

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 10 & 11. Ολοκληρώματα

1. Αν η  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx.$$

**Λύση**

Από τη σχέση

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx &= \int_0^{\pi/2} f\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) dx \\ &= \int_{-\pi/2}^0 f(\cos t) dt && t = x - \frac{\pi}{2}, \quad dt = dx \\ &= \int_{-\pi/2}^0 f(\cos(-t)) dt && \text{η } \cos \text{ είναι άρτια συνάρτηση} \\ &= - \int_{\pi/2}^0 f(\cos y) dy && y = -t, \quad dy = -dt \\ &= \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx. \end{aligned}$$

2. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

(α)  $\int \sin^5 x dx.$

(β)  $\int \sin^4 x dx.$

**Λύση**

(α) Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x dx &= \int \sin^4 x \sin x dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx && u = \cos x, \quad du = -\sin x dx \\ &= \int -(1 - u^2)^2 du \\ &= \int (-1 + 2u^2 - u^4) du \\ &= -u + \frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C \\ &= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C. \end{aligned}$$

(β) Μια διαδικασία ανάλογη αυτής που ακολουθήθηκε στο (α') στη περίπτωση αυτή δεν δουλεύει. Εδώ χρησιμοποιούμε τον τύπο του διπλασίου τόξου

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \quad (1)$$

απ' όπου προκύπτουν οι χρήσιμες σχέσεις/αντικαταστάσεις

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}. \quad (2)$$

Κάνοντας χρήση αυτού του αποτελέσματος παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= \int (\sin^2 x)^2 \, dx = \int \left( \frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 \, dx \\ &= \int \frac{1}{4} \left( 1 - 2 \cos(2x) + \cos^2(2x) \right) \, dx \\ &= \int \frac{1}{4} \left( 1 - 2 \cos(2x) + \frac{1 + \cos(4x)}{2} \right) \, dx \\ &= \int \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x) \right) \, dx \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \cos(4x) + C. \end{aligned}$$

3. Δεδομένου ότι  $\sec x = \cos x / (1 - \sin^2 x)$  δείξτε ότι

$$\int \sec x \, dx = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C.$$

**Λύση**

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right).$$

4. **Αναδρομικοί τύποι.** Με ολοκλήρωση κατά μέρη αποδειξτε τις αναδρομικές σχέσεις

$$(\alpha') \int \sin^n x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$(\beta') \int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

**Λύση**

(α') Με παραγοντική ολοκλήρωση

$$\begin{aligned} \int \sin^n x \, dx &= \int \sin^{n-1} x \sin x \, dx \\ &= \int \sin^{n-1} x \, d(-\cos x) \\ &= \sin^{n-1} x (-\cos x) - \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos x (-\cos x) \, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^n x \, dx \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned}n \int \sin^n x \, dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx \Rightarrow \\ \int \sin^n x \, dx &= -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx.\end{aligned}$$

5. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \tan^{-1} x \, dx,$$

θέτοντας  $u = \tan^{-1} x$  και  $v = x$ .

**Λύση**

Από την υπόδειξη έχουμε

$$\begin{aligned}\int \tan^{-1} x \, dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du = (\tan^{-1} x)x - \int x \, d(\tan^{-1} x) \\ &= x \tan^{-1} x - \int x \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c.\end{aligned}$$

6. **Το ολοκλήρωμα της αντίστροφης συνάρτησης.** Έστω ότι για τη συνάρτηση  $f$  υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$ . Αν  $y = f^{-1}(x)$  δείξτε ότι

$$\int f^{-1}(x) \, dx = \int y f'(y) \, dy$$

κατά συνέπεια

$$\int f^{-1}(x) \, dx = y f(y) - \int f(y) \, dy. \quad (3)$$

Χρησιμοποιώντας την (3) υπολογίστε και εκφράστε το αποτέλεσμα ως συνάρτηση του  $x$  καθένα από τα ολοκληρώματα

$$(\alpha) \int \log x \, dx.$$

$$(\beta) \int \sin^{-1} x \, dx.$$

$$(\gamma) \int \tan^{-1} x \, dx.$$

**Λύση**

$$y = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(y) \Rightarrow dx = f'(y) \, dy$$

επομένως

$$\begin{aligned}\int f^{-1}(x) \, dx &= \int y f'(y) \, dy \\ &= y f(y) - \int f(y) \, dy.\end{aligned}$$

(α) Αν  $y = \log x$ , τότε  $y = f^{-1}(x) = \exp^{-1} x$ , όπου  $\exp x = e^x$ , επομένως  $x = f(y) = \exp y$ , κατά συνέπεια σύμφωνα με ό,τι δείξαμε έχουμε

$$\begin{aligned}\int \log x \, dx &= \int \exp^{-1} x \, dx = (\log x)x - \int x \, d \log x \\ &= x \log x - \int x \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \log x - x + c.\end{aligned}$$

7. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{9 - x^2}}, \quad -3 < x < 3.$$

**Λύση**

Βλέπε Σημειώσεις σελίδες 250-251.

8. Δείξτε ότι

$$\int_1^2 \frac{1}{(x^2 - 2x + 4)^{3/2}} \, dx = \frac{1}{6}.$$

**Λύση**

Βλέπε Σημειώσεις σελίδες 251-252.

9. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}}, \quad x > \frac{2}{5}.$$

**Λύση**

Βλέπε Σημειώσεις σελίδα 252.

10. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{3x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 7x + 15}{(x - 1)(x^2 + 4)^2} \, dx.$$

**Λύση**

Ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από αυτόν του αριθμητή οπότε αναλύοντας την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση σε απλά κλάσματα γράφουμε

$$\frac{3x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 7x + 15}{(x - 1)(x^2 + 4)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 4)^2},$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$3x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 7x + 15 = A(x^2 + 4)^2 + (Bx + C)(x - 1)(x^2 + 4) + (Dx + E)(x - 1).$$

Λύνοντας βρίσκουμε  $A = 1$ ,  $B = 2$ ,  $C = 0$ ,  $E = 1$ , επομένως

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 7x + 15}{(x - 1)(x^2 + 4)^2} \, dx &= \int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{2x \, dx}{x^2 + 4} + \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} \\ &= \log |x - 1| + \log(x^2 + 4) + I,\end{aligned}$$

όπου

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}.$$

Για τον υπολογισμό του  $I$  θέτουμε

$$x = 2 \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \text{οπότε} \quad x^2 + 4 = 4(\tan^2 \theta + 1) = 4 \sec^2 \theta$$

άρα

$$\theta = \tan^{-1} \frac{x}{2}, \quad \text{και} \quad dx = 2 \sec^2 \theta d\theta,$$

επομένως

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{16 \sec^4 \theta} = \frac{1}{8} \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{16} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{16} \theta + \frac{1}{32} \sin 2\theta + C \\ &= \frac{1}{16} \theta + \frac{1}{16} \sin \theta \cos \theta + C \end{aligned}$$

κατά συνέπεια

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} &= \frac{1}{16} \tan^{-1} \frac{x}{2} + \frac{1}{16} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}} + C \\ &= \frac{1}{16} \tan^{-1} \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \frac{x}{x^2 + 4} + C. \end{aligned}$$

Έτσι τελικά βρίσκουμε

$$\int \frac{3x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 7x + 15}{(x-1)(x^2+4)^2} dx = \log|x-1| + \log(x^2+4) + \frac{1}{16} \tan^{-1} \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \frac{x}{x^2+4} + C.$$

11. **Αντικαταστάσεις του Euler.** Σε ολοκληρώματα στα οποία η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι της μορφής  $G(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι αντικαταστάσεις

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax}, \quad \text{αν } a > 0$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}, \quad \text{αν } c > 0.$$

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx.$$

**Λύση**

Θέτουμε  $\sqrt{x^2 + 4} = t - x$ , τότε  $t = x + \sqrt{x^2 + 4}$ , επομένως

$$dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\right) dx = \left(1 + \frac{t - \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}}\right) dx = \frac{t}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \Rightarrow \frac{1}{t} dt = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$$

επομένως

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx &= \int \frac{1}{t} dt \\ &= \log|t| + C \\ &= \log|\sqrt{x^2 + 4} + x| + C. \end{aligned}$$

12. **Ανισότητα Cauchy–Schwarz:** Εάν οι  $f$  και  $g$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $[a, b]$ , τότε

$$\left\{ \int_a^b f(x)g(x) dx \right\}^2 \leq \left\{ \int_a^b f^2(x) dx \right\} \left\{ \int_a^b g^2(x) dx \right\}.$$

### Λύση

Η  $fg$  είναι συνεχής άρα ολοκληρώσιμη στο  $[a, b]$  και από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος έχουμε

$$0 \leq \int_a^b (tf(x) + g(x))^2 dx = t^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx$$

για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , κατά συνέπεια η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι μη θετική, δηλαδή

$$\left\{ 2 \int_a^b f(x)g(x) dx \right\}^2 - 4 \left\{ \int_a^b f^2(x) dx \right\} \left\{ \int_a^b g^2(x) dx \right\} \leq 0$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο.

### Παρατήρηση – Βασικό αποτέλεσμα

Δείξαμε (11η Διάλεξη Παράδειγμα 3) ότι

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} +\infty & p \leq 1, \\ 1/(p-1) & p > 1. \end{cases} \quad (4)$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε ως προς τη σύγκλιση το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx.$$

Αν  $p > 0$  η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση απειρίζεται καθώς  $x \rightarrow 0$  ενώ αν  $p \leq 0$  η συνάρτηση είναι συνεχής. Θεωρούμε λοιπόν το ολοκλήρωμα

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^p} dx.$$

με  $0 < \epsilon < 1$  και υπολογίζουμε

(α) Για  $p = 1$ ,

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^p} dx = \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \log x \Big|_{\epsilon}^1 = \log 1 - \log \epsilon = -\log \epsilon \rightarrow +\infty \text{ καθώς } \epsilon \rightarrow 0.$$

(β) Για  $p \neq 1$ ,

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^p} dx = \int_{\epsilon}^1 x^{-p} dx = \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_{\epsilon}^1 = \frac{1}{1-p} (1 - \epsilon^{1-p}).$$

οπότε

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1-p} (1 - \epsilon^{1-p}) = \frac{1}{1-p} (1 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1-p})$$

Αν  $1-p > 0 \Leftrightarrow p < 1$ , τότε  $\epsilon^{1-p} \rightarrow 0$  καθώς  $\epsilon \rightarrow 0$ , ενώ αν  $1-p < 0 \Leftrightarrow p > 1$ , τότε

$$\epsilon^{1-p} = \frac{1}{\epsilon^{p-1}} \rightarrow +\infty \text{ καθώς } \epsilon \rightarrow 0.$$

Έτσι τελικά

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} 1/(1-p) & p \leq 1, \\ +\infty & p > 1. \end{cases} \quad (5)$$

Στην 11η Διάλεξη δείξαμε την περίπτωση  $p = 1/2$ . **Ερώτηση:** Υπάρχει  $p \in \mathbb{R}$  για το οποίο το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

συγκλίνει;

13. Εξετάστε κατά πόσον το ολοκλήρωμα

$$\int_a^{+\infty} x e^{-x} dx,$$

όπου  $a$  είναι πραγματικός αριθμός, συγκλίνει.

**Λύση**

Βλέπε Σημειώσεις σελίδα 271.

14. Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1}.$$

(α) Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει.

(β) Να βρεθεί η τιμή του ολοκληρώματος.

**Λύση**

Παρατηρούμε ότι

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \quad (6)$$

κατά συνέπεια η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι συνεχής και το ολοκλήρωμα είναι δεύτερου είδους.

(α) Θέλουμε να συγκρίνουμε το ολοκλήρωμα με κάποιο το οποίο γνωρίζουμε ότι συγκλίνει, θα προσπαθήσουμε να το συγκρίνουμε με το βασικό (4). Παρατηρούμε ότι

$$x^2 - x + 1 > \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - x + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 > 0$$

που ισχύει, συνεπώς

$$x^2 - x + 1 > \frac{x^2}{2}. \quad (7)$$

Έτσι γράφουμε, για να απομακρυνθούμε από το άκρο 0,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1} &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1} \\ &\leq \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} + \int_1^{+\infty} \frac{2 dx}{x^2} \end{aligned}$$

από την (7)

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} + 2 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι το ολοκλήρωμα Riemann μιας συνεχούς συνάρτησης, άρα υπάρχει (για την ακρίβεια είναι μικρότερο ή ίσο από  $4/3$  από την (6)), και το δεύτερο ολοκλήρωμα συγκλίνει από την (4) ( $p = 2$ ), κατά συνέπεια το δοσμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

(β) Από την (6) έχουμε, εφόσον το ολοκλήρωμα συγκλίνει

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1} &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\frac{3}{4} [\frac{4}{3} (x - \frac{1}{2})^2 + 1]} \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\infty} \frac{d(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}})}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \arctan(+\infty) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

15. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n + 1)^p}, \quad p > 0$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $p$ .

**Λύση**

Συγκρίνουμε με το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(\log x + 1)^p} dx, \quad p > 0.$$

Θέτοντας  $t = \log x + 1$ , έχουμε  $dt = \frac{1}{x} dx$  οπότε

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(\log x + 1)^p} dx = \int_{t(1)}^{t(\infty)} \frac{1}{t^p} dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^p} dt, \quad p > 0.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει για  $p > 1$ , βλέπε (4), επομένως από το κριτήριο του ολοκληρώματος η δοσμένη σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν  $p > 1$ .

16. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$(α) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$(γ) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$(β) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$$

$$(δ) \sum_{n=2}^{\infty} ne^{-n^2}$$

**Λύση**

Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του ολοκληρώματος, έτσι

$$(α) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sim \int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx < \infty, \text{ αφού } p = 3/2 > 1.$$

- (β)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} \sim \int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{y}{e^y} dy < \infty$ , είναι η Άσκηση 13, όπου θέσαμε  $y = \log x \Leftrightarrow x = e^y$  και  $dy = \frac{1}{x} dx$ .
- (γ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \sim \int_1^{\infty} \frac{x}{2^x} dx < \infty$ , τι 2 τι  $e$ , βλέπε (β).
- (δ)  $\sum_{n=2}^{\infty} ne^{-n^2} \sim \int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} e^{-y} dy = -\frac{1}{2}e^{-y} \Big|_1^{\infty} = -0 + \frac{1}{2e}$ , όπου θέσαμε  $y = x^2$ , οπότε  $dy = 2x dx$ .

17. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τα ολοκληρώματα

(α)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx.$

(γ)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx.$

(β)  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^{3/2}} dx.$

(δ)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$

### Λύση

- (α) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$  και για μεγάλα  $x$  συμπεριφέρεται όπως η  $1/\sqrt{x^3}$  για την οποία το σχετικό ολοκλήρωμα υπάρχει, είναι η περίπτωση  $p = 3/2 > 1$ . Ειδικά για  $x \geq 1$  έχουμε

$$\sqrt{x^3} < \sqrt{1+x^3} \leq \sqrt{x^3+x^3},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx. \end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι το ολοκλήρωμα Riemann μιας συνεχούς συνάρτησης και το δεύτερο είναι ένα  $p$ -ολοκλήρωμα δεύτερου είδους με  $p = 3/2 > 1$ , κατά συνέπεια συγκλίνει, επομένως το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

- (β) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$  και για μεγάλα  $x$  συγκρίνεται με την  $x/x^{3/2} = 1/x^{1/2}$  για την οποία το σχετικά ολοκλήρωμα δεν υπάρχει αφού  $p = 1/2 < 1$ . Συγκεκριμένα για  $x \geq 1$  έχουμε

$$x^{3/2} < 1+x^{3/2} \leq 2x^{3/2},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^{3/2}} dx &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^{3/2}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^{3/2}} dx \\ &\geq \int_0^1 \frac{x}{1+x^{3/2}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x}{(2x)^{3/2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^{3/2}} dx + \frac{1}{2^{3/2}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}} dx. \end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπάρχει, αλλά το δεύτερο δεν συγκλίνει αφού  $p = 1/2 < 1$ , κατά συνέπεια το δοσμένο ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

(γ) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση απειρίζεται στο  $x = 0$ , επιπλέον για  $x$  κοντά στο μηδέν η συνάρτηση συγκρίνεται με την  $1/x$  ενώ για μεγάλα  $x$  με την  $1/x\sqrt{x}$ . Έτσι γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx \\ &\geq \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{2}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx.\end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ένα  $p$ -ολοκλήρωμα δεύτερου είδους με  $p = 1$ , άρα αποκλίνει, συνεπώς και το δοσμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει.

(δ) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση απειρίζεται στο  $x = 0$ , επιπλέον για  $x$  κοντά στο μηδέν η συνάρτηση συγκρίνεται με την  $1/\sqrt{x}$ , αφού  $1+x \simeq 1$ , ενώ για μεγάλα  $x$  με την  $1/x\sqrt{x}$ , συγκεκριμένα για  $x \geq 0$  έχουμε

$$\begin{aligned}\sqrt{x}(1+x) &\geq \sqrt{x} \\ \sqrt{x}(1+x) &\geq x\sqrt{x}.\end{aligned}$$

Έτσι γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx \\ &= \frac{1}{1-1/2} + \frac{1}{3/2-1} \\ &= 2 + 1\end{aligned}$$

από τις (4) και (5), συνεπώς και το δοσμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

18. Εξετάστε αν το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x^x} dx$$

συγκλίνει συγκρίνοντάς το με τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{n}\right)^n.$$

**Λύση**

Επειδή  $e = 2.71828182846\dots$  έχουμε ότι

$$\frac{e}{n} \leq \frac{e}{3} < 1, \quad n = 3, 4, \dots$$

Έτσι

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{n}\right)^n &= e + \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{e}{n}\right)^n \\ &\leq e + \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n \quad (\text{γεωμετρική σειρά}) \\ &\leq e + \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{e/3}{1 - e/3} \\ &= e + \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{e}{3 - e},\end{aligned}$$

επομένως η σειρά συγκλίνει. Αν ορίσουμε  $f(x) = (e/x)^x$ ,  $x > 1$ , οι όροι της σειράς είναι οι όροι της ακολουθίας  $f(1), f(2), f(3), \dots$ , επιπλέον η ακολουθία είναι φθίνουσα, επομένως εφαρμόζεται το κριτήριο του ολοκληρώματος κατά συνέπεια αφού η σειρά συγκλίνει έπεται ότι και το ολοκλήρωμα συγκλίνει.

19. Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη μεταξύ των  $p > 0$  και  $q > 0$  ώστε να συγκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^q + 1} dx.$$

**Λύση**

Από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^q + 1} dx &= \int_0^1 \frac{x^p}{x^q + 1} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^p}{x^q + 1} dx \\ &= A + \int_1^{\infty} \frac{x^p}{x^q + 1} dx\end{aligned}$$

όπου  $A$  είναι η τιμή του ολοκληρώματος Riemann της συνεχούς συνάρτησης  $x^p/(x^q + 1)$  στο διάστημα  $[0, 1]$ . Σχετικά με το δεύτερο ολοκλήρωμα παρατηρώντας ότι

$$1 \leq x^q < x^q + 1 \leq x^q + x^q, \quad x \geq 1$$

έχουμε

$$\int_1^{\infty} \frac{x^p}{2x^q} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{x^p}{x^q + 1} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{x^p}{x^q} dx$$

ισοδύναμα

$$\frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{q-p}} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{x^p}{x^q + 1} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{q-p}} dx.$$

Από την τελευταία ανισότητα συμπεραίνουμε ότι το ολοκλήρωμα στη μέση, άρα και το αρχικό, συγκλίνει αν και μόνο εάν τα ολοκληρώματα στα άκρα της ανισότητας συγκλίνουν, ισοδύναμα αν και μόνο αν  $q - p > 1$ , ισοδύναμα αν και μόνο αν  $q > p + 1$ .