Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΑΑΕΣ 27 Ιουνίου 2023

16/22-23

Στοιχεία Εξεταζόμενου/ης		
ΕΠΩΝΥΜΟ :	ΟΝΟΜΑ :	
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ :	ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ :	2023
ΑΙΘΟΥΣΑ : ΑΦΕ	ΣΤΗΛΗ :	ΜΟΝΑΔΕΣ:

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

Στο διαγώνισμα υπάρχουν τριών ειδών ερωτήσεις που απαρτίζουν έξι θέματα.

1. Ερωτήσεις με την ένδειξη ■. Σε αυτά πρέπει να δώσετε τη λύση με ένα σύντομο υπολογισμό, ή δίχως αιτιολόγηση αν κρίνετε ότι δεν χρειάζεται.
2. Ερωτήσεις με την ένδειξη ○. Αυτά είναι ερωτήματα του τύπου σωστό/λάθος και καλείσθε να γράψετε στον κύκλο "Σ" για σωστό ή "Λ" για λάθος.
3. Ερωτήσεις στις οποία καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά "οικονομική απόδειξη-λύση" για το ζητούμενο στο χώρο που παρέχεται.

Σε όλες τις περιπτώσεις συστήνεται και σε κάποιες επιβάλλεται να "δουλέψετε" κάθε ερώτηση ή υποερώτηση στο πρόχειρο ώστε η απάντησή σας να μην είναι τυχαία.
Ερωτήσεις του τύπου 1 και 2 είναι ισοδύναμες.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες. Η παράδοση των γραπτών αρχίζει 1 ώρα μετά από την έναρξη της εξέτασης.

Καλή Επιτυχία!

Σε οποιοδήποτε πρόβλημα με τριγωνομετρικές συναρτήσεις ο τριγωνομετρικός κύκλος δίνει πολλές πληροφορίες και αναμφισβήτητα βοηθάει.

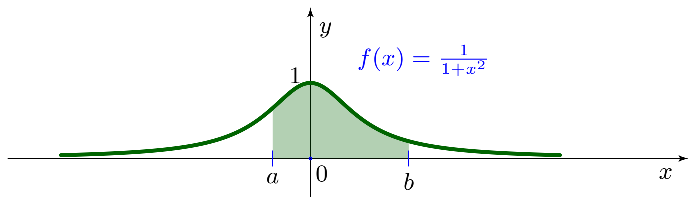
Τριγωνομετρικοί αριθμοί κάποιων γωνιών					
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Λύσεις. Σύμπτυξη διαφορετικών εκδοχών

Θ1. Δώστε την απάντηση.

■ $\lim\limits_{N\to\infty}\displaystyle\int_{-N}^{N}\frac{1}{1+kx^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, όπου $k=2,3$.

Γνωρίζουμε ότι $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}>0$ και



επομένως

$$\int_a^b\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan b-\arctan a,$$

κατά συνέπεια

$$\int_{-N}^{N}\frac{1}{1+kx^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-N}^{N}\frac{1}{1+(\sqrt{k}x)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{k}}\int_{-N\sqrt{k}}^{N\sqrt{k}}\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\to\frac{1}{\sqrt{k}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{\pi}{\sqrt{k}}.$$

αφού $\arctan(\pm\infty)=\pm\pi/2$.

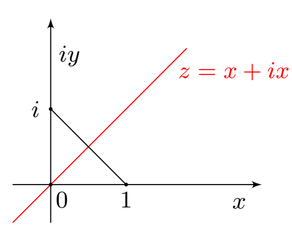
■ $$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=1.$$

■ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n+m}\right)^n=e^k$, όπου k,m είναι σταθεροί φυσικοί αριθμοί.

Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n=e^k$, επομένως

$$\left(1+\frac{k}{n+m}\right)^n=\left(1+\frac{k}{n+m}\right)^{n+m}\frac{1}{\left(1+\dfrac{k}{n+m}\right)^m}\to e^k\frac{1}{1}=e^k$$

■ Αν z είναι μιγαδικός αριθμός και $|z-i|=|z-1|$, τότε $z=x+ix$ με $x\in\mathbb{R}$.



Οι ζητούμενοι μιγαδικοί αριθμοί βρίσκονται πάνω στη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τους αριθμούς 1 και i, που είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου με κορυφές τα σημεία 0, 1 και i, άρα η μεσοκάθετος είναι η διχοτόμος $y=x$.

■ Εάν $a \in \mathbb{R}$, η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(4a^2)^{-n/2}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $|a| > 1/2$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(4a^2)^{-n/2} = \sum_{n=0}^{\infty}(2|a|)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2|a|}\right)^n$$

που είναι γεωμετρική σειρά άρα συγκλίνει αν και μόνο αν $1/(2|a|) < 1$ ισοδύναμα αν και μόνο αν $|a| > 1/2$.

■ $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^p}\,\mathrm{d}x < \infty$ αν και μόνο αν $p > 4/3$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^p}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x + \int_1^{\infty} \frac{x^{1/3}}{x^p}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{p-1/3}}\,\mathrm{d}x$$

οπότε θέλουμε $p > 1$ και $p - 1/3 > 1$.

Θ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 \pm a\cos x$, όπου $a \neq 0$.

(α΄) Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού P_2 που προσεγγίζει την f σε ένα διάστημα $(-\epsilon, \epsilon)$.

Θεωρούμε την περίπτωση $f(x) = 1 - a\cos x$, και υπολογίζουμε

$$f'(x) = a\sin x, \qquad f''(x) = a\cos x, \qquad f'''(x) = -a\sin x$$

επομένως $f(0) = 1 - a$, $f'(0) = 0$ και $f''(0) = a$, κατά συνέπεια

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 - a + \frac{a}{2}x^2$$

(β΄) Να εκτιμηθεί το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης της f από το P_2 στο διάστημα $(-\pi/4, \pi/4)$.

Αν $R_2(x)$ είναι το υπόλοιπο Taylor, τότε $f(x) - P_2(x) = R_2(x)$ για κάθε $x \in (-\pi/4, \pi/4)$, ισοδύναμα

$$\begin{aligned}\Big|f(x) - P_2(x)\Big| &= \left|\frac{-a\sin\xi}{3!}x^3\right|, \qquad \text{για κάποιο } \xi \text{ μεταξύ } 0 \text{ και } x\\ &\le \frac{|a|}{6}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|x^3|\\ &\le \frac{|a|}{6\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\\ &< 0.0571|a|.\end{aligned}$$

Σημείωση:

$$\begin{aligned}f(x) - P_2(x) &= 1 - a\cos x - \left(1 - a + \frac{a}{2}x^2\right)\\ &= -a\left(\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2\right).\end{aligned}$$

Βλέπε Διάλεξη 07 σελίδες 30,31.

Θ3. Γράψτε Σ για σωστό ή Λ για λάθος στο λευκό κυκλάκι.

Σ Αν $0 < a < b$, τότε $\displaystyle\int_0^L \ln(a+x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^L \ln(b+x)\,\mathrm{d}x$, για κάθε $L > 0$.

$a + x < b + x \Rightarrow \ln(a+x) < \ln(b+x)$, αφού η $\ln$ είναι αύξουσα, και το αποτέλεσμα έπεται από την ιδιότητα του ολοκληρώματος $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$ ($\alpha < \beta$).

Σ Αν $0 < a < b$, τότε $\displaystyle\int_0^a \ln(L+x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^b \ln(L+x)\,\mathrm{d}x$, για κάθε $L \ge 1$.

$L \ge 1 \Rightarrow L + x \ge 1 \Rightarrow \ln(L+x) \ge 0$, για κάθε $x \ge 0$, και το αποτέλεσμα έπεται από το την ιδιότητα του ολοκληρώματος $f(x) \ge 0 \Rightarrow \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ ($\alpha < \beta$).

Σ Αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{1+\sqrt{|a_n|}}$ συγκλίνει.

Επειδή

$$\left|\frac{a_n}{1+\sqrt{|a_n|}}\right| \le |a_n|$$

και η σειρά $\sum_{n=0}^\infty |a_n|$ συγκλίνει έπεται ότι και η δοσμένη σειρά συγκλίνει απολύτως, κατά συνέπεια συγκλίνει.

Σ Αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{1+a_n^2}$ συγκλίνει.

Όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

Λ Αν η f είναι συνεχής, $f \ge 0$ και $f(x) \to 0$, καθώς $x \to \infty$, τότε $\displaystyle\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^{2/3}}\,dx < \infty$.

Αν $f(x) = 1/x^r$ ώστε $r + 2/3 < 1$, ισοδύναμα $r < 1/3$, η f ικανοποιεί τις υποθέσεις και το ολοκλήρωμα είναι p ολοκλήρωμα με $p < 1$ άρα αποκλίνει.

Λ Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(n\pi)}{n^p}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

Επειδή $\cos(n\pi) = (-1)^n$ η σειρά είναι εναλλασσόμενη

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(n\pi)}{n^p} = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{n^p}$$

όπου για $p > 0$ είναι $1/n^p > 1/(n+1)^p$ και $1/n^p \to 0$, κατά συνέπεια από το κριτήριο του Leibniz η σειρά συγκλίνει εφόσον $p > 0$.

Σ $\displaystyle\left|\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(a+x)\,\mathrm{d}x\right| \le \pi$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

$$\left|\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(a+x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos(a+x)|\,\mathrm{d}x \le \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Σ Αν ο z είναι μιγαδικός αριθμός, τότε $|e^z| \le e^{|z|}$.

Αν $z = x + iy$, τότε $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$, επομένως

$$|e^z| = e^x \le e^{|x|} = e^{\sqrt{x^2}} \le e^{\sqrt{x^2+y^2}} = e^{|z|}.$$

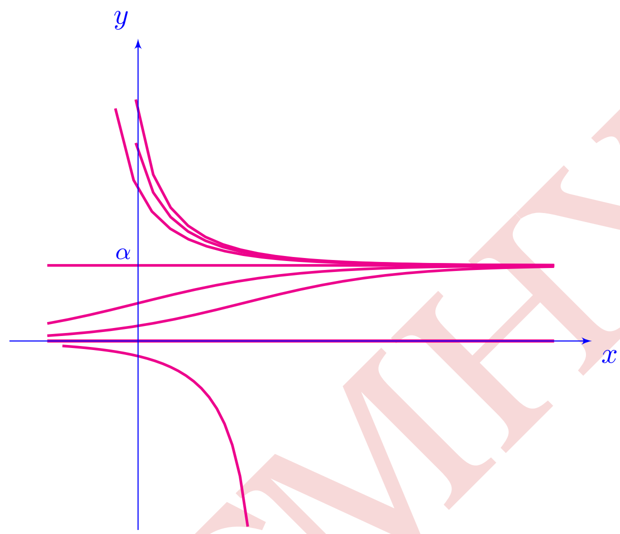
Θ4. Δίνεται η εξίσωση (Διάλεξη 12 σελίδες 16-18, και Επαναληπτικές Ασκήσεις ΙΙ σελίδες 9-11.)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(\alpha - y),$$

όπου α είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του αριθμού μητρώου σας.

(α΄) Σε ένα γράφημα δώστε τη συμπεριφορά των λύσεων, καθώς $x \to +\infty$, ανάλογα με την αρχική συνθήκη $y(0) = y_0$.

Παρατηρούμε ότι οι $y = 0$ και $y = \alpha$ ικανοποιούν την εξίσωση, είναι δηλαδή λύσεις. Για $y \neq 0$ και $y \neq \alpha$ παρατηρούμε ότι: αν $y > \alpha$, τότε $y' = y(\alpha - y) < 0$, άρα η y είναι φθίνουσα, αν $0 < y < \alpha$, τότε $y' > 0$, άρα η y είναι αύξουσα και τέλος αν $y < 0$, τότε $y' < 0$, άρα η y είναι φθίνουσα. Η συμπεριφορά αποτυπώνεται στο σχήμα



(β΄) Να βρεθούν **όλες** οι λύσεις της εξίσωσης.

Αναφέραμε ότι οι $y = 0$ και $y = \alpha$ είναι λύσεις της εξίσωσης. Αν $y \neq 0$ και $y \neq \alpha$ η εξίσωση γίνεται

$$\frac{y'}{y(\alpha - y)} = 1 \Rightarrow \int \frac{y'}{y(\alpha - y)}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x$$

Επειδή (γιατί;)

$$\frac{1}{y(\alpha - y)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{\alpha - y}\right)$$

παίρνουμε

$$\frac{1}{\alpha}\left(\int \frac{y'}{y}\,\mathrm{d}x + \int \frac{y'}{\alpha - y}\,\mathrm{d}x\right) = \int \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\Big(\log|y| - \log|\alpha - y|\Big) = x + c$$

$$\log\left|\frac{y}{\alpha - y}\right| = \alpha x + \alpha c \Rightarrow \frac{y}{\alpha - y} = \pm e^{\alpha x} e^{\alpha c} = k e^{\alpha x}$$

οπότε

$$y = (\alpha - y) k e^{\alpha x} \Rightarrow y(1 + k e^{\alpha x}) = \alpha k e^{\alpha x} \Rightarrow y = \frac{\alpha k e^{\alpha x}}{1 + k e^{\alpha x}}$$

συνεπώς

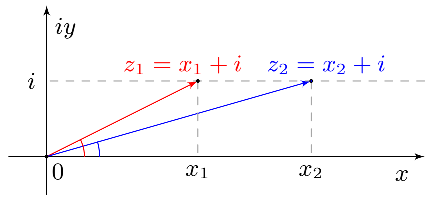
$$y(0) = y_0 = \frac{\alpha k}{1 + k} \Rightarrow k = \frac{y_0}{\alpha - y_0}$$

έτσι τελικά βρίσκουμε

$$y = \frac{\alpha y_0}{y_0 + (\alpha - y_0) e^{-\alpha x}}.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτουν, για $y_0 = 0$ και $y_0 = \alpha$, αντίστοιχα, οι σταθερές λύσεις $y = 0$ και $y = \alpha$ αλλά και η συμπεριφορά των λύσεων στο σχήμα του πρώτου μέρους.

Θ5. Ένα σχήμα είναι χρήσιμο. Εάν $x > 0$, ορίζουμε $z = x + i$.



(α΄) ■ $|z| = \sqrt{x^2+1}$, από το σχήμα.

(β΄) ■ Αν $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, τότε

i. $r = \sqrt{x^2+1}$.

ii. $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, από το ορθογώνιο τρίγωνο.

iii. $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, από το ορθογώνιο τρίγωνο.

(γ΄) ■ $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Arg}(z) = 0$, από το σχήμα. Η γωνία μικραίνει καθώς $x \to \infty$.
Διαφορετικά από τα ii. και iii. έπεται ότι

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{x} \Rightarrow \theta = \arctan\frac{1}{x}$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Arg}(z) = \lim_{x\to\infty} \theta = \lim_{x\to\infty} \arctan\frac{1}{x} = \arctan 0 = 0.$$

(δ΄) ■ Η εκθετική μορφή ($z = re^{i\theta}$) του z είναι $z = (\sqrt{x^2+1})e^{i\arctan(1/x)}$, από το προηγούμενο βήμα.

Η εκδοχή, $z = x - i$ λύνεται με ανάλογο τρόπο.

Θ6. Να βρεθεί ανοικτό διάστημα μέγιστου μήκους ώστε

$$|\cos x - \cos y| > \frac{1}{2}|x - y|$$

για όλα τα σημεία x, y του διαστήματος.

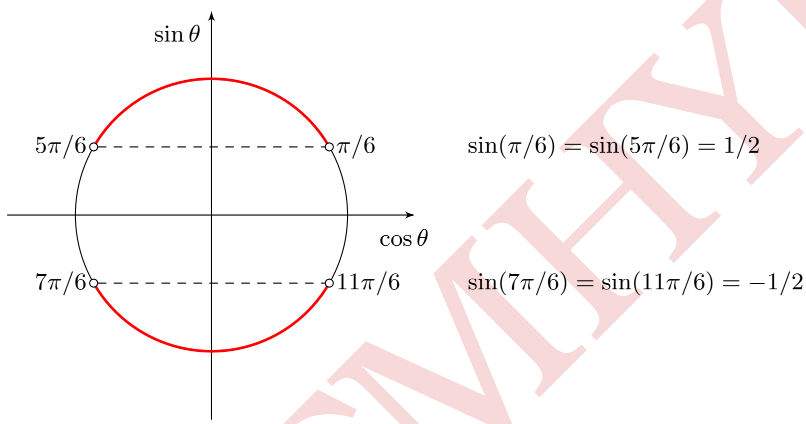
Από το θεώρημα της μέσης τιμής έχουμε

$$\cos x - \cos y = -\sin\xi(x - y)$$

για κάποιο ξ μεταξύ x και y, οπότε για να ισχύει η ζητούμενη σχέση θέλουμε

$$|-\sin\xi| = |\sin\xi| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \xi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right),$$

αν περιοριστούμε στο $[0, 2\pi]$, αφού ενδιαφερόμαστε για ένα μόνο διάστημα.



Αν $x, y \in (\pi/6, 5\pi/6)$, ή $x, y \in (7\pi/6, 11\pi/6)$, τότε και το ξ αφού είναι μεταξύ τους θα περιέχεται στο αντίστοιχο διάστημα, οπότε θα ικανοποιείται η ζητούμενη ανισότητα. Το καθένα από τα δύο αυτά διαστήματα είναι το μέγιστο δυνατό, μήκους $4\pi/3$, έτσι μπορούμε να πάρουμε το $(\pi/6, 5\pi/6)$, για παράδειγμα.

Το σύνολο όλων των x, y για τα οποία ισχύει η ανισότητα είναι η ένωση διαστημάτων

$$E = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{5\pi}{6}\right).$$

Η εκδοχή, $|\sin x - \sin y| > \dfrac{1}{2}|x - y|$ λύνεται με ανάλογο τρόπο.