Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Εαρινό εξάμηνο 2024

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 08: Παράγωγοι συναρτήσεων ΙΙ

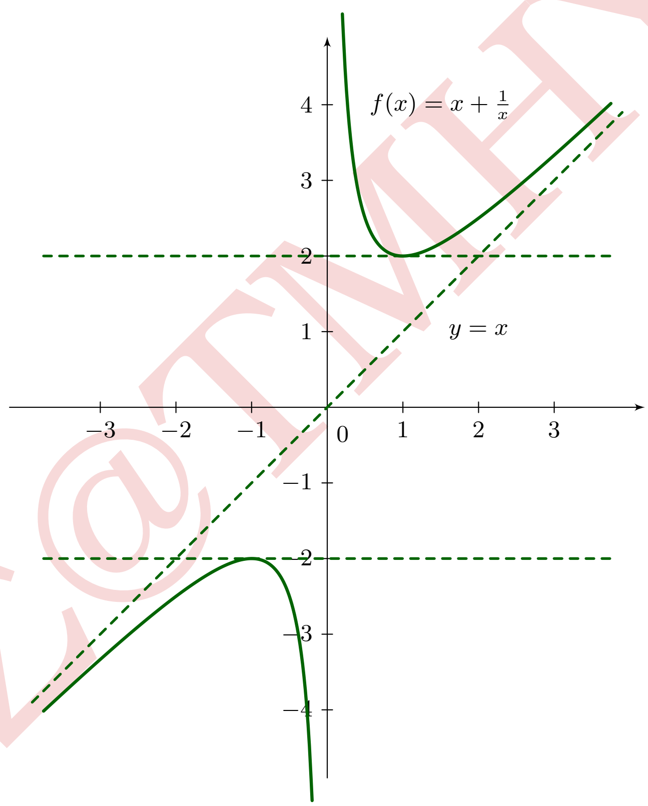
1. **Μια χρήσιμη ανισότητα.** Εάν $a, b$ είναι θετικοί αριθμοί, δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab},$$

ειδικά για $a = b = 1$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \qquad \text{για κάθε } x > 0.$$

**Λύση**




Σχήμα 1: Άσκηση 1

2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $a$ ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύει $\sqrt{x} \geq \log x + a$.

3. **Ανισότητα του Young.** Εάν $a$ και $b$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί και $p, q > 1$ με $1/p + 1/q = 1$ δείξτε ότι

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Υπόδειξη:** Εάν $ab = 0$ η ανισότητα ισχύει. Για $a > 0$, $b > 0$ θεωρήστε τη

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - bx, \qquad x > 0.$$

4. Αν $a$ είναι μια πραγματική παράμετρος, εξετάστε κατά πόσον η συνάρτηση $f_a(x) = x - a\sin x$ είναι αύξουσα, φθίνουσα, ή τίποτα από τα δύο;

5. Να εξετασθούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες και αν συγκλίνουν να βρεθούν τα όριά τους.

   (αʹ) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$

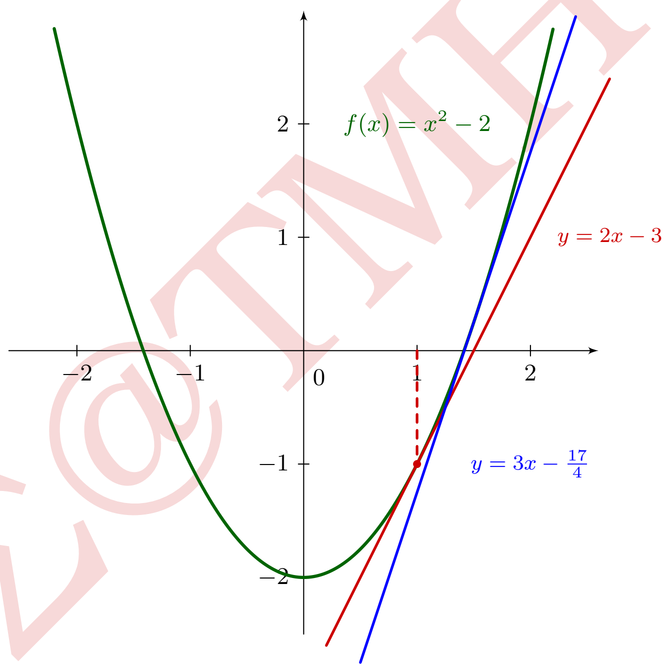
   (βʹ) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$

**Λύση**

(αʹ) Η δοσμένη ακολουθία είναι της μορφής

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

με $f(x) = x^2 - 2$, κατ' συνέπεια αν συγκλίνει θα πρέπει να συγκλίνει σε μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, ισοδύναμα $x = \pm\sqrt{2}$.




Σχήμα 2: Άσκηση 5

6. Τι θα συμβεί αν χρησιμοποιήσετε τον Κανόνα του l'Hospital για να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}};$$

   Υπολογίστε το όριο με διαφορετικό τρόπο.

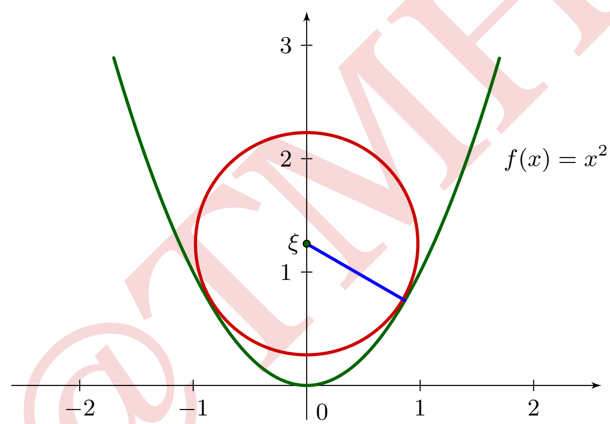
7. Να βρεθούν σταθερές $a$ και $b$, αν υπάρχουν τέτοιες, ώστε

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b\right) = 0.$$

8. Εάν ένα αρχικό κεφάλαιο $A_0$ κατατεθεί με επιτόκιο $r$ και ανατοκίζεται $n$ φορές το χρόνο, το ποσό μετά από $t$ χρόνια θα έχει ανέλθει σε
$$A = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$
Στη περίπτωση συνεχούς ανατοκισμού, δηλαδή $n \to \infty$, δείξτε ότι το τελικό ποσό μετά από $t$ χρόνια θα είναι
$$A = A_0 e^{rt}.$$

9. **Ένα ιστορικό παράδειγμα.** Η πρώτη εμφάνιση του Κανόνα του l'Hospital σε έντυπη μορφή ήταν στο βιβλίο *Analyse des Infiniment Petits* που εκδόθηκε από τον Μαρκήσιο de l'Hospital το 1696. Αυτό ήταν και το πρώτο βιβλίο Απειροστικού Λογισμού που εκδόθηκε ποτέ. Το παράδειγμα που χρησιμοποίησε ο συγγραφέας για να περιγράψει τη μέθοδο ήταν ο υπολογισμός του ορίου
$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}},$$
όπου $a>0$. Υπολογίστε αυτό το όριο.

10. Περιφέρεια ακτίνας $r=1$ ισορροπεί στο εσωτερικό της παραβολής $y=x^2$, όπως δείχνει το Σχήμα 3. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου της περιφέρειας, από συμμετρία $(0,\xi)$, καθώς και τα




Σχήμα 3: Άσκηση 10

σημεία τομής της περιφέρειας με την παραβολή.

11. Να υπολογιστούν τα όρια

(αʹ) $\lim_{x\to 0}(e^{3x}-5x)^{1/x}$.

(βʹ) $\lim_{x\to\infty}(e^{3x}-5x)^{1/x}$.

(γʹ) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}\qquad a>0,\quad b>0.$

(δʹ) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)}.\qquad a>0,\quad b>0.$

(εʹ) $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

(ϛʹ) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$.

(ζʹ) $\lim_{x\to 0+}\left(\log\frac{1}{x}\right)^x$.

(ηʹ) $\lim_{x\to 1}x^{1/(1-x)}$.

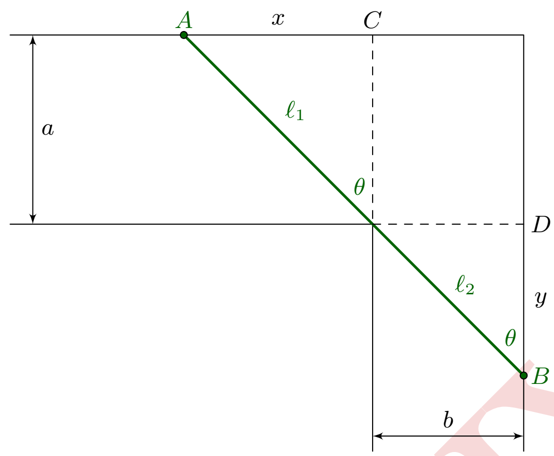
(θʹ) $\lim_{x\to 1-}(\log x)\log(1-x)$.

(ιʹ) $\lim_{x\to 0+}x^{1/\log x}$.

12. Να υπολογιστεί το όριο
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right).$$

13. Να βρεθεί το μέγιστο μήκος σκάλας η οποία μπορεί να περάσει από τη γωνία του διαδρόμου με διαστάσεις $a$ και $b$ του Σχήματος 4.

    **Υπόδειξη:** Εκφράστε το μήκος $L$ της σκάλας $AB$ ως συνάρτηση της γωνίας $\theta$ που σχηματίζει το τμήμα $AB$ με την κατακόρυφη πλευρά του διαδρόμου.




Σχήμα 4: Άσκηση 13