ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

1η Διάλεξη

Οι πραγματικοί αριθμοί και η πραγματική ευθεία
Το καρτεσιανό επίπεδο

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

17 Φεβρουαρίου 2025

Διδάσκων:

Ευάγγελος Στεφανόπουλος

΄Ωρες Γραφείου:

Πέμπτη 12:00 – 13:00, Παρασκευή 11:00 – 13:00.

Συγγράμματα:

- **Thomas Απειροστικός Λογισμός**, (George B. Thomas Jr.), Joel Hass, Christopher Heil, Maurice D. Weir, (μετάφραση) Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- **Ανάλυση, Α τόμος**, Jon Rogawski, Colin Adams, Robert Franzosa, (μετάφραση) Gutenberg.
- **Απειροστικός λογισμός**, Briggs William, Cochran Lyle, Gillett Bernard (μετάφραση), Εκδόσεις Κριτική.

Οι **φυσικοί** αριθμοί είναι οι αριθμοί που χρησιμοποιούμε για να μετράμε.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \text{γράφουμε} \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Οι **ακέραιοι** αριθμοί

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Εάν n είναι φυσικός, η εξίσωση $n + m = 0$ έχει λύση στους ακεραίους, αλλά όχι στους φυσικούς. Οι **ρητοί** αριθμοί

$$\mathbb{Q} = \{m/n : \text{ο } m \text{ είναι ακέραιος και ο } n \text{ φυσικός}\}$$

Εάν $r \neq 0$ είναι ακέραιος η εξίσωση $rs = 1$ έχει λύση στους ρητούς, αλλά όχι στους ακεραίους. Οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί όπως $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ λέγονται **άρρητοι**. Ορίζουμε τους **πραγματικούς** αριθμούς να είναι

$$\mathbb{R} = \{x : \text{ο } x \text{ είναι είτε ρητός, είτε άρρητος}\}.$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Επεκτείνοντας στο $\mathbb{R}$ τις πράξεις πρόσθεση ``+'' και πολλαπλασιασμό ``·'' ώστε αν $x, y \in \mathbb{R}$, τότε $x+y \in \mathbb{R}$ και $x \cdot y \in \mathbb{R}$, ισχύουν οι νόμοι

1. $x+y=y+x$.
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$.
3. Υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $0 \in \mathbb{R}$ που λέγεται **μηδέν** ώστε $x+0=x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός $x' \in \mathbb{R}$, ώστε $x+x'=0$. Ο πραγματικός αριθμός x' λέγεται ο **αντίθετος** του x και συμβολίζεται με $-x$.
5. $x \cdot y = y \cdot x$.
6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
7. Υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $1 \in \mathbb{R}$ που λέγεται **ένα** ώστε $x \cdot 1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
8. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ υπάρχει μοναδικός $x'' \in \mathbb{R}$, ώστε $x \cdot x'' = 1$. Ο πραγματικός αριθμός x'' λέγεται ο **αντίστροφος** του x και συμβολίζεται με x^{-1}, ή $1/x$.
9. $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Παρατήρηση 1

Εάν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί ο $x+y$ λέγεται **άθροισμα** των x και y, και ο $x \cdot y$ λέγεται **γινόμενο** των x και y. Συνήθως το γινόμενο γράφεται xy. Ορίζουμε τη πράξη της **αφαίρεσης** με τη σχέση

$$y - x = y + (-x).$$

Για $x \neq 0$ ορίζουμε το **πηλίκο** του y δια x με τη σχέση

$$\frac{y}{x} = yx^{-1} = y\frac{1}{x}.$$

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζεται μία σχέση η **διάταξη** ``$\leq$'' ώστε

10. Εάν $x \leq y$ και $y \leq z$ τότε $x \leq z$.
11. $x \leq y$ και $y \leq x$ εάν και μόνον εάν $x = y$.
12. Εάν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί τότε ή $x \leq y$ ή $y \leq x$.
13. Εάν $x \leq y$ τότε $x + z \leq y + z$ για κάθε πραγματικό αριθμό z.
14. Εάν $0 \leq x$ και $0 \leq y$ τότε $0 \leq x \cdot y$.

Παρατήρηση 2

Εάν $x \leq y$ γράφουμε $y \geq x$. Επίσης εάν $x \leq y$ και $y - x \neq 0$ γράφουμε $x < y$, ή $y > x$. Ένας αριθμός x λέγεται **θετικός** εάν $x > 0$ και **αρνητικός** εάν $x < 0$.

Θεώρημα 1

Εάν $x < y$ τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός z τέτοιος ώστε $x < z$ και $z < y$.

Εάν $x < z$ και $z < y$ γράφουμε $x < z < y$. Το Θεώρημα εκφράζει την **πυκνότητα** των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 1

Αν $S \subset \mathbb{R}$ και αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $y \in S$ να ισχύει $y \leq x$, το S λέγεται **άνω φραγμένο** και το x λέγεται ένα **άνω φράγμα** του S. Εάν $s \in \mathbb{R}$ είναι ένα άνω φράγμα του S τέτοιο ώστε $s \leq x$ για κάθε άνω φράγμα x του S, τότε ο s λέγεται **ελάχιστο άνω φράγμα** ή **supremum** του S και συμβολίζεται με $\sup S$.

15. Εάν S είναι ένα άνω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών, τότε υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα του S.

Παρατήρηση 3

Εάν A είναι ένα τυχαίο σύνολο εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις $\oplus$ και $\odot$ τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες/αξιώματα 1–9, η τριάδα $(A, \oplus, \odot)$ λέγεται **σώμα**. Άρα οι πραγματικοί αριθμοί με τις γνωστές πράξεις αποτελούν σώμα. Ένα σώμα που ικανοποιεί τα αξιώματα 10–14 λέγεται **διατεταγμένο σώμα**, ενώ εάν επιπλέον ικανοποιεί και το αξίωμα 15 λέγεται **πλήρως διατεταγμένο σώμα**, άρα οι πραγματικοί αριθμοί με τη γνωστή διάταξη αποτελούν ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα.

Αποδεικνύεται ότι το σώμα των πραγματικών αριθμών είναι κατά κάποιο τρόπο μοναδικό, με την έννοια ότι κάθε σώμα που ικανοποιεί τα αξιώματα 1–15 είναι ταυτόσημο με το $\mathbb{R}$, **ίσομορφο** με το $\mathbb{R}$ στη γλώσσα της άλγεβρας. Αυτό σημαίνει (θεωρώντας ότι γνωρίζουμε τα βασικά για συναρτήσεις) ότι εάν $(A, \oplus, \odot, \preccurlyeq)$ είναι ένα σώμα που ικανοποιεί τα αξιώματα 1–15, είναι δηλαδή ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα, τότε υπάρχει μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ένα προς ένα και επί τέτοια ώστε εάν x και y είναι στοιχεία του A, τότε

$$f(x \oplus y) = f(x) + f(y), \qquad f(x \odot y) = f(x)f(y), \qquad x \preccurlyeq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Εάν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί με $a < b$, τότε με τα **διαστήματα**

$$(a,b), \qquad [a,b), \qquad (a,b], \qquad [a,b]$$

συμβολίζουμε αντίστοιχα τα σύνολα των πραγματικών αριθμών x με

$$a < x < b, \qquad a \leq x < b, \qquad a < x \leq b, \qquad a \leq x \leq b.$$

Ορίζοντας τα σύμβολα $-\infty$, **μείον άπειρο**, και $+\infty$, **συν άπειρο**, ώστε $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$, μπορούμε να γράφουμε

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty).$$

Έτσι εάν $a \in \mathbb{R}$ με τα ημιάπειρα διαστήματα

$$(-\infty, a), \qquad (-\infty, a], \qquad (a, +\infty), \qquad [a, +\infty)$$

συμβολίζουμε ανίστοιχα τα σύνολα των πραγματικών αριθμών x με $x < a$, $x \leq a$, $x > a$, $x \geq a$.

Παράδειγμα 1

$\sup[1,3)=3$. Το 3 είναι ένα άνω φράγμα του συνόλου, οπότε αν $s=\sup[1,3)$, τότε $s\leq 3$. Έστω $s<3$, τότε (πυκνότητα) υπάρχει $y\in\mathbb{R}$ ώστε $s<y<3$, αλλά τότε $y\in[1,3)$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού το s είναι άνω φράγμα του συνόλου και θα έπρεπε $y\leq s$. Καταλήξαμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι $s<3$, επομένως $s=3$.

Παράδειγμα 2

Εάν $S_1=(1,2)$, τότε κάθε $x\geq 2$ είναι ένα άνω φράγμα του S και $\sup S_1=2\notin S_1$.
Εάν $S_2=(1,2]$, τότε κάθε $x\geq 2$ είναι ένα άνω φράγμα του S και $\sup S_2=2\in S_2$.
Δηλαδή το ελάχιστο άνω φράγμα συνόλου μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο.

Παρατηρούμε ότι το $\sup(1,+\infty)$ δεν υπάρχει (γιατί;).

Άσκηση 1

Να βρεθεί το supremum του συνόλου

$$A=\left\{1-\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}.$$

- Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}$ λέγεται **κάτω φραγμένο** εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε για κάθε $y \in S$ να ισχύει $y \geq x$. Το x λέγεται ένα **κάτω φράγμα** του S. Εάν s είναι ένα κάτω φράγμα ώστε $s \geq x$ για κάθε κάτω φράγμα x του S, τότε ο s λέγεται **μέγιστο κάτω φράγμα** ή infimum του S και συμβολίζεται με $\inf S$.

Θεώρημα 2

Κάθε κάτω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών έχει μέγιστο κάτω φράγμα.

Άσκηση 2

Εάν $S \subset \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε $-S = \{-x : x \in S\}$, δηλαδή $-[1,2) = (-2,-1]$. Να αποδειχθούν οι ισχυρισμοί:

α΄ Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένο εάν και μόνον εάν το $-S$ είναι κάτω φραγμένο.

β΄ Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}$ είναι κάτω φραγμένο εάν και μόνον εάν το $-S$ είναι άνω φραγμένο. **Υπόδειξη**: $-(-S) = S$.

γ΄ $\sup S = -\inf(-S)$ και $\inf S = -\sup(-S)$.

Θεώρημα 3 (Ύπαρξη του ακεραίου μέρους πραγματικού αριθμού)

Εάν $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός ακέραιος m_x ώστε $m_x \leq x < m_x + 1$.

Ορισμός 2

Εάν $x \in \mathbb{R}$, ο μοναδικός ακέραιος, την ύπαρξη του οποίου εξασφαλίζει το προηγούμενο Θεώρημα, λέγεται **ακέραιο μέρος** του x και συμβολίζεται με $[x]$, έτσι $[x] \in \mathbb{Z}$ και $[x] \leq x < [x] + 1$.

Για παράδειγμα $[0.75] = 0$, $[3] = 3$, $[-1.3] = -2$. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει $x - 1 < [x] \leq x$.

Θεώρημα 4 (Πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς)

Εάν x και y είναι άρρητοι αριθμοί με $x < y$, τότε υπάρχει ρητός αριθμός r τέτοιος ώστε $x < r < y$.

- Εάν ο n είναι φυσικός αριθμός και ο x είναι πραγματικός αριθμός γράφουμε

$$nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n} = (\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n})x$$

Η απόλυτη τιμή

Εάν x είναι ένας πραγματικός αριθμός ορίζουμε την **απόλυτη τιμή** του x

$$|x| = \begin{cases} x & \text{εάν } x \geq 0 \\ -x & \text{εάν } x < 0. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$|x| \geq 0, \qquad \text{και} \qquad -|x| \leq x \leq |x|.$$

Θεώρημα 5 (Ιδιότητες της απόλυτης τιμής)

Εάν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ι

1. $|x| \geq 0$ και $|x| = 0$, εάν και μόνον εάν $x = 0$.
2. $|x| = |-x|$
3. $|xy| = |x||y|$
4. $|x/y| = |x|/|y|, \quad y \neq 0$
5. $|x+y| \leq |x| + |y|$ Η ανισότητα αυτή είναι η ***τριγωνική ανισότητα***

Ρίζες

Εάν $x \geq 0$ είναι ένας πραγματικός αριθμός ορίζουμε την **τετραγωνική ρίζα** του x, $\sqrt{x}$ να είναι ο (μοναδικός) πραγματικός αριθμός $y \geq 0$ για τον οποίο ισχύει $y^2 = x$, δηλαδή

$$\sqrt{x} = y \Leftrightarrow y^2 = x \qquad (y \geq 0).$$

Ειδικά

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Γενικότερα αν n είναι **άρτιος** φυσικός αριθμός και $x \geq 0$ είναι ένας πραγματικός αριθμός ορίζουμε την ***n*-οστή ρίζα** του x, $\sqrt[n]{x}$ να είναι ο (μοναδικός) πραγματικός αριθμός $y \geq 0$ για τον οποίο ισχύει $y^n = x$, δηλαδή

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x. \tag{1}$$

Αν n είναι **περιττός** φυσικός αριθμός και $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την ***n*-οστή ρίζα** του x, $\sqrt[n]{x}$ να είναι ο πραγματικός αριθμός y που ικανοποιεί την (1). Για τη n-οστή ρίζα του $x \in \mathbb{R}$, γράφουμε επίσης

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Δυνάμεις

Εάν ο n είναι φυσικός αριθμός και ο x είναι πραγματικός αριθμός ορίζουμε

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n}.$$

Συμφωνούμε ότι για $x \neq 0$ να γράφουμε $x^0 = 1$. Αν $x \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$x^{-n} = (x^n)^{-1} = (x^{-1})^n.$$

Αν $x \geq 0$ (ή $x > 0$ όταν χρειάζεται) και $r = m/n \in \mathbb{Q}$ με $n > 0$ ορίζουμε

$$x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

ώστε $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m = (x^m)^{\frac{1}{n}}$. Έτσι αν r και s είναι ρητοί αριθμοί και $x \geq 0$, $y \geq 0$, (ή αυστηρά θετικοί όπου χρειάζεται) είναι πραγματικοί αριθμοί τότε

1. $x^{r+s} = x^r x^s$
2. $(x^r)^s = x^{rs}$
3. $(xy)^r = x^r y^r$
4. $x^{r-s} = \dfrac{x^r}{x^s}$
5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$.

Το δεκαδικό ανάπτυγμα

Οι υποδιαιρέσεις ολόκληρων αριθμών (φυσικών ή ακεραίων) παρίστανται με δεκαδικούς αριθμούς. Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε ότι

$$\frac{3}{5} = 0.6, \qquad \frac{1}{4} = 0.25, \qquad \frac{27}{4} = 6.75.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0.6, \qquad \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = \frac{20}{100} + \frac{5}{100} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} = 0.2 + 0.05 = 0.25,$$

και

$$\frac{27}{4} = \frac{4\cdot 6+3}{4} = 6+\frac{3}{4} = 6+\frac{75}{100} = 6+\frac{70}{100}+\frac{5}{100} = 6+\frac{7}{10}+\frac{5}{10^2} = 6+0.7+0.05 = 6.75,$$

δηλαδή οι ρητοί αυτοί αριθμοί, όπως και άλλοι, μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, \tag{2}$$

όπου ο $a_0 \in \mathbb{Z}$, και $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ για $k = 1, 2, \ldots, n$.

Βέβαια δεν είναι αλήθεια ότι κάθε ρητός μπορεί να γραφεί στη μορφή (2). Για παράδειγμα αν υποθέσουμε ότι

$$\frac{1}{3} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

για κάποιο θετικό ακέραιο n, θα είχαμε, αφού $a_0 = 0$ (γιατί;),

$$\frac{1}{3} = \frac{10^{n-1}a_1 + 10^{n-2}a_2 + \cdots + a_n}{10^n} = \frac{m}{10^n},$$

για κάποιο θετικό ακέραιο m, ισοδύναμα ότι $10^n = 3m$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού καμιά δύναμη του 10 δεν μπορεί να είναι πολλαπλάσιο του 3 (γιατί;). Πράγματι επειδή

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$$

με άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, ο $1/3$ θα μπορούσε να παρασταθεί σαν ένα ``άπειρο'' άθροισμα, σωστότερα σαν άθροισμα άπειρου πλήθους όρων

$$\frac{1}{3} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots .$$

Το ίδιο συμβαίνει και με τους άρρητους αριθμούς, για παράδειγμα τον $\pi = 3.141592653589793\ldots$, οπότε

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{6}{10^7} + \frac{5}{10^8} + \cdots + \frac{3}{10^{15}} + \cdots.$$

Αποδεικνύεται ότι αν ο r είναι ρητός τότε είτε το δεκαδικό ανάπτυγμά του είναι πεπερασμένο, είτε περιέχει ένα επαναλαμβανόμενο τμήμα, για παράδειγμα

$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots, \qquad \frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots,$$

και στη περίπτωση αυτή γράφουμε

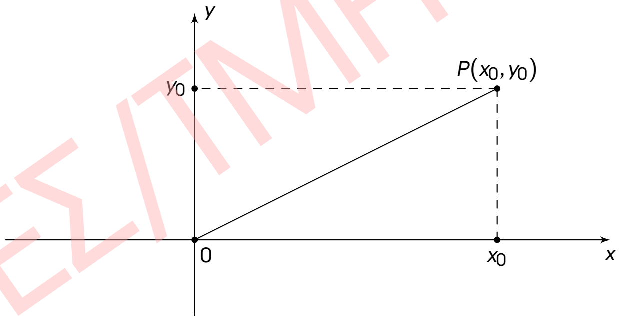
$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}, \qquad \frac{1}{7} = 0.\overline{142857},$$

ενώ αν ο r είναι άρρητος τότε το δεκαδικό ανάπτυγμά του περιέχει άπειρο πλήθος ψηφίων χωρίς να επαναλαμβάνεται κάποιο τμήμα του αναπτύγματος.

Με $\mathbb{R}$ συμβολίζουμε την ευθεία των πραγματικών αριθμών και με $\mathbb{R}^2$ το καρτεσιανό γινόμενο

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Το $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με ένα **ορθογώνιο σύστημα αξόνων**, δηλαδή εφοδιασμένο με δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες καθεμιά από τις οποίες αναπαριστάνει την πραγματική ευθεία, με σημείο τομής το $(0, 0)$ θα το λέμε **καρτεσιανό επίπεδο**, ή **πραγματικό επίπεδο** ή διδιάστατο πραγματικό χώρο.



Σχήμα: Το καρτεσιανό επίπεδο.

Τον οριζόντιο άξονα τον λέμε συνήθως x-άξονα και τον κατακόρυφο y-άξονα. Κάθε σημείο P του επιπέδου αντιστοιχεί σε μοναδικό ζευγάρι (x_0, y_0) πραγματικών αριθμών, και αντίστροφα κάθε ζευγάρι (x_0, y_0) πραγματικών αριθμών παριστάνει ένα μοναδικό σημείο του επιπέδου. Γράφουμε $P(x_0, y_0)$ για να δηλώσουμε αυτή την ένα προς ένα αντιστοιχία. Το σημείο x_0 στον x-άξονα το λέμε x **συντεταγμένη** του σημείου P, και το y_0 στον y-άξονα το λέμε y **συντεταγμένη** του P.
Όμοια το καρτεσιανό γινόμενο

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

εφοδιασμένο με ένα **τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων**, δηλαδή εφοδιασμένο με τρεις ευθείες ανά δύο κάθετες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες αναπαριστάνει την πραγματική ευθεία, με σημείο τομής το $(0,0,0)$ θα το λέμε **τριδιάστατο πραγματικό χώρο**. Κάθε σημείο του χώρου αντιστοιχεί σε μοναδική τριάδα (x, y, z) πραγματικών αριθμών, και αντίστροφα κάθε τριάδα (x, y, z) πραγματικών αριθμών παριστάνει ένα μοναδικό σημείο του χώρου. Γενικότερα για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε τον n-διάστατο πραγματικό χώρο

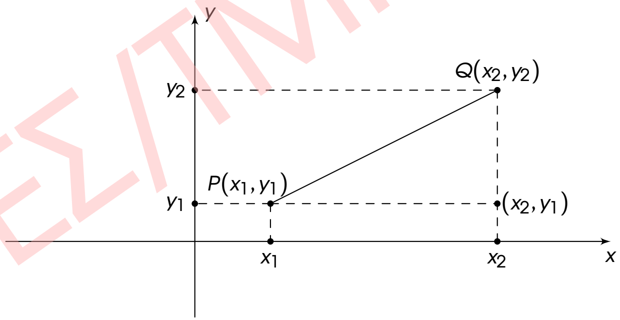
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Απόσταση στο επίπεδο

- $P = (x_1, y_1)$ και $Q = (x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία του επιπέδου
- Αν $d(P, Q)$ είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων P και Q

τότε από το σχετικό ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2) και (x_2, y_1) προκύπτει ότι

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$



Εξίσωση του κύκλου

Αν το (x,y) είναι σημείο του κύκλου κέντρου (a,b) και ακτίνας $r \geq 0$, τότε

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{3}$$

Έτσι η (3) είναι η **εξίσωση του κύκλου** με κέντρο το (a,b) και ακτίνα r. Για παράδειγμα η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$$

γράφεται

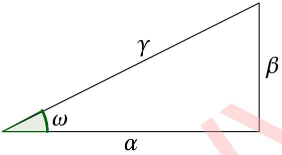
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

κατά συνέπεια η εξίσωση παριστάνει κύκλο κέντρου $(1,-1)$ και ακτίνας 2.

Άσκηση 3

Η **έλλειψη** είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία, τις **εστίες** της έλλειψης, είναι σταθερό. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με εστίες στα σημεία $(-c,0)$ και $(c,0)$ και άθροισμα αποστάσεων ίσο με $2a$, όπου $a > c > 0$.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο



$$\sin\omega = \frac{\beta}{\gamma} \qquad \cos\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$$

$$\tan\omega = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sin\omega}{\cos\omega} \qquad \cot\omega = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos\omega}{\sin\omega}$$

$$\sec\omega = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\cos\omega} \qquad \csc\omega = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{\sin\omega}$$

Άμεσες συνέπειες του ορισμού των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας είναι

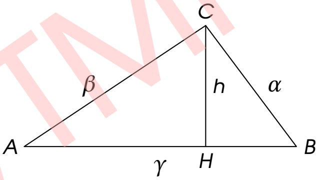
$$\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1, \quad \tan\omega = \frac{1}{\cot\omega}, \quad \sec^2\omega - \tan^2\omega = 1, \quad \csc^2\omega - \cot^2\omega = 1.$$

Άσκηση 4 (Ο νόμος των ημιτόνων)

Έστω ABC ένα τρίγωνο με μήκη των αντίστοιχων πλευρών α, β, και γ, όπως στο σχήμα. Δείξτε ότι ισχύει ο νόμος

$$\frac{\sin A}{\alpha} = \frac{\sin B}{\beta} = \frac{\sin C}{\gamma}.$$

Λύση. Αν CH είναι το ύψος του τριγώνου στην πλευρά γ μήκους h, τότε



$$\sin A = \frac{h}{\beta} \Rightarrow h = \beta \sin A, \qquad \text{και} \qquad \sin B = \frac{h}{\alpha} \Rightarrow h = \alpha \sin B, \qquad \text{οπότε}$$

$$\frac{\sin A}{\alpha} = \frac{\sin B}{\beta}.$$

Μήκος περιφέρειας και εμβαδόν δίσκου

$C(O,r)$: κύκλος κέντρου O και ακτίνας r
$D(O,r)$: η περιοχή που περικλείει ο κύκλος $C(O,r)$ την οποία θα λέμε **δίσκο** κέντρου O και ακτίνας r. Γράφουμε επίσης C_r για τον κύκλο και D_r για το δίσκο.
Πρόβλημα 1: Τι μπορούμε να ορίσουμε ως μήκος της περιφέρειας του κύκλου και πόσο είναι αυτό;
Πρόβλημα 2: Με τι ισούται το εμβαδόν του δίσκου;

Θεώρημα 6 (Εύδοξος (408-355 π.Χ.))

Ο λόγος του μήκους της περιφέρειας προς τη διάμετρο του κύκλου είναι ίδιος για όλες τις ακτίνες.

Ορισμός 3

Αν $L(C_r)$ είναι το μήκος της περιφέρειάς του κύκλου C_r, ορίζουμε

$$\frac{L(C_r)}{2r} = \pi.$$

Ιστορία: Οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν για τον αριθμό π από τον 5ο π.Χ. αιώνα. Ο Ιπποκράτης ο Χίος φαίνεται ότι γνώριζε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος του Ευδόξου από το 430 π.Χ. Ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) απέδειξε ότι $3+10/71<\pi<3+1/7$, οπότε $\pi \approx 3.14\ldots$. Το 1761 ο Lambert απέδειξε ότι ο αριθμός π είναι άρρητος. Το 1882 ο Lindemann απέδειξε ότι ο π είναι **υπερβατικός**, δεν προκύπτει δηλαδή σαν λύση κάποιας αλγεβρικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές. Συνεπώς δεν μπορεί να βρεθεί η θέση του π (να κατασκευαστεί) με χάρακα και διαβήτη επάνω στην πραγματική ευθεία, κατά συνέπεια το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου με χάρακα και διαβήτη είναι αδύνατο.

Έτσι το μήκος της περιφέρειας κύκλου ακτίνας r είναι

$$L(C_r) = 2\pi r \tag{4}$$

και το εμβαδόν δίσκου ακτίνας r αποδεικνύεται ότι είναι

$$A(D_r) = \frac{1}{2} L(C_r) r = \pi r^2. \tag{5}$$

Ειδικά

$$L(C_1) = 2\pi, \qquad A(D_1) = \pi.$$

Μια γωνία με κορυφή στο κέντρο ενός κύκλου αποκόπτει ένα τόξο της περιφέρειας. Είναι λογικό να θελήσουμε να μετρήσουμε τη γωνία μετρώντας το αντίστοιχο τόξο. Όμως το ``μήκος του τόξου'' εξαρτάται από την ακτίνα του κύκλου. Ξεπερνάμε τη δυσκολία με δύο τρόπους.

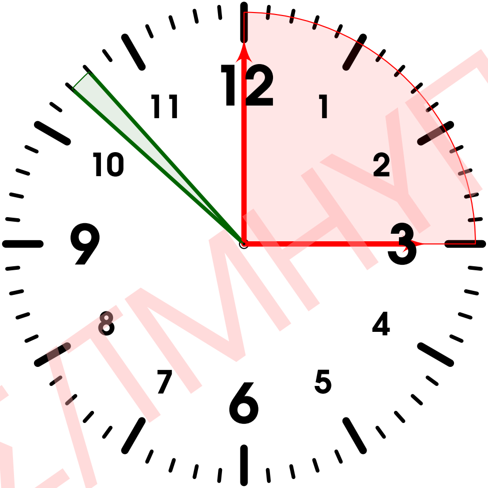
Πρώτος τρόπος: Διαιρώντας την περιφέρεια σε 360 ισομήκη τόξα ορίζουμε ως μια μονάδα μέτρησης γωνιών την **μοίρα** (degree) να είναι ίση με την επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί σε ένα από αυτά τα τόξα. Αντί για 1 μοίρα γράφουμε 1°, οπότε η περιφέρεια αντιστοιχεί σε γωνία 360°. Η μονάδα αυτή είναι ανεξάρτητη της ακτίνας του κύκλου, για παράδειγμα η γωνία 90° αντιστοιχεί στο $1/4$ της περιφέρειας, αφού 90=360/4, κατά συνέπεια η γωνία 90° είναι ορθή.

Δεύτερος τρόπος: Θεωρούμε ένα κύκλο ακτίνας 1 και ορίζουμε τη μονάδα **ακτίνιο** (radian) να είναι εκείνο το μήκος τόξου ώστε το μήκος της περιφέρειας του (μοναδιαίου) κύκλου να είναι 2π ακτίνια. Κατά συνέπεια

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \Leftrightarrow 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.2957795\ldots^\circ$$

Έτσι

$$90^\circ = \left(\frac{360}{4}\right)^\circ = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \quad 30^\circ = \frac{\pi}{6},$$

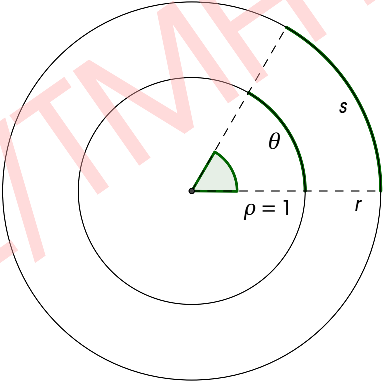


Σχήμα: Η πράσινη γωνία είναι $360^\circ/60 = 6^\circ$, ή $2\pi/60 = \pi/30$ ακτίνια, και η κόκκινη είναι $360^\circ/4 = 90^\circ$, ή $2\pi/4 = \pi/2$ ακτίνια

Απόρροια του ορισμού του ακτινίου είναι ότι αν s είναι το μήκος ενός τόξου κύκλου ακτίνας $\rho = r$ και θ είναι το μέτρο σε ακτίνια της επίκεντρης γωνίας που αντιστοιχεί στο τόξο, τότε

$$s = \theta r.$$

Το γεγονός αυτό συμφωνεί με το γνωστό αποτέλεσμα ότι το μήκος της περιφέρειας ακτίνας r είναι ίσο με $2\pi r$.



Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Θυμίζουμε ότι μια γωνία με κορυφή στο κέντρο ενός κύκλου λέγεται **επίκεντρη γωνία**. Θυμίζουμε επίσης ότι το τμήμα ενός δίσκου το οποίο περιέχεται μεταξύ των πλευρών μιας επίκεντρης γωνίας και της περιφέρειας λέγεται **κυκλικός τομέας**. Αν στον κύκλο $C(O,r)$ θεωρήσουμε τον κυκλικό τομέα AOB, τότε σε αναλογία με την (4) ($L = 2\pi r$) το μήκος s του τόξου AB είναι

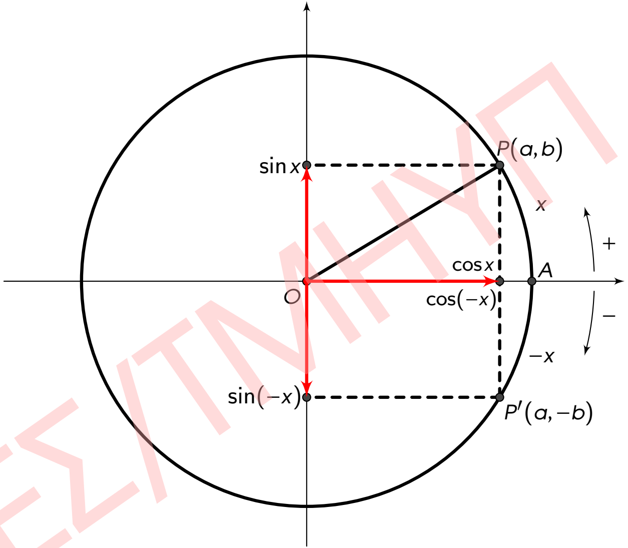
$$s = \theta r$$

όπου θ είναι το μέτρο της επίκεντρης γωνίας σε ακτίνια. Επίσης σε αναλογία της (5) ($A = Lr/2$) το εμβαδόν του κυκλικού τομέα AOB θα είναι

$$A = \frac{1}{2}sr = \frac{1}{2}\theta r^2 \tag{6}$$

όπου s είναι το μήκος του τόξου AB, και $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Το θ είναι το μήκος του τόξου στη μοναδιαία περιφέρεια το οποίο αποκόπτει η επίκεντρη γωνία.

Θεωρούμε ένα σύστημα αξόνων κάθετων μεταξύ τους, έναν οριζόντιο και έναν κατακόρυφο, και έναν κύκλο ακτίνας 1 με κέντρο στην αρχή των αξόνων. Στη συνέχεια ορίζουμε προσανατολισμό στον κύκλο. Θεωρούμε σαν αρχή μέτρησης το σημείο $(1,0)$ της περιφέρειας, το σημείο A στο Σχήμα. Ορίζουμε σαν **θετική φορά** διαγραφής εκείνη κατά την οποία η κίνηση γίνεται αντίθετα από αυτήν των δεικτών του ρολογιού, και **αρνητική φορά** την αντίθετη, δηλαδή εκείνη κατά την οποία η κίνηση ακολουθεί αυτήν των δεικτών. Τον προσανατολισμένο μοναδιαίο κύκλο ονομάζουμε **τριγωνομετρικό κύκλο**.



Σχήμα: Ο τριγωνομετρικός κύκλος Ι

Έστω x ένας πραγματικός αριθμός ώστε $-\pi \leq x \leq \pi$. Έστω P το σημείο πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο έτσι ώστε το τόξο AP να είναι ίσο με x rad. Εννοείται ότι αν $x < 0$, τότε το τόξο AP έχει μήκος $|x|$ και η μετάβαση από το A στο P γίνεται κατά την αρνητική φορά. Αν (a, b) είναι οι συντεταγμένες του σημείου P ορίζουμε

$$\cos x = a \qquad \text{και} \qquad \sin x = b.$$

Σημειώνουμε ότι αν $x = \pi$ ή $x = -\pi$, τότε $P = (-1, 0)$. Μια άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \sin(-x) = -\sin x. \tag{7}$$

Επεκτείνοντας τον ορισμό για $-\pi \leq x \leq \pi$ και $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad \text{και} \qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin x.$$

Έτσι ορίζουμε πρακτικά τις **τριγωνομετρικές συναρτήσεις** $\cos x$ και $\sin x$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Παρατηρούμε ότι

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \qquad \text{και} \qquad -1 \leq \sin x \leq 1 \tag{8}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια ορίζουμε τις υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις με τις σχέσεις

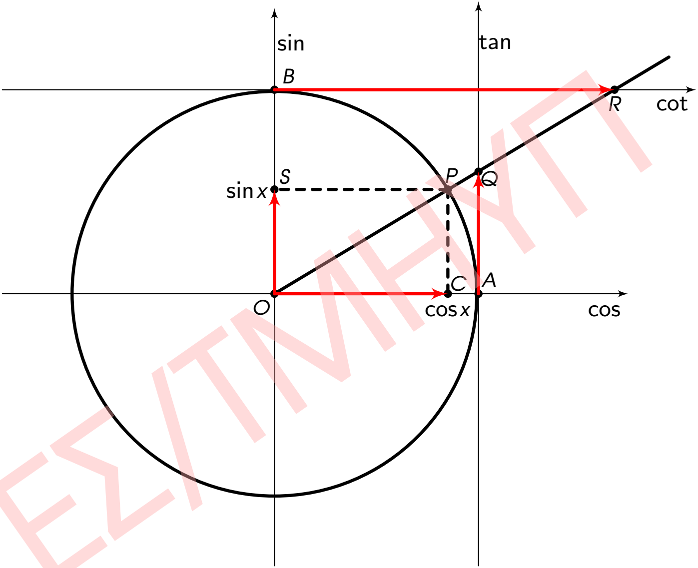
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

Οι κλασματικές αυτές συναρτήσεις ορίζονται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από τις διακριτές τιμές του x για τις οποίες μηδενίζεται ο παρονομαστής. Συγκεκριμένα, επειδή

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \qquad \text{και} \qquad \cos x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

έπεται ότι τα πεδία ορισμού αυτών των συναρτήσεων είναι

$$D(\tan) = D(\sec) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$$
$$D(\cot) = D(\csc) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$



Σχήμα: Ο τριγωνομετρικός κύκλος ΙΙ

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$
2. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$
3. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$
4. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$
5. $\sin 2x = 2\sin x \cos x.$
6. $\sin x - \sin y = 2\cos \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}.$
7. $\cos x - \cos y = -2\sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}.$

΄Ασκηση 5

Για $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι

α΄. $\cos(\pi \pm x) = -\cos x.$

β΄. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x.$

γ΄. $\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x.$

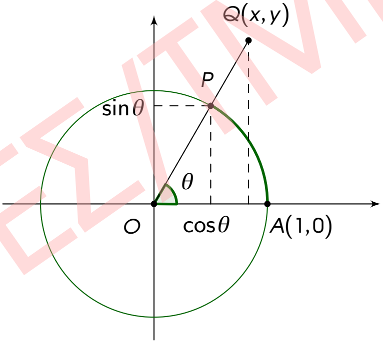
δ΄. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x.$

Πολικές συντεταγμένες (r,θ)

Αν $Q(x,y) \neq (0,0)$ είναι σημείο του επιπέδου και $r = \sqrt{x^2+y^2}$ είναι η απόστασή του από την αρχή των αξόνων, τότε το σημείο $P(x/r, y/r)$ βρίσκεται επάνω στη μοναδιαία περιφέρεια αφού

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{r^2} = 1$$

από τον ορισμό του r.



$\theta =$ μήκος $\widehat{AP}$

$r =$ μήκος $OQ = \sqrt{x^2+y^2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\sin\theta = \frac{y}{r}$

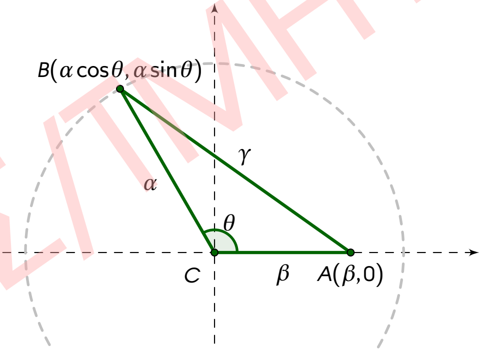
$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

Άσκηση 6 (Ο νόμος του συνημιτόνου)

Έστω ένα τρίγωνο με μήκη πλευρών α, β, και γ. Εάν θ είναι η γωνία απέναντι από την πλευρά μήκους γ δείξτε ότι

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta.$$



Λύση. Αν *ABC* είναι το τρίγωνο με πλευρές α, β, γ όπως στο σχήμα, τότε η κορυφή *B* βρίσκεται πάνω σε περιφέρεια ακτίνας α, κατά συνέπεια οι συντεταγμένες του *B* είναι $(\alpha\cos\theta, \alpha\sin\theta)$ (γιατί;). Το μήκος γ είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων *A* και *B*, επομένως

$$\begin{aligned}
\gamma^2 &= (\alpha\cos\theta - \beta)^2 + (\alpha\sin\theta)^2 \\
&= \alpha^2\cos^2\theta - 2\alpha\beta\cos\theta + \beta^2 + \alpha^2\sin^2\theta \\
&= \alpha^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta \\
&= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta
\end{aligned}$$

που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε. Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση που η γωνία θ είναι ορθή ο νόμος του συνημιτόνου καταλήγει στο Πυθαγόριο Θεώρημα.

Έστω $0 < x < \pi/2$ και έστω P το σημείο στον τριγωνομετρικό κύκλο ώστε το μήκος του τόξου AP να είναι x. Η ημιευθεία από το κέντρο O του κύκλου δια του P τέμνει τον άξονα των εφαπτομένων στο Q, βλέπε Σχήμα Τριγ. κύκλος ΙΙ. Αν C είναι η προβολή του P στον οριζόντιο άξονα, τότε

$$\begin{gathered}
\text{Εμβαδόν τριγώνου } POC \le \text{Εμβαδόν τομέα } POA \le \text{Εμβαδόν τριγώνου } QOA \\
\frac{1}{2}(\cos x)(\sin x) \le \frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}\tan x \\
\cos x \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x} \\
\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{\cos x}
\end{gathered}$$

Επειδή

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$$

και η $\cos x$ είναι άρτια συνάρτηση έπεται ότι

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{\cos x}, \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Αν στο Σχήμα θεωρήσουμε το ευθύγραμμο τμήμα PA, τότε αφενός $PC < AP$, αφού η AP είναι η υποτείνουσα στο τρίγωνο PCA, και αφετέρου $AP <$ τόξο AP (γιατί;) έτσι ισχύει η ανισότητα

$$0 < \sin x < x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

επιπλέον από την απόδειξη της (9)

$$0 < \sin x < x \leq \tan x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

οπότε και

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Άμεση συνέπεια της (10) είναι η

$$|\sin x| \leq |x|, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$