Γενικά Μαθηματικά Ι

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

27 & 30 Μαΐου 2024

Ορισμοί

Αν $z = x + iy$, τότε

- Το **πραγματικό μέρος** του z είναι ο $\mathrm{Re}\, z = x$.
- Το **φανταστικό μέρος** του z είναι ο $\mathrm{Im}\, z = y$.
- Το **μέτρο** του z είναι ο $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (= η απόσταση του z από το 0).
- Ο **συζυγής** του z είναι ο $\bar{z} = x - iy$.

Συνέπειες

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

(Ε1.) Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί z τέτοιοι ώστε:

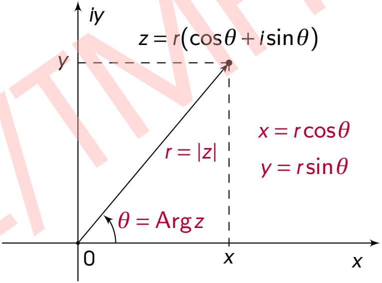
1. $|z - i| = 1$
2. $|z - 2| = |z|$
3. $1 < \mathrm{Re}\, z < 2$
4. $1 < |z| < 2$
5. $|\mathrm{Im}\, z| \geq 1$
6. $\frac{\pi}{6} < \mathrm{Arg}\, z < \frac{\pi}{3}$,

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Εάν $z = x + iy \neq 0$ τότε

$$z = x + iy = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Η **τριγωνομετρική μορφή** του z είναι η έκφραση $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$



Σχήμα: Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού.

Ο τύπος το de Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Έστω $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, τότε

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \qquad n \in \mathbb{N}$$

και αν $z \neq 0$

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{r^n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)], \qquad n \in \mathbb{N}$$

Αν $w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$, η εξίσωση $z^n = w$, με $n \in \mathbb{N}$ έχει n το πλήθος ρίζες τις

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

(Ε2.) Να βρεθούν

1. Οι τρίτες ρίζες του $z = 1$.
2. Οι τέταρτες ρίζες του $z = 1 + i$.

Η εκθετική συνάρτηση, τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ορισμός: Αν $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ορίζουμε

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$
$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$
$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Ιδιότητες: Αν z και w είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε

1. $e^{z+w} = e^z e^w$
2. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$
3. $e^{iy} = \cos y + i\sin y \Rightarrow |e^{iy}| = 1$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Καρτεσιανή, τριγωνομετρική και εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Παρατήρηση

1. Αν $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ και $w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi) = \rho e^{i\phi}$, τότε

$$zw = r\rho(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)) = r\rho e^{i(\theta+\phi)}$$
$$\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho}(\cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi)) = \frac{r}{\rho}e^{i(\theta-\phi)}$$

2. $e^z \neq 0$, αφού $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} > 0$.
3. Η $f(t) = e^{it}$ απεικονίζει την πραγματική ευθεία στον μοναδιαίο κύκλο.

Ορισμός

Για $z \in \mathbb{C}$ ορίζουμε

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \qquad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

με κατάλληλο πεδίο ορισμού για κάθε μία από αυτές.

(E3.) Αποδείξτε ότι

1. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$
2. $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$, για κάθε ζευγάρι $z, w \in \mathbb{C}$
3. $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$, για κάθε ζευγάρι $z, w \in \mathbb{C}$

(E4.) Δείξτε ότι

1. $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = m\pi + \pi/2$, όπου $m \in \mathbb{Z}$.
2. $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = m\pi$, όπου $m \in \mathbb{Z}$.

(E5.) Αποδείξτε κάθε μια από τις σχέσεις

1. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$
2. $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$
3. $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$

(E6.) Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας $z = 2 + iy$, $-\infty < y < +\infty$ μέσω της απεικόνισης $f(z) = e^z$.

(E7.) Να βρεθεί η εικόνα του πρώτου ογδοημορίου μέσω της απεικόνισης $f(z) = z^2$.

(E8.) Αν $z = 2 + 2i$, τότε

1. $\mathrm{Re}(z^{21}) =$
2. $\mathrm{Im}(z^{21}) =$
3. $\mathrm{Arg}(z^{21}) =$

(E9) $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}\, z$, $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}\, z$. Σωστό/Λάθος

(E10.) Αν $z \neq 0$ να βρεθούν οι $\mathrm{Re}(1/z)$, $\mathrm{Im}(1/z)$.

(E11.) Αποδείξτε ότι $|z| = 1$ αν και μόνο αν $1/z = \bar{z}$.

(E12.) Εάν $|a| = 1$, ή $|b| = 1$, δείξτε ότι

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1.$$

(E13.) Απαντήστε στα ερωτήματα

- Αν $\lim_{x\to\delta} 3^x = 1$, τότε $\delta =$
- Αν $\lim_{x\to\delta} 3^x = 2$, τότε $\delta =$
- Αν $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, τότε $|r| < 1$. Σωστό/Λάθος
- Αν $\delta > 0$, και $\lim_{n\to\infty} (1+\delta)^{an} = 0$, τότε $a < 0$. Σωστό/Λάθος

(E14.) Για ποια τιμή του c η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - \frac{c}{x}$$

1. εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 2$;
2. εμφανίζει σημείο καμπής στο $x = 1$;
3. είναι αύξουσα στο $(0, +\infty)$;

(E15.) Να βρεθούν όλες οι τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε

$$|x^7 - y^7| \leq 7|x - y|.$$

(E16.) Δίνεται η $f(x) = 3\log(x+1)$, όπου $x > -1$.

1. Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού για την f με κέντρο το $x = 0$.
2. Εκτιμήστε την ακρίβεια της προσέγγισης της f με το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού στο διάστημα $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

(E17.) **Σκεφτείτε γεωμετρικά, ένα σχήμα βοηθάει.** Το Θεώρημα Μέσης Τιμής είναι χρήσιμο. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$, υπολογίστε

1. $$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)\,dx =$$
2. $$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)\,dx =$$

(Ε18.) Για $t > 0$ και $L > 0$ θέτουμε

$$A_L(t) = \int_0^L e^{-tx}\,dx.$$

1. Υπολογίστε το $A_L(t)$.
2. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{L \to +\infty} A_L(t).$$

3. Επιλέξτε κυκλώνοντας το σωστό χαρακτηρισμό
   - $L_1 < L_2 \Rightarrow \int_0^{L_1} e^{-tx}\,dx < \int_0^{L_2} e^{-tx}\,dx.$ Σωστό/Λάθος
   - $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx = \lim_{L \to +\infty} A_L(t).$ Σωστό/Λάθος
   - $\frac{d}{dL} \int_0^L e^{-tx}\,dx = e^{-tL}.$ Σωστό/Λάθος

(E19.) Να προσδιοριστούν όλες οι λύσεις της εξίσωσης

$$y' + 3ty = t.$$

(E20.) Έχει παρατηρηθεί ότι αν ο πληθυσμός ελαφιών σε μια περιοχή πέσει κάτω από ένα ορισμένο επίπεδο m το είδος απειλείται με εξαφάνιση, ενώ αν υπερβεί μια ορισμένη οριακή τιμή M ο πληθυσμός θα ελαπτωθεί ξανά προς το M εξαιτίας ασθενιών και κακής διατροφής.

1. Εξετάστε αν το μοντέλο εξέλιξης του πληθυσμού

$$\frac{dP}{dt} = rP(M-P)(P-m),$$

όπου r είναι μια θετική σταθερά αναλογίας, περιγράφει την εξέλιξη του πληθυσμού.

2. Επιλύστε την εξίσωση και επιβεβαιώστε την ορθότητα του μοντέλου.

Λύση στο 2.

• Οι $P = M$, $P = m$ και $P = 0$ είναι λύσεις της εξίσωσης.

• Η συνάρτηση $f(P)$ στο δεξιό μέλος της εξίσωσης ικανοποιεί τις συνθήκες που εξασφαλίζουν μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών, έτσι αν $P_0 \notin \{0, m, M\}$ η λύση P δεν παίρνει ποτέ κάποια από τις τρεις αυτές τιμές. Για μια τέτοια P γράφουμε την εξίσωση ως

$$\int \frac{dP}{P(M-P)(P-m)} = \int r\,dt \tag{1}$$

Αναλύοντας σε απλά κλάσματα

$$\frac{1}{P(M-P)(P-m)} = \frac{a}{P} + \frac{b}{M-P} + \frac{c}{P-m}$$

βρίσκουμε

$$a = -\frac{1}{mM}, \qquad b = \frac{1}{M(M-m)}, \qquad c = \frac{1}{m(M-m)}$$

και η (1) γίνεται

$$-\frac{1}{mM}\int\frac{dP}{P}+\frac{1}{M(M-m)}\int\frac{dP}{M-P}+\frac{1}{m(M-m)}\int\frac{dP}{P-m}=rt+c$$

απ΄ όπου θέτοντας $\mu = mM(M-m)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}-(M-m)\log|P|-m\log|M-P|+M\log|P-m| &= \mu rt+\mu c\\ M(\log|P-m|-\log|P|)-m(\log|M-P|-\log|P|) &= \mu rt+C\end{aligned}$$

ή

$$M\log|1-m/P|-m\log|M/P-1|=\mu rt+C$$

ή

$$\log\frac{|1-m/P|^M}{|M/P-1|^m}=\mu rt+C\Rightarrow\frac{|1-m/P|^M}{|1-M/P|^m}=e^Ce^{\mu rt}=Ae^{\mu rt}$$

όπου A μια σταθερά που προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες.

Για παράδειγμα αν $m < P_0 < M$, όπου $P_0 = P(0)$, τότε από την ανάλυση που έγινε στην τάξη θα είναι $m < P(t) < M$ και η λύση δίνεται από την

$$\left(1 - \frac{m}{P}\right)^M = \left(\frac{M}{P} - 1\right)^m A e^{\mu r t}$$

απ΄ όπου υπολογίζεται το A και συνάγεται ότι καθώς $t \to \infty$ θα πρέπει $P(t) \to M$, και μάλιστα, εκθετικά ώστε να μην απειρίζεται το δεξιό μέλος της εξίσωσης.

(E21.) Υποθέστε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και ότι $a_n \geq 0$.

- Σωστό/Λάθος. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ συγκλίνει.

$$0 \leq \frac{a_n}{n} \leq a_n \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$$

- Σωστό/Λάθος. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει απολύτως αν $x \in (-1,1)$.

$x \in (-1,1)$, οπότε $0 \leq |a_n x^n| \leq a_n \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$

- Σωστό/Λάθος. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 0$.

Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, επομένως $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, οπότε $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 0$

- Σωστό/Λάθος. Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει.

Αφού $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, υπάρχει N ώστε $a_n < 1$, για $n \geq N$, έτσι $0 \leq a_n^2 \leq a_n$ για $n \geq N$, επομένως $0 \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n < +\infty$, άρα $0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty$

(Ε22.) Η εξίσωση

$$\frac{2}{\pi}\arctan x = \sin x$$

έχει άπειρες ρίζες στους πραγματικούς αριθμούς.

(Ε23.) Για ποιά a είναι η συνάρτηση $f(x) = ax + \cos x$ αύξουσα, φθίνουσα, ή τίποτα από τα δύο;

$f'(x) = a - \sin x$ και $-1 \leq \sin x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, κατά συνέπεια

1. Αύξουσα $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $a \geq \sin x$ $\Leftrightarrow$ $a \geq 1$
2. Φθίνουσα $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ $\Leftrightarrow$ $a \leq \sin x$ $\Leftrightarrow$ $a \leq -1$
3. Μη μονότονη $\Leftrightarrow$ η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο $\Leftrightarrow$ $-1 < a < 1$

(E24.) Εξετάστε για ποιά $p > 0$ το ολοκλήρωμα

$$I(p) = \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^p}\, dx$$

συγκλίνει.

Είναι

$$I(p) = \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^p}\, dx = \lim_{\xi \to +\infty} \int_1^{\xi} \frac{\log x}{x^p}\, dx.$$

- Για $p = 1$ και $y = \log x$ έχουμε

$$\int_1^{\xi} \frac{\log x}{x}\, dx = \int_0^{\log \xi} y\, dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\log \xi} = \frac{1}{2}(\log \xi)^2 \to +\infty \quad \text{καθώς } \xi \to +\infty.$$

- Για $p \neq 1$

$$\int_1^{\xi} \frac{\log x}{x^p}\,dx = \int_1^{\xi} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)' \log x\,dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\log x\Big|_1^{\xi} - \int_1^{\xi} \frac{x^{1-p}}{1-p}\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{p-1}\left(-\frac{\log\xi}{\xi^{p-1}} + \int_1^{\xi}\frac{1}{x^p}\,dx\right) = \frac{1}{p-1}\left[-\frac{\log\xi}{\xi^{p-1}} + \frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{\xi^{p-1}}\right)\right]$$

Αν $p < 1$ και τα δύο κλάσματα που εξαρτώνται από το p αποκλίνουν στο $+\infty$ καθώς $\xi \to +\infty$, άρα $I(p) = +\infty$ (γιατί;).
Αν $p > 1$ γράφουμε $p-1 = q > 0$ και

$$\lim_{\xi\to+\infty}\frac{\log\xi}{\xi^q} = \lim_{\xi\to+\infty}\frac{1/\xi}{q\xi^{q-1}} = \lim_{\xi\to+\infty}\frac{1}{q\xi^q} = 0 \qquad \text{(L'Hospital)}$$

$$\lim_{\xi\to+\infty}\frac{1}{\xi^q} = 0$$

Άρα το ολοκλήρωμα συγκλίνει για $p > 1$ και στην περίπτωση αυτή $I(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2}$.

(E25.) Υπολογίστε το όριο της σειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$.

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

άρα η σειρά είναι τηλεσκοπική, αφού $2n \pm 1 \in \mathbb{N}$, έτσι

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N+1} \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2N+1} \right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(E26.) Δείξτε ότι

$$ax \leq \frac{a^6}{6} + \frac{5}{6}x^{6/5}$$

για κάθε $x > 0$ όπου $a > 0$.

Ορίζοντας

$$f(x) = \frac{a^6}{6} - ax + \frac{5}{6}x^{6/5}$$

αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$. Υπολογίζουμε

$$f'(x) = -a + x^{1/5} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a^5.$$

Αν $x < a^5$, τότε $f'(x) < 0$, επομένως η f είναι φθίνουσα στο $(0, a^5)$, ενώ αν $x > a^5$, τότε $f'(x) > 0$, επομένως η f είναι αύξουσα στο $(a^5, +\infty)$. Κατά συνέπεια η f έχει ελάχιστο στο $x = a^5$, επομένως $f(x) \geq f(a^5)$, ισοδύναμα

$$\frac{a^6}{6} - ax + \frac{5}{6}x^{6/5} \geq \frac{a^6}{6} - a^6 + \frac{5}{6}a^6 = 0,$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.