

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 09. Παράγωγοι συναρτήσεων ΙΙ

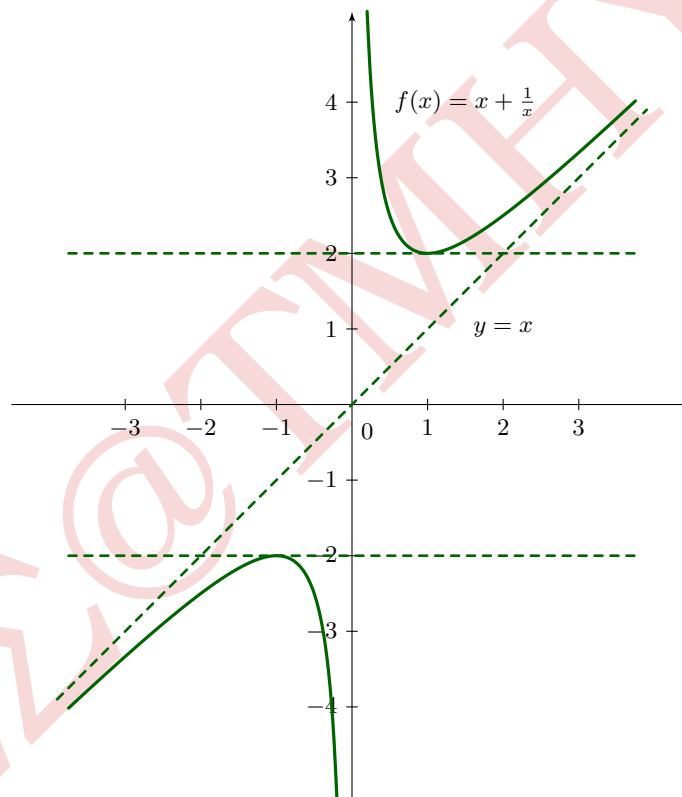
1. **Μια χρήσιμη ανισότητα.** Εάν a, b είναι θετικοί αριθμοί, δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab},$$

ειδικά για $a = b = 1$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Λύση



Σχήμα 1: Άσκηση 1

2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του a ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύει $\sqrt{x} \geq \log x + a$.
3. **Ανισότητα του Young.** Εάν a και b είναι μη αρνητικοί αριθμοί και $p, q > 1$ με $1/p + 1/q = 1$ δείξτε ότι

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Υπόδειξη: Εάν $ab = 0$ η ανισότητα ισχύει. Για $a > 0, b > 0$ θεωρήστε τη

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - bx, \quad x > 0.$$

4. Να εξετασθούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες και αν συγκλίνουν να βρεθούν τα όριά τους.

$$(α) \quad x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

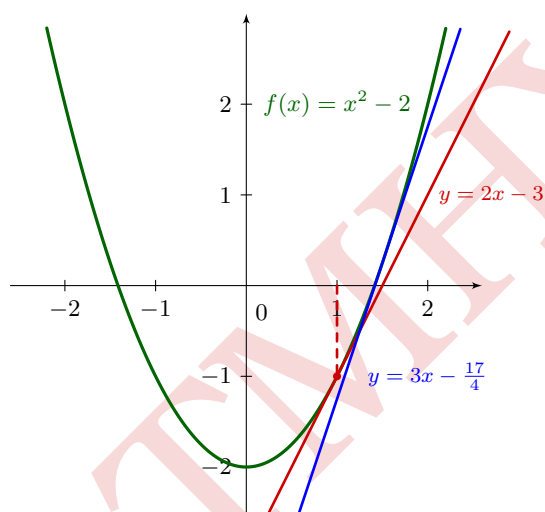
$$(β) \quad x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Λύση

Οι δοσμένες ακολουθίες μπορούν να ιδωθούν ως

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

(α) Η ακολουθία είναι όπως στην (1) με $f(x) = x^2 - 2$, κατά συνέπεια αν συγκλίνει θα πρέπει να συγκλίνει σε μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, ισοδύναμα $x = \pm\sqrt{2}$



Σχήμα 2: Άσκηση 4

5. Τι θα συμβεί αν χρησιμοποιήσετε τον Κανόνα του l'Hospital για να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

Υπολογίστε το όριο με διαφορετικό τρόπο.

6. Να βρεθούν σταθερές a και b , αν υπάρχουν τέτοιες, ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b \right) = 0.$$

7. Εάν ένα αρχικό κεφάλαιο A_0 κατατεθεί με επιτόκιο r και ανατοκίζεται n φορές το χρόνο, το ποσό μετά από t χρόνια θα έχει ανέλθει σε

$$A = A_0 \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}.$$

Στη περίπτωση συνεχούς ανατοκισμού, δηλαδή $n \rightarrow \infty$, δείξτε ότι το τελικό ποσό μετά από t χρόνια θα είναι

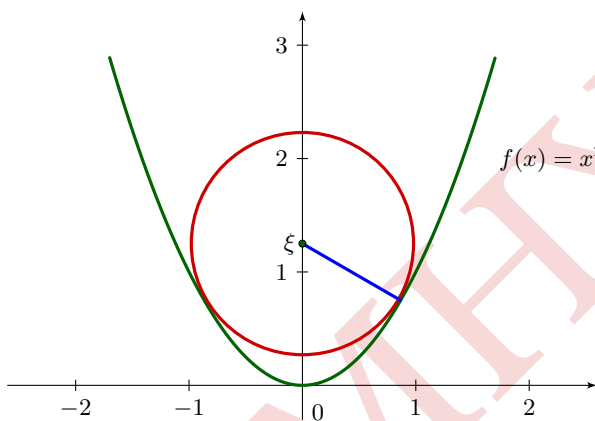
$$A = A_0 e^{rt}.$$

8. **Ένα ιστορικό παράδειγμα.** Η πρώτη εμφάνιση του Κανόνα του l'Hospital σε έντυπη μορφή ήταν στο βιβλίο *Analyse des Infiniment Petits* που εκδόθηκε από τον Μαρκήσιο de l'Hospital το 1696. Αυτό ήταν και το πρώτο βιβλίο Απειροστικού Λογισμού που εκδόθηκε ποτέ. Το παράδειγμα που χρησιμοποίησε ο συγγραφέας για να περιγράψει τη μέθοδο ήταν ο υπολογισμός του ορίου

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}},$$

όπου $a > 0$. Υπολογίστε αυτό το όριο.

9. Περιφέρεια ακτίνας $r = 1$ ισορροπεί στο εσωτερικό της παραβολής $y = x^2$, όπως δείχνει το Σχήμα 3. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου της περιφέρειας, από συμμετρία $(0, \xi)$, καθώς και τα



Σχήμα 3: Άσκηση 9

σημεία τομής της περιφέρειας με την παραβολή.

10. Να υπολογιστούν τα όρια

(α) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} - 5x)^{1/x}.$

(β) $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{3x} - 5x)^{1/x}.$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad a > 0, \quad b > 0.$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)}. \quad a > 0, \quad b > 0.$

(ε) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$

(ς) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x} \sin \frac{1}{\sqrt{x}}.$

(ζ) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\log \frac{1}{x} \right)^x.$

(η) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)}.$

(θ) $\lim_{x \rightarrow 1-} (\log x) \log(1-x).$

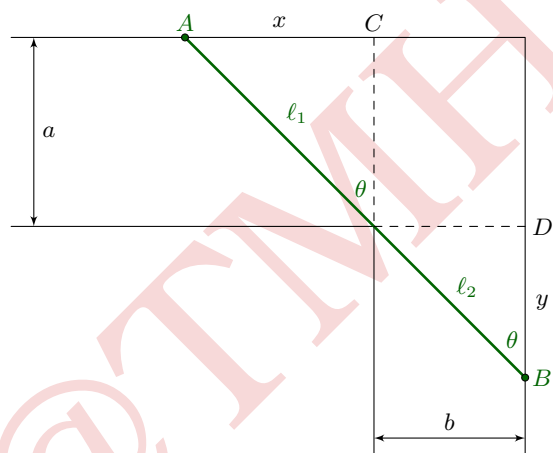
(ι) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{1/\log x}.$

11. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

12. Να βρεθεί το μέγιστο μήκος σκάλας η οποία μπορεί να περάσει από τη γωνία του διαδρόμου με διαστάσεις a και b του Σχήματος 4.

Υπόδειξη: Εκφράστε το μήκος L της σκάλας AB ως συνάρτηση της γωνίας θ που σχηματίζει το τμήμα AB με την κατακόρυφη πλευρά του διαδρόμου.



Σχήμα 4: Άσκηση 12