Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Εαρινό εξάμηνο 2024

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 04: Σειρές

1. Συμπληρώστε την απάντηση ή κυκλώστε ανάλογα

   (α΄) Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+2|a_n|}$ συγκλίνει. Σ Λ

   (β΄) Αν $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Σ Λ

   (γ΄) Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{|a_n|}$ συγκλίνει. Σ Λ

   (δ΄) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\sin n)}{n^p}$ συγκλίνει αν $p > 1$. Σ Λ

   (ε΄) $\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{1-1/2} = 2$

   (ϛ΄) $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-n/2} =$

   (ζ΄) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{a^2+1}\right)^{-n}$ συγκλίνει αν και μόνο αν

2. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ p και q ώστε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^q+1}$$

   να συγκλίνει.

3. Δείξτε ότι αν $a_n \geq 0$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει.

4. Η ακολουθία **Fibonacci** $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

   Δείξτε ότι

   (α΄) $\frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \frac{1}{f_{n-1}f_n} - \frac{1}{f_n f_{n+1}}$

(β΄) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = 1$

(γ΄) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}f_{n+1}} = 2$

5. Σε κάθε μια από τις σειρές να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η σειρά συγκλίνει και στη συνέχεια να βρεθεί το άθροισμα της σειράς

(α΄) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n$ (β΄) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^{n+1}}$ (γ΄) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin^n x$

6. Έστω ότι $a_n > 0$ για κάθε n, δείξτε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ συγκλίνει.

7. Εάν $a_n > 0$ και $b_n > 0$ για όλα τα n και οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν είναι αλήθεια ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει;

8. Δείξτε ότι

(α΄) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \frac{1}{a}, \qquad a > 0.$

(β΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$

Λύση

(β΄) Βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

έτσι

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{2}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right)\right]$$

ή

$$\begin{aligned}
2S_N = 1 + \frac{1}{2} &+ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N} \\
-\frac{2}{2} &- \frac{2}{3} - \frac{2}{4} - \cdots - \frac{2}{N} - \frac{2}{N+1} \\
&+ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}
\end{aligned}$$

(η πρώτη γραμμή περιέχει τον πρώτο όρο κάθε παρένθεσης, η δεύτερη τον δεύτερο και η τρίτη τον τρίτο), συνεπώς

$$S_N = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) \to \frac{1}{4}$$

καθώς $N \to \infty$ που είναι το ζητούμενο.

9. Εξετάστε κατά πόσο η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$$

συγκλίνει. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$ και συγκρίνετε με γνωστή σειρά.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $n^{1+1/n} = n\sqrt[n]{n}$ και γνωρίζουμε ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$, καθώς $n \to \infty$ (4η Διάλεξη, σελ. 19), κατά συνέπεια για κάποιο N είναι

$$1 < \sqrt[n]{n} < \frac{3}{2}, \qquad \text{για } n \geq N,$$

αφού $\sqrt[n]{n} > 1$, έτσι για $n \geq N$

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1 \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{1}{n} < \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} < \frac{1}{n},$$

επομένως

$$\frac{2}{3}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{n=N}^{\infty}\frac{2}{3n} \leq \sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \leq \sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Η σειρά στο αριστερό μέλος αποκλίνει, είναι η αρμονική σειρά, κατά συνέπεια και η δεσπόζουσα σειρά, η δοσμένη, αποκλίνει.

10. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n^p+1}-\sqrt{n^p}\right)$$

συγκλίνει αν $p > 2$ και αποκλίνει για $p = 2$.

11. Εξετάστε κατά πόσο κάθε μια από τις σειρές συγκλίνει, ή αποκλίνει

(α′) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+10}$

(β′) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+10}}$

(γ′) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$

(δ′) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$

(ε′) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^2+n^4}$

(ϛ′) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+n^4}$

(ζ′) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$

(η′) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-2^n}$

(ϑ′) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n-n^e}$

Λύση

(α′) Για $n \geq 4$

$$\frac{1}{n^2+n^2} < \frac{1}{n^2+10} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{n^2+10} < \frac{1}{n^2}$$

επομένως

$$\frac{1}{2}\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{2n^2} \leq \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2+10} \leq \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

το αριστερό και το δεξί μέλος της τελευταίας ανισότητας είναι p-σειρά με $p = 2 > 1$, συνεπώς συγκλίνει, άρα και η δοσμένη σειρά συγκλίνει.

(β') Για $n \geq 4$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+10}} < \frac{1}{\sqrt{n^2}} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n^2+10}} < \frac{1}{n}$$

συνεπώς η δοσμένη σειρά ¨συμπεριφέρεται¨ όπως η αρμονική σειρά, άρα αποκλίνει.

(δ') Για $n \geq 2$

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2+n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2+3} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{n^{3/2}} < \frac{\sqrt{n}}{n^2+3} < \frac{1}{n^{3/2}}$$

Τα άνω και κάτω φράγματα είναι συγκλίνουσα σειρά, p-σειρά με $p = 3/2 > 1$, συνεπώς η δοσμένη σειρά συγκλίνει.

(η') Είναι $3^n > 3^n - 2^n$ και ψάχνουμε c ώστε $3^n - 2^n \geq c2^n$.

$$3^n - 2^n \geq c2^n \Leftrightarrow 3^n \geq (c+1)2^n \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq (c+1)$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε n για $c+1 = 3/2$, ισοδύναμα για $c = 1/2$, έτσι

$$\frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^n-2^n} < 2\frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-2^n} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

τα φράγματα είναι γεωμετρικές σειρές με λόγο μικρότερο του 1, άρα συγκλίνουν και (γιατί;[1])

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-2^n} \leq 2$$

άρα η σειρά συγκλίνει.

(θ') $e^n - n^e > 0 \Leftrightarrow n > e\log n$ για κάθε n, βλέπε Σχήμα 1. Έτσι οι όροι της σειράς είναι θετικοί, επιπλέον

$$0 \leq \frac{1}{e^n - n^e} < \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

επομένως

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n-n^e} < \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

Η σειρά στο δεξί μέλος είναι γεωμετρική με λόγο μικρότερο του 1, άρα συγκλίνει, επομένως και η δοσμένη σειρά συγκλίνει.

12. Εξετάστε κατά πόσο κάθε μια από τις σειρές συγκλίνει απολύτως, συγκλίνει υπό συνθήκη, ή αποκλίνει.

[1] **Μια παρατήρηση για τη γεωμετρική σειρά:** Για $a \in \mathbb{R}$ ή $a \in \mathbb{C}$

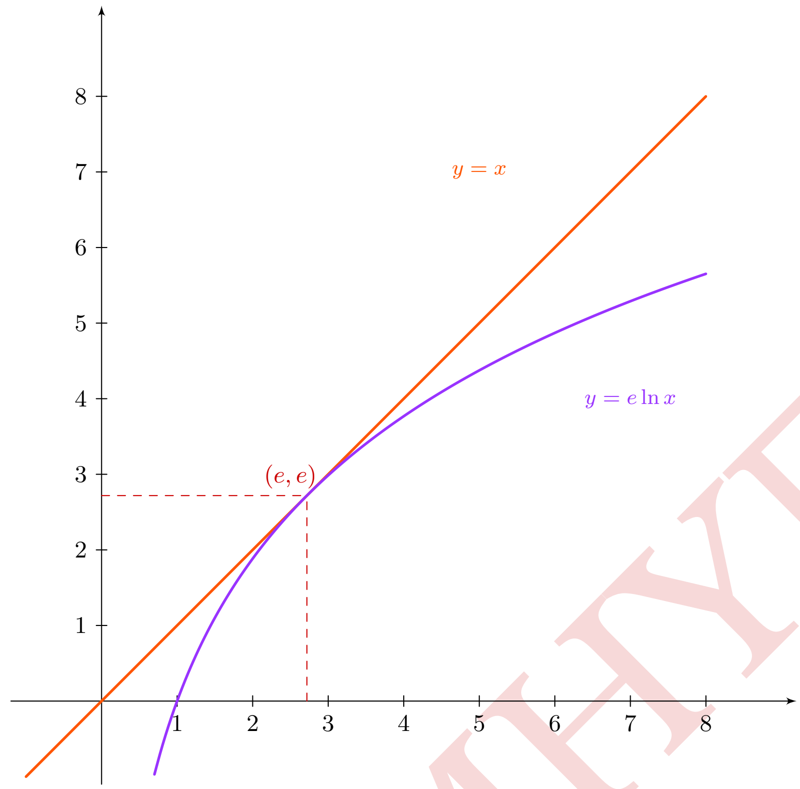
$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

και αν $|a| < 1$, τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a^n = \lim_{N\to\infty}(1 + a + a^2 + \cdots + a^N) = \lim_{N\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a},$$

αφού $a^{N+1} \to 0$. Έτσι για σταθερό φυσικό αριθμό k

$$a^k + a^{k+1} + a^{k+2} + \cdots = a^k(1 + a + a^2 + \cdots) = a^k\frac{1}{1-a} = \frac{a^k}{1-a}.$$



Σχήμα 1: Άσκηση 12 (θ'): Σύγκριση μεταξύ $\ln e^x$ και $\ln x^e$.

(α') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$

(β') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}}$

(γ') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3}$

(δ') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(ε') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-10)^n}$

(ϛ') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(ζ') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(η') $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$

(θ') $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-2n}{3+4n}\right)^n$

(ι') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n^2}{(n+2)!}$

(ια') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!10^n}$

(ιβ') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\tan^{-1} n)^n}$

(ιγ') $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\log n)^n}$

(ιδ') $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{n}$

(ιε') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 1}$

Λύση

(α') Παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{n^{3/2}}$$

και επειδή $p = 3/2 > 1$ η δοσμένη σειρά συγκλίνει απολύτως, άρα συγκλίνει.

(β')

$$\left|\frac{(-2)^n}{3^{n+1}}\right| = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

και επειδή $2/3 < 1$ πρακτικά έχουμε συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά, έτσι η σειρά συγκλίνει απολύτως, άρα συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-2)^n}{3^{n+1}}\right| = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\frac{2/3}{1-2/3} = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\frac{-2/3}{1+2/3} = -\frac{2}{15}$$

(ζ) Εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου

$$\frac{[(n+1)!]^2/[2(n+1)]!}{(n!)^2/(2n)!} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n+1}{4n+2} \to \frac{1}{4} < 1,$$

άρα η σειρά συγκλίνει (και απολύτως αφού οι όροι είναι θετικοί).

(ιϐ) Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{(\tan^{-1}n)^n}\right|} = \frac{1}{\tan^{-1}n} \to \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} < 1$$

κατά συνέπεια η σειρά συγκλίνει απολύτως, επομένως συγκλίνει.