, y) . Ο $z_1 + z_2$ είναι το διανυσματικό άθροισμα των διανυσμάτων z_1 και z_2 , και ο $z_1 - z_2$ είναι το διανυσματικό άθροισμα των διανυσμάτων z_1 και $-z_2$.

Οι αριθμοί z_1 και z_2 ορίζουν ένα παραλληλόγραφο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , και $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Τα $|z_1 + z_2|$ και $|z_1 - z_2|$ είναι τα μέτρα των διαγωνίων του παραλληλογράμου. Από την απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας (23) προκύπτει **ο νόμος του παραλληλογράμου**¹

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \quad (26)$$

ο οποίος μας λέει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων παραλληλογράμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του.

¹Ο νόμος αποδεικνύεται και με χρήση του νόμου του συνημιτόνου.

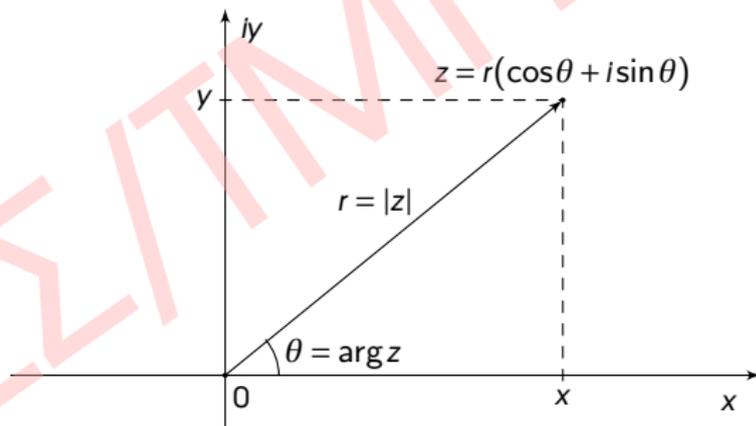
Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Εάν r και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες του σημείου $(x, y) \neq (0, 0)$ τότε

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta \quad \text{με} \quad |z| = \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = r.$$

Η **τριγωνομετρική μορφή** (trigonometric form) του z είναι η έκφραση

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (27)$$



Σχήμα: Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού.

Παράδειγμα 3

Να γραφούν σε τριγωνομετρική μορφή οι αριθμοί

(i) $z = 1 + i$, (ii) $z = 1$, (iii) $z = i$, (iv) $z = -2$.

(i) Επειδή $|1 + i| = \sqrt{2}$, έχουμε

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

(ii) $1 = 1 + i0 = \cos 0 + i \sin 0$.

(iii) $i = 0 + i = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)$.

(iv) $-2 = 2(-1 + i0) = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$.

Αν $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ και $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)], \end{aligned}$$

οπότε η τριγωνομετρική μορφή του γινομένου $z_1 z_2$ δίνεται από τη σχέση

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \quad (28)$$

Εάν $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ είναι μη μηδενικός αριθμός, ισοδύναμα $r \neq 0$, τότε από τη σχέση (28) έπεται ότι

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]. \quad (29)$$

Η σχέση αυτή προκύπτει επίσης από τον τύπο του αντίστροφου μιγαδικού αριθμού. Εάν τώρα $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ είναι διάφορος του μηδενός, τότε συνδυάζοντας τις (28) και (29) έχουμε

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (30)$$

Εάν $z_k = r_k(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ με μαθηματική επαγωγή μέσω της (28) έχουμε

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)], \quad (31)$$

ειδικά για $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, για κάθε φυσικό αριθμό n , προκύπτει

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]. \quad (32)$$

Εάν $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $r \neq 0$, από τις σχέσεις (29) και (32) έπεται ότι για $n = 1, 2, 3, \dots$

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{r^n} [\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)],$$

και επειδή $z^0 = 1$, τελικά η σχέση (32) ισχύει για κάθε ακέραιο $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Εάν $z = \cos \theta + i \sin \theta$ η (32) μετασχηματίζεται στην

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta). \quad (33)$$

Η τελευταία σχέση είναι ο **τύπος του de Moivre**.

Μία εφαρμογή του τύπου του de Moivre είναι η εύρεση ριζών μιγαδικών αριθμών.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Εάν w είναι ένας μιγαδικός αριθμός και $n \geq 2$ είναι ένας φυσικός αριθμός να βρεθούν μιγαδικοί z τέτοιοι ώστε $z^n = w$. Έστω ότι $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, τότε παρατηρούμε ότι ο αριθμός $z_0 = r^{1/n}(\cos(\theta/n) + i \sin(\theta/n))$ ικανοποιεί την

$$z_0^n = \left[\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right) \right]^n = r(\cos \theta + i \sin \theta) = w,$$

δηλαδή ο z_0 είναι μία λύση του προβλήματος.

Οι $z_k = r^{1/n}(\cos[(\theta+2k\pi)/n] + i\sin[(\theta+2k\pi)/n])$, $k = 1, 2, \dots$ είναι επίσης λύσεις

$$z_k^n = \left[\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]^n = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)) = w.$$

Έχουμε λοιπόν ότι οι αριθμοί $z_k = r^{1/n}(\cos[(\theta + 2k\pi)/n] + i\sin[(\theta + 2k\pi)/n])$ για $k = 0, 1, 2, \dots$ ικανοποιούν την $z_k^n = w$. Στη συνέχεια θυμίζουμε ότι για n σταθερό κάθε $k \in \mathbb{N}$ γράφεται μοναδικά στη μορφή $k = m + \ell n$ όπου $m = 0, 1, \dots, n-1$ και $\ell \in \mathbb{N}$ (διαίρεση του k δια n). Έτσι εάν $k \geq n$, τότε

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \\ &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2m\pi + 2\ell n\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2m\pi + 2\ell n\pi}{n} \right) \\ &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2m\pi}{n} + 2\ell\pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2m\pi}{n} + 2\ell\pi \right) \right) \\ &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2m\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2m\pi}{n} \right) \\ &= z_m \end{aligned}$$

όπου $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Συμπέρασμα: Οι n το πλήθος μιγαδικοί αριθμοί

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (34)$$

είναι οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ και λέγονται n -οστες ρίζες του $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Παράδειγμα 4

Επειδή $1 = \cos 0 + i \sin 0$, οι n -οστες ρίζες της μονάδας είναι οι αριθμοί

$$\zeta_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (35)$$

Εάν ορίσουμε

$$\omega_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \quad (36)$$

τότε από τον τύπο του de Moivre έπεται ότι οι n -οστες ρίζες της μονάδας είναι οι $1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}$. Παρατηρούμε ότι $\omega_n^n = 1$. Οι n -οστες ρίζες της μονάδας είναι οι κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου με n πλευρές εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο.

Παράδειγμα 5

Να βρεθούν αριθμοί z τέτοιοι ώστε $z^2 = -2$ (τετραγωνικές ρίζες του -2).

Είναι $-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$, οπότε οι αριθμοί που ζητούμε δίνονται από τη σχέση

$$z_k = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{2} \right), \quad k = 0, 1.$$

Έτσι έχουμε

$$z_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = i\sqrt{2}, \quad z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -i\sqrt{2}.$$

Πράγματι $z_0^2 = (i\sqrt{2})^2 = i^2 2 = -2$ και $z_1^2 = (-i\sqrt{2})^2 = i^2 2 = -2$.

Παράδειγμα 6

Εάν $z_1 = 2\sqrt{3} - i2$ και $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ να γραφούν οι z_1 και z_2 σε πολική μορφή και να υπολογισθούν οι $z_1 z_2$ και z_1 / z_2 .

Είναι $|z_1| = |2\sqrt{3} - i2| = \sqrt{16} = 4$ και $|z_2| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$ οπότε

$$z_1 = 4 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = 4 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right],$$

$$z_2 = 2 \left[\left(-\frac{1}{2} \right) + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = 2 \left[\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right].$$

Από την σχέση (28) υπολογίζουμε το γινόμενο

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 4 \cdot 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= 8 \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right] = i8, \end{aligned}$$

ενώ από την (30) το πηλίκο

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4}{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= 2 \left[\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right] \\ &= 2 \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = -\sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

Σύνολα και γεωμετρικοί τόποι στο μιγαδικό επίπεδο

Η ευθεία των πραγματικών αριθμών, ως υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, μπορεί να εκφρασθεί ως το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με μηδενικό φανταστικό μέρος, δηλαδή

$$\mathbb{R} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ και } \text{Im } z = 0\}$$

ή ως

$$\mathbb{R} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ και } \bar{z} = z\}.$$

αφού κάθε πραγματικός αριθμός είναι ίσος με τον συζυγή του. Γενικότερα, υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου μπορούν να εκφρασθούν με κατάλληλες αλγεβρικές σχέσεις. Για παράδειγμα το σύνολο

$$\{z : z \in \mathbb{C} \text{ και } \text{Re } z > 0\}$$

παριστάνει το ημιεπίπεδο στα δεξιά του φανταστικού άξονα, ενώ το

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0 \text{ και } \text{Im } z > 0\}$$

παριστάνει το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου.

Άσκηση 3

Τι παριστάνει καθένα από τα σύνολα:

α' $C = \{z : |z| = 1\}$

β' $D = \{z : |z| < 1\}$

γ' $U = \{z : |z| > 1\}$

δ' $C(w, r) = \{z : |z - w| = r\}$, όπου w είναι ένας μιγαδικός αριθμός και $r > 0$

Το $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ λέγεται **ανοικτός δίσκος** κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας r

Το $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ λέγεται **κλειστός δίσκος** κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας r .

Εάν w είναι ένας σταθερός μιγαδικός αριθμός και r είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, τα $\{z \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z - w| > r\}$, και $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r\}$ περιγράφουν αντίστοιχα τον ανοικτό δίσκο κέντρου w και ακτίνας r , τον κλειστό δίσκο κέντρου w και ακτίνας r , το εξωτερικό του κλειστού δίσκου κέντρου w και ακτίνας r , και το εξωτερικό του ανοικτού δίσκου κέντρου w και ακτίνας r .

Παράδειγμα 7

Να περιγραφεί το σύνολο

$$F = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}.$$

Εάν $z = x + iy \in F$, τότε $x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = y$, κατά συνέπεια το F είναι η ευθεία $y = x$ του επιπέδου.

Άσκηση 4

Τι παριστάνει το σύνολο $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im}(z + 1)\}$;

Παράδειγμα 8

Να περιγραφεί το σύνολο

$$L = \{z : |z - 1| = |z - 2|\}.$$

Ένα z που περιέχεται στο δοσμένο σύνολο, ισαπέχει από τα σημεία 1 και 2, κατά συνέπεια το σύνολο είναι η μεσοκάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα $[1, 2]$.

Η εκθετική συνάρτηση, τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αν $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ορίζουμε

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Ιδιότητες: Αν $z = x + iy$ και $w = s + it$, τότε

$$\textcircled{1} e^{z+w} = e^z e^w$$

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{x+s} [\cos(y+t) + i \sin(y+t)] \\ &= e^{x+s} [\cos y \cos t - \sin y \sin t + i(\sin y \cos t + \cos y \sin t)] \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) e^s (\cos t + i \sin t) \\ &= e^z e^w \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$$

$$\begin{aligned} |e^z| &= \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} \\ &= e^x = e^{\operatorname{Re} z} \end{aligned}$$

Αν $z = x + iy$, με $x, y \in \mathbb{R}$ από την ιδιότητα (1) έπεται ότι

$$\begin{aligned} e^{x+iy} &= e^x(\cos y + i\sin y) \Rightarrow e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \\ &\Rightarrow e^{iy} = \cos y + i\sin y \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$|e^{it}| = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

γεγονός που συμφωνεί με την ιδιότητα (2).

Μπορούμε να γράφουμε

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i\sin \theta) = re^{i\theta}$$

και η τελευταία σχέση είναι η **εκθετική μορφή** του μιγαδικού αριθμού z . Παρατηρούμε ότι για $m \in \mathbb{Z}$

$$e^{i2m\pi} = 1, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \quad \dots$$

Η δεύτερη σχέση είναι η σημαντική μαθηματική εξίσωση $e^{i\pi} + 1 = 0$ στην οποία εμφανίζονται οι τέσσερις σημαντικές μαθηματικές σταθερές.

Παρατήρηση 7

- 1 Αν $z = re^{i\theta}$ και $w = \rho e^{i\phi}$, τότε $zw = r\rho e^{i(\theta+\phi)}$.
- 2 $e^z \neq 0$, αφού $|e^z| = e^{\operatorname{Re}z} > 0$.
- 3 Η συνάρτηση $f(t) = e^{it}$ απεικονίζει την πραγματική ευθεία στον μοναδιαίο κύκλο.

Ορισμός 7

Για $z \in \mathbb{C}$ ορίζουμε

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Άσκηση 5

Αποδείξτε ότι

- α $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$
- β $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$, για κάθε ζευγάρι $z, w \in \mathbb{C}$
- γ $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$, για κάθε ζευγάρι $z, w \in \mathbb{C}$

Παρατήρηση 8

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\cos(-3i) &= (e^{i(-3i)} + e^{-i(-3i)})/2 \\ &= (e^3 + e^{-3})/2 \\ &> e^3/2\end{aligned}$$

κατά συνέπεια η $|\cos z| \leq 1$ **δεν ισχύει** στους μιγαδικούς αριθμούς. Όμοια η $|\sin z| \leq 1$ **δεν ισχύει**. Οι \cos και \sin δεν είναι καν φραγμές συναρτήσεις στο \mathbb{C} .

Ορισμός 8

Για $z \in \mathbb{C}$ ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

με κατάλληλο πεδίο ορισμού για κάθε μία από αυτές.

Άσκηση 6

Να βρεθούν οι ρίζες κάθε μιας από τις εξισώσεις

α' $\cos z = 0$

$$(z = m\pi + \pi/2, m \in \mathbb{Z})$$

β' $\cos z = 1$

γ' $\sin z = 0$

$$(z = m\pi, m \in \mathbb{Z})$$

δ' $\sin z = 1$

Άσκηση 7

Αποδείξτε κάθε μια από τις σχέσεις

α' $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

β' $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$

γ' $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$