

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ – ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Εαρινό εξάμηνο 2025

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12. Διαφορικές εξισώσεις

1. Να βρεθούν οι τιμές του m για τις οποίες η $y = x^m$ είναι λύση της

(α) $x^2 y'' - y = 0$.

(β) $x^2 y'' + 6xy' + 4y = 0$.

2. Για τη διαφορική εξίσωση

$$y = ty' + (y')^2$$

(α) Ναδειχθεί ότι $y = ct + c^2$, όπου c είναι μία σταθερά, είναι μία μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων.

(β) Να εξετασθεί εάν υπάρχει λύση της μορφής $y = kt^2$, όπου k είναι κάποια σταθερά.

3. Ναδειχθεί ότι η y είναι λύση της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης.

(α) $2y' + y = 0$, $y = e^{-x/2}$.

(β) $y' = 25 + y^2$, $y = 5 \tan 5x$.

(γ) $\frac{dy}{dt} = (2 - y)(1 - y)$, $t = \ln \frac{2-y}{1-y}$.

(δ) $y'' + (y')^2 = 0$, $y = \ln |x + c_1| + c_2$.

Λύση

(γ) Πρώτος τρόπος:

$$t = \ln \frac{2-y}{1-y} \Rightarrow e^t = \frac{2-y}{1-y} \Rightarrow \dots \Rightarrow y = \frac{2-e^t}{1-e^t}$$

οπότε παραγωγίζουμε και αντικαθιστούμε στην εξίσωση.

Δεύτερος τρόπος:

$$t = \ln(2-y) - \ln(1-y)$$

οπότε παραγωγίζοντας ως προς t παίρνουμε

$$1 = \frac{-y'}{2-y} - \frac{-y'}{1-y} = y' \left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{2-y} \right) = \frac{y'}{(1-y)(2-y)}$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο.

4. Να εξετασθεί εάν η δοσμένη σχέση είναι πεπλεγμένη λύση της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης.

$$(\alpha) \quad y - \ln y = t^2 + 1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{t}{y}.$$

$$(\beta) \quad x^2 - \sin(x + y) = 1, \quad \frac{dy}{dx} = 2x \sec(x + y) - 1.$$

$$(\gamma) \quad e^{xy} + y = x - 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^{-xy-y}}{e^{-xy+y}}.$$

5. Να προσδιοριστούν όλες οι συναρτήσεις $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$, των οποίων η μέση τιμή σε κάθε διάστημα $[0, x]$, $x > 0$, είναι ίση με τον αριθμητικό μέσο των $f(0)$ και $f(x)$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Οι ζητούμενες συναρτήσεις f ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(s) ds = \frac{f(0) + f(x)}{2}.$$

Λύση

Από την υπόδειξη παραγωγίζοντας έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^x f(s) ds &= \frac{f(0) + f(x)}{2} x \Rightarrow \left(\int_0^x f(s) ds \right)' = \left(\frac{f(0) + f(x)}{2} x \right)' \\ &\Rightarrow f(x) = \frac{f(0)}{2} + \frac{1}{2} (f(x)x)' \\ &\Rightarrow f(x) = \frac{f(0)}{2} + \frac{1}{2} (f'(x)x + f(x)) \\ &\Rightarrow \frac{f(x)}{2} = \frac{f(0)}{2} + \frac{f'(x)x}{2} \\ &\Rightarrow f'(x)x - f(x) = -f(0) \\ &\Rightarrow \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = -\frac{f(0)}{x^2} \\ &\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = -\frac{f(0)}{x^2} \\ &\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{f(0)}{x} + c \\ &\Rightarrow f(x) = f(0) + cx, \end{aligned}$$

όπου το c είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

6. Έχει παρατηρηθεί ότι αν ο πληθυσμός ελαφιών σε μια περιοχή πέσει κάτω από ένα ορισμένο επίπεδο m το είδος απειλείται με εξαφάνιση, ενώ αν υπερβεί μια ορισμένη οριακή τιμή M ο πληθυσμός θα ελαττωθεί ξανά προς το M εξαιτίας ασθενιών και κακής διατροφής.

(α) Εξετάστε αν το μοντέλο εξέλιξης του πληθυσμού

$$\frac{dP}{dt} = rP(M - P)(P - m),$$

όπου r είναι μια θετική σταθερά αναλογίας, περιγράφει την εξέλιξη του πληθυσμού.

(β) Επιλύστε την εξίσωση και επιβεβαιώστε την ορθότητα του μοντέλου.