

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Εαρινό εξάμηνο 2024

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ 09: Ολοκληρώματα**

1. Αν η  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx.$$

2. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

(α)  $\int \sin^5 x dx.$

(β)  $\int \sin^4 x dx.$

**Λύση**

(α) Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x dx &= \int \sin^4 x \sin x dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx && u = \cos x, \quad du = -\sin x dx \\ &= \int -(1 - u^2)^2 du \\ &= \int (-1 + 2u^2 - u^4) du \\ &= -u + \frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C \\ &= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C. \end{aligned}$$

(β) Μια διαδικασία ανάλογη αυτής που ακολουθήθηκε στο (α) στη περίπτωση αυτή δεν δουλεύει. Εδώ χρησιμοποιούμε τον τύπο του διπλασίου τόξου

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \quad (1)$$

από όπου προκύπτουν οι χρήσιμες σχέσεις/αντικαταστάσεις

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}. \quad (2)$$

Κάνοντας χρήση αυτού του αποτελέσματος παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \, dx &= \int (\sin^2 x)^2 \, dx = \int \left( \frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 \, dx \\ &= \int \frac{1}{4} (1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)) \, dx \\ &= \int \frac{1}{4} \left( 1 - 2\cos(2x) + \frac{1 + \cos(4x)}{2} \right) \, dx \\ &= \int \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x) \right) \, dx \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\cos(4x) + C.\end{aligned}$$

3. Δεδομένου ότι  $\sec x = \cos x / (1 - \sin^2 x)$  δείξτε ότι

$$\int \sec x \, dx = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C.$$

4. **Αναδρομικοί τύποι.** Με ολοκλήρωση κατά μέρη αποδείξτε τις αναδρομικές σχέσεις

$$(\alpha) \int \sin^n x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$(\beta) \int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

5. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \tan^{-1} x \, dx,$$

θέτοντας  $u = \tan^{-1} x$  και  $v = x$ .

6. **Το ολοκλήρωμα της αντίστροφης συνάρτησης.** Έστω ότι για τη συνάρτηση  $f$  υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$ . Αν  $y = f^{-1}(x)$  δείξτε ότι

$$\int f^{-1}(x) \, dx = \int y f'(y) \, dy$$

κατά συνέπεια

$$\int f^{-1}(x) \, dx = y f(y) - \int f(y) \, dy. \quad (3)$$

Χρησιμοποιώντας την (3) υπολογίστε και εκφράστε το αποτέλεσμα ως συνάρτηση του  $x$  καθένα από τα ολοκληρώματα

$$(\alpha) \int \log x \, dx.$$

$$(\beta) \int \sin^{-1} x \, dx.$$

$$(\gamma) \int \tan^{-1} x \, dx.$$

7. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{9 - x^2}}, \quad -3 < x < 3.$$

8. Δείξτε ότι

$$\int_1^2 \frac{1}{(x^2 - 2x + 4)^{3/2}} dx = \frac{1}{6}.$$

9. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}}, \quad x > \frac{2}{5}.$$

10. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{3x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 7x + 15}{(x-1)(x^2+4)^2} dx.$$

### Λύση

Ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από αυτόν του αριθμητή οπότε αναλύοντας την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση σε απλά κλάσματα γράφουμε

$$\frac{3x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 7x + 15}{(x-1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2},$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$3x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 7x + 15 = A(x^2+4)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+4) + (Dx+E)(x-1).$$

Λύνοντας βρίσκουμε  $A = 1$ ,  $B = 2$ ,  $C = 0$ ,  $E = 1$ , επομένως

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 7x + 15}{(x-1)(x^2+4)^2} dx &= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2x dx}{x^2+4} + \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} \\ &= \log|x-1| + \log(x^2+4) + I, \end{aligned}$$

όπου

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+4)^2}.$$

Για τον υπολογισμό του  $I$  θέτουμε

$$x = 2 \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \text{οπότε} \quad x^2 + 4 = 4(\tan^2 \theta + 1) = 4 \sec^2 \theta$$

άρα

$$\theta = \tan^{-1} \frac{x}{2}, \quad \text{και} \quad dx = 2 \sec^2 \theta d\theta,$$

επομένως

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{16 \sec^4 \theta} = \frac{1}{8} \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{16} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{16} \theta + \frac{1}{32} \sin 2\theta + C \\ &= \frac{1}{16} \theta + \frac{1}{16} \sin \theta \cos \theta + C \end{aligned}$$

κατά συνέπεια

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} &= \frac{1}{16} \tan^{-1} \frac{x}{2} + \frac{1}{16} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} + C \\ &= \frac{1}{16} \tan^{-1} \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \frac{x}{x^2+4} + C.\end{aligned}$$

Έτσι τελικά βρίσκουμε

$$\int \frac{3x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 7x + 15}{(x-1)(x^2+4)^2} dx = \log|x-1| + \log(x^2+4) + \frac{1}{16} \tan^{-1} \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \frac{x}{x^2+4} + C.$$

11. **Αντικαταστάσεις του Euler.** Σε ολοκληρώματα στα οποία η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι της μορφής  $G(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι αντικαταστάσεις

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2 + bx + c} &= t - \sqrt{ax}, & \text{αν } a > 0 \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} &= xt + \sqrt{c}, & \text{αν } c > 0.\end{aligned}$$

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx.$$

**Λύση**

Θέτουμε  $\sqrt{x^2+4} = t - x$ , τότε  $t = x + \sqrt{x^2+4}$ , επομένως

$$dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right) dx = \left(1 + \frac{t - \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}\right) dx = \frac{t}{\sqrt{x^2+4}} dx \Rightarrow \frac{1}{t} dt = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx$$

επομένως

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx &= \int \frac{1}{t} dt \\ &= \log|t| + C \\ &= \log|\sqrt{x^2+4} + x| + C.\end{aligned}$$

12. **Ανισότητα Cauchy-Schwarz:** Εάν οι  $f$  και  $g$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $[a, b]$ , τότε

$$\left\{ \int_a^b f(x)g(x) dx \right\}^2 \leq \left\{ \int_a^b f^2(x) dx \right\} \left\{ \int_a^b g^2(x) dx \right\}.$$

**Λύση**

Η  $fg$  είναι συνεχής άρα ολοκληρώσιμη στο  $[a, b]$  και από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος έχουμε

$$0 \leq \int_a^b (tf(x) + g(x))^2 dx = t^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx$$

για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , κατά συνέπεια η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι μη θετική, δηλαδή

$$\left\{ 2 \int_a^b f(x)g(t) dx \right\}^2 - 4 \left\{ \int_a^b f^2(x) dx \right\} \left\{ \int_a^b g^2(x) dx \right\} \leq 0$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο.

### Παρατήρηση - Βασικό αποτέλεσμα

Δείξαμε (11η Διάλεξη σελ.26,27) ότι

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} +\infty & p \leq 1, \\ 1/(p-1) & p > 1. \end{cases} \quad (4)$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε ως προς τη σύγκλιση το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx.$$

Αν  $p > 0$  η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση απειρίζεται καθώς  $x \rightarrow 0$  ενώ αν  $p \leq 0$  η συνάρτηση είναι συνεχής. Θεωρούμε λοιπόν το ολοκλήρωμα

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^p} dx.$$

με  $0 < \epsilon < 1$  και υπολογίζουμε

(α) Για  $p = 1$ ,

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^p} dx = \int_\epsilon^1 \frac{1}{x} dx = \left[ \log x \right]_\epsilon^1 = \log 1 - \log \epsilon = -\log \epsilon \rightarrow +\infty \text{ καθώς } \epsilon \rightarrow 0.$$

(β) Για  $p \neq 1$ ,

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^p} dx = \left[ \frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_\epsilon^1 = \frac{1}{1-p} (1 - \epsilon^{1-p}).$$

οπότε

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1-p} (1 - \epsilon^{1-p}) = \frac{1}{1-p} (1 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1-p})$$

Αν  $1-p > 0 \Leftrightarrow p < 1$ , τότε  $\epsilon^{1-p} \rightarrow 0$  καθώς  $\epsilon \rightarrow 0$ , ενώ αν  $1-p < 0 \Leftrightarrow p > 1$ , τότε

$$\epsilon^{1-p} = \frac{1}{\epsilon^{p-1}} \rightarrow +\infty \text{ καθώς } \epsilon \rightarrow 0.$$

Έτσι τελικά

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} 1/(1-p) & p < 1, \\ +\infty & p > 1. \end{cases} \quad (5)$$

Στη 10η Διάλεξη σελ. 11 δείξαμε την περίπτωση  $p = 1/2$ . **Ερώτηση:** Υπάρχει  $p \in \mathbb{R}$  για το οποίο το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

συγκλίνει;

13. Εξετάστε κατά πόσον το ολοκλήρωμα

$$\int_a^{+\infty} x e^{-x} dx,$$

όπου  $a$  είναι πραγματικός αριθμός, συγκλίνει.

14. Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1}.$$

(α) Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει.

(β) Να βρεθεί η τιμή του ολοκληρώματος.

### Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \quad (6)$$

κατά συνέπεια η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι συνεχής και το ολοκλήρωμα είναι δευτέρου είδους.

(α) Θέλουμε να συγκρίνουμε το ολοκλήρωμα με κάποιο το οποίο γνωρίζουμε ότι συγκλίνει, θα προσπαθήσουμε να το συγκρίνουμε με το βασικό (4). Παρατηρούμε ότι

$$x^2 - x + 1 > \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - x + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + 1 > 0$$

που ισχύει, συνεπώς

$$x^2 - x + 1 > \frac{x^2}{2}. \quad (7)$$

Έτσι γράφουμε, για να απομακρυνθούμε από το άκρο 0,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1} &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1} \\ &\leq \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} + \int_1^{+\infty} \frac{2 dx}{x^2} \end{aligned}$$

από την (7)

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} + 2 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι το ολοκλήρωμα Riemann μιας συνεχούς συνάρτησης, άρα υπάρχει (για την ακρίβεια είναι μικρότερο ή ίσο από  $4/3$  από την (6)), και το δεύτερο ολοκλήρωμα συγκλίνει από την (4) ( $p = 2$ ), κατά συνέπεια το δοσμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

(β) Από την (6) έχουμε, εφόσον το ολοκλήρωμα συγκλίνει

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1} &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\frac{3}{4} \left[\frac{4}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]} \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\infty} \frac{d\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \arctan(+\infty) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

15. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n + 1)^p}, \quad p > 0$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $p$ .

**Λύση**

Συγκρίνουμε με το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(\log x + 1)^p} dx, \quad p > 0.$$

Θέτοντας  $t = \log x + 1$ , έχουμε  $dt = \frac{1}{x} dx$  οπότε

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(\log x + 1)^p} dx = \int_{t(1)}^{t(\infty)} \frac{1}{t^p} dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^p} dt, \quad p > 0.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει για  $p > 1$ , βλέπε (4), επομένως από το κριτήριο του ολοκληρώματος η δοσμένη σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν  $p > 1$ .

16. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$(\alpha') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$(\gamma') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$(\beta') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$$

$$(\delta') \sum_{n=2}^{\infty} ne^{-n^2}$$

**Λύση**

Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του ολοκληρώματος, έτσι

$$(α) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sim \int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx < \infty, \text{ αφού } p = 3/2 > 1.$$

$$(β) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} \sim \int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{y}{e^y} dy < \infty, \text{ είναι η Άσκηση 13, όπου θέσαμε } y = \log x \Leftrightarrow x = e^y \text{ και } dy = \frac{1}{x} dx.$$

$$(γ) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \sim \int_1^{\infty} \frac{x}{2^x} dx < \infty, \text{ τι 2 τι } e, \text{ βλέπε (β).}$$

$$(δ) \sum_{n=2}^{\infty} ne^{-n^2} \sim \int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} e^{-y} dy = -\frac{1}{2}e^{-y} \Big|_1^{\infty} = -0 + \frac{1}{2e}, \text{ όπου θέσαμε } y = x^2, \text{ οπότε } dy = 2x dx.$$

17. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τα ολοκληρώματα

$$(α) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx.$$

$$(γ) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx.$$

$$(β) \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^{3/2}} dx.$$

$$(δ) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$$

**Λύση**

(α) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$  και για μεγάλα  $x$  συμπεριφέρεται όπως η  $1/\sqrt{x^3}$  για την οποία το σχετικό ολοκλήρωμα υπάρχει, είναι η περίπτωση  $p = 3/2 > 1$ . Ειδικά για  $x \geq 1$  έχουμε

$$\sqrt{x^3} < \sqrt{1+x^3} \leq \sqrt{x^3+x^3},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx. \end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι το ολοκλήρωμα Riemann μιας συνεχούς συνάρτησης και το δεύτερο είναι ένα  $p$ -ολοκλήρωμα δεύτερου είδους με  $p = 3/2 > 1$ , κατά συνέπεια συγκλίνει, επομένως το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

(β) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$  και για μεγάλα  $x$  συγκρίνεται με την  $x/x^{3/2} = 1/x^{1/2}$  για την οποία το σχετικά ολοκλήρωμα δεν υπάρχει αφού  $p = 1/2 < 1$ . Συγκεκριμένα για  $x \geq 1$  έχουμε

$$x^{3/2} < 1+x^{3/2} \leq 2x^{3/2},$$



οπότε

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^{3/2}} dx &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^{3/2}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^{3/2}} dx \\ &\geq \int_0^1 \frac{x}{1+x^{3/2}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x}{(2x)^{3/2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^{3/2}} dx + \frac{1}{2^{3/2}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}} dx.\end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπάρχει, αλλά το δεύτερο δεν συγκλίνει αφού  $p = 1/2 < 1$ , κατά συνέπεια το δοσμένο ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

(γ) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση απειρίζεται στο  $x = 0$ , επιπλέον για  $x$  κοντά στο μηδέν η συνάρτηση συγκρίνεται με την  $1/x$  ενώ για μεγάλα  $x$  με την  $1/x\sqrt{x}$ . Έτσι γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx \\ &\geq \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{2}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx.\end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ένα  $p$ -ολοκλήρωμα δεύτερου είδους με  $p = 1$ , άρα αποκλίνει, συνεπώς και το δοσμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει.

(δ) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση απειρίζεται στο  $x = 0$ , επιπλέον για  $x$  κοντά στο μηδέν η συνάρτηση συγκρίνεται με την  $1/\sqrt{x}$ , αφού  $1+x \simeq 1$ , ενώ για μεγάλα  $x$  με την  $1/x\sqrt{x}$ , συγκεκριμένα για  $x \geq 0$  έχουμε

$$\begin{aligned}\sqrt{x}(1+x) &\geq \sqrt{x} \\ \sqrt{x}(1+x) &\geq x\sqrt{x}.\end{aligned}$$

Έτσι γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx \\ &= \frac{1}{1-1/2} + \frac{1}{3/2-1} \\ &= 2 + 1\end{aligned}$$

από τις (4) και (5), συνεπώς και το δοσμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

18. Εξετάστε αν το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x^x} dx$$

συγκλίνει συγκρίνοντάς το με τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{n}\right)^n.$$

19. Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη μεταξύ των  $p > 0$  και  $q > 0$  ώστε να συγκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{x^q + 1} dx.$$

ΕΣ@ΤΜΗΚΤΠ