Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Εαρινό εξάμηνο 2024

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 01: Πραγματικοί και Μιγαδικοί αριθμοί

1. Να δειχθεί ότι εάν a και b είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί τότε $||a| - |b|| \le |a - b|$.

Λύση

Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής είναι

$$||a| - |b|| = \begin{cases} |a| - |b| & \text{εάν } |a| - |b| \\ |b| - |a| & \text{εάν } |b| \ge |a| \end{cases}$$

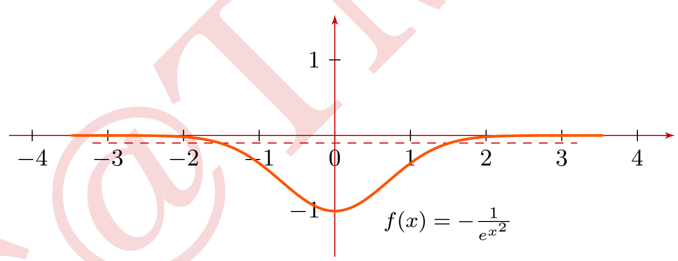
και από την τριγωνική ανισότητα βρίσκουμε

$$\begin{aligned} |a| &= |a - b + b| \le |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \le |a - b| \\ |b| &= |b - a + a| \le |b - a| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \le |a - b| \qquad (|a - b| = |b - a|) \end{aligned}$$

οπότε από τις δύο σχέσεις έπεται το ζητούμενο.

2. Να βρεθεί το $\sup\{-e^{-x^2} : x \in \mathbb{R}\}$.

Λύση



Επειδή $e^x > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, έχουμε ότι $-e^{-x^2} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως το 0 είναι ένα άνω φράγμα. Εξετάζουμε τώρα αν υπάρχει άνω φράγμα $s < 0$. Ας υποθέσουμε ότι ένα τέτοιο φράγμα υπάρχει, τότε θα είναι $s = -\sigma$ με $\sigma > 0$, οπότε θα πρέπει

$$-e^{-x^2} \le -\sigma \;\Leftrightarrow\; \sigma \le \frac{1}{e^{x^2}} \;\Leftrightarrow\; \sigma e^{x^2} \le 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι άτοπο αφού το αριστερό μέλος αυξάνει απεριόριστα. Ειδικά για $x = (\ln(2/\sigma))^{1/2}$ έχουμε

$$\sigma e^{x^2} = \sigma e^{\ln(2/\sigma)} = \sigma \frac{2}{\sigma} = 2.$$

Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι υπάρχει άνω φράγμα μικρότερο του μηδενός, συνεπώς τέτοιο φράγμα δεν υπάρχει, οπότε το μηδέν είναι το ελάχιστο άνω φράγμα, ισοδύναμα

$$\sup\{-e^{-x^2} : x \in \mathbb{R}\} = 0.$$

Βλέπε και το σχήμα.

3. **Ο νόμος του συνημιτόνου.** Έστω ένα τρίγωνο με μήκη πλευρών α, β, και γ. Εάν θ είναι η γωνία απέναντι από την πλευρά μήκους γ δείξτε ότι

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta.$$

Βλέπε Διάλεξη 1, σελίδα 37.

4. Αποδείξτε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

(α΄) $\cos(\pi \pm x) = -\cos x$.

(β΄) $\sin(\pi \pm x) = \pm\sin x$.

(γ΄) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp\sin x$.

(δ΄) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x$.

(ε΄) $\cos(x \pm y) = \cos x\,\cos y \mp \sin x\,\sin y$.

(ϛ΄) $\sin(x \pm y) = \sin x\,\cos y \pm \cos x\,\sin y$.

(ζ΄) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

(η΄) $\sin 2x = 2\sin x\,\cos x$.

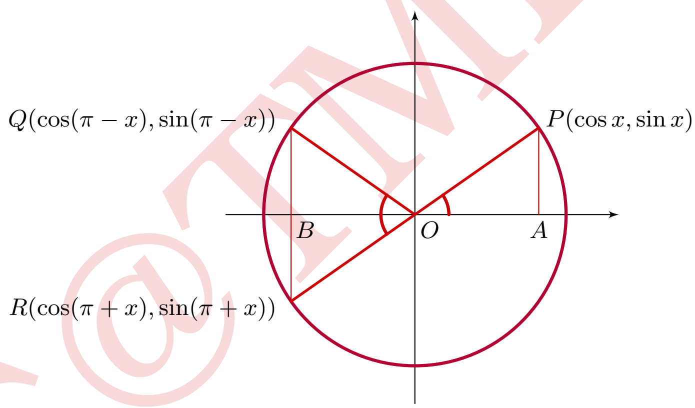
(ϑ΄) $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$.

(ι΄) $\sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2}$.

(ια΄) $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

(ιβ΄) $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

Λύση



Σχήμα 1: Άσκηση 4. (α΄), (β΄) Τα ορθογώνια τρίγωνα OAP, OQB, OBR είναι ίσα

5. Να γραφούν οι παρακάτω μιγαδικοί αριθμοί στη μορφή $a + ib$:

(α΄) $(-3+i)(1-i2)$

(β΄) $\dfrac{1}{9+i2}$

(γ΄) $\dfrac{7-i}{3+i5}$

6. Εάν $z \in \mathbb{C}$ και $w \in \mathbb{C}$ να δειχθεί ότι:

(α΄) $z^2 + 1 = (z+i)(z-i)$

(β΄) $z^2 + w^2 = (z+iw)(z-iw)$.

7. Να υπολογισθούν οι δυνάμεις i^n, για κάθε ακέραιο αριθμό n.

8. Να βρεθεί μια γεωμετρική σχέση μεταξύ των μιγαδικών αριθμών z και iz.

9. Να δειχθεί ότι οι αριθμοί $1 \pm i$ ικανοποιούν την εξίσωση $z^2 - 2z + 2 = 0$.

10. Εάν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί να βρεθούν οι τιμές τους σε κάθε μία από τις εφράσεις:

(α') $5x + i6 = -8 + i2y$.

(β') $i(2x - 4y) = 4x + 2 + i3y$.

(γ') $(3x + i)^2 = 8 + iy$.

(δ') $x + iy = (x - iy)^2$.

11. Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$. **Υπόδειξη**: Θέτουμε $z = x + iy$ στην εξίσωση και αφού κάνουμε πράξεις κοιτάζουμε ξεχωριστά το πραγματικό και φανταστικό μέρος.

12. Εάν $z \in \mathbb{C}$ να δειχθεί ότι:

    (α') $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$

    (β') $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$

13. Να βρεθούν τα x και y, όταν $x + iy = |x + iy|$.

14. Εάν z και w είναι μιγαδικοί αριθμοί να δειχθεί ότι: **(i)** $|z| = |-z|$ και **(ii)** $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$.

15. Να δειχθεί ότι εάν z και w είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύουν τα παρακάτω:

    (α') $|z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$.

    (β') $|z - w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$.

    (γ') $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ *Νόμος του παραλληλογράμου.*

16. Αποδείξτε τις ιδιότητες του ορίσματος:

    (α') $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

    (β') $\arg \dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$.

17. Δείξτε ότι εάν $\operatorname{Re} z_1 > 0$ και $\operatorname{Re} z_2 > 0$, τότε

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

    Δώστε αντιπαράδειγμα όπου $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$.

18. Η συνάρτηση $\tan\theta$ είναι ένα προς ένα στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, κατά συνέπεια η αντίστροφη συνάρτηση $\arctan$ ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με τη σχέση $\arctan t = \theta$ αν και μόνον αν $\tan\theta = t$ και $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Εάν $z = x + iy$ δείξτε ότι

    (α') $\operatorname{Arg} z = \arctan \dfrac{y}{x}$, εάν $x > 0$.

    (β') $\operatorname{Arg} z = \arctan \dfrac{y}{x} + \pi$, εάν $x < 0$ και $y \geq 0$.

    (γ') $\operatorname{Arg} z = \arctan \dfrac{y}{x} - \pi$, εάν $x < 0$ και $y < 0$.

    (δ') $\operatorname{Arg} z = \dfrac{\pi}{2}$, εάν $x = 0$ και $y > 0$.

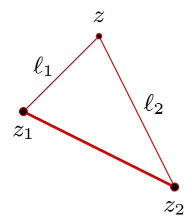
    (ε') $\operatorname{Arg} z = -\dfrac{\pi}{2}$, εάν $x = 0$ και $y < 0$.

19. Η έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία που λέγονται εστίες είναι σταθερό.

    (α') Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 και άθροισμα αποστάσεων από τις εστίες ίσο με $2c$, όπου $c > 0$.

    (β') Εάν $z_1 = -a$ και $z_2 = a$, όπου a είναι θετικός αριθμός, να δειχθεί ότι η εξίσωση της έλλειψης σε καρτεσιανές συντεταγμένες x και y γράφεται

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$



$\ell_1 + \ell_2 > |z_1 - z_2|$

Λύση

(α΄) Αν z είναι μιγαδικός αριθμός-σημείο στην έλλειψη, βλέπε σχήμα, τότε $\ell_1 + \ell_2 = 2c$ ισοδύναμα

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2c$$

(β΄) Αν οι εστίες της έλλειψης είναι οι πραγματικοί αριθμοί $\pm a$ η εξίσωση που γράψαμε γίνεται

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+a)^2+y^2} + \sqrt{(x-a)^2+y^2} &= 2c & \Rightarrow\\
\sqrt{(x+a)^2+y^2} &= 2c - \sqrt{(x-a)^2+y^2 7} & \Rightarrow\\
(x+a)^2+y^2 &= 4c^2 + (x-a)^2 + y^2 - 4c\sqrt{(x-a)^2+y^2} & \Rightarrow\\
c^2 - ax &= c\sqrt{(x-a)^2+y^2} & \Rightarrow\\
c^4 + a^2x^2 &= c^2x^2 + c^2a^2 + c^2y^2 & \Rightarrow\\
c^2(c^2-a^2) &= (c^2-a^2)x^2 + c^2y^2, &
\end{aligned}$$

επειδή $2c > 2a$ παίρνουμε

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1.$$

20. ♣ Έστω P_n ένα κανονικό πολύγωνο με n πλευρές εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο. Αν a_n είναι η περίμετρος του P_n και A_n το εμβαδόν του P_n δείξτε ότι

(α΄) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2\pi =$ μήκος της περιφέρειας

(β΄) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \pi =$ εμβαδόν του δίσκου

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον νόμο του συνημιτόνου στο ισοσκελές τρίγωνο που αντιστοιχεί σε κάθε πλευρά του n-γώνου και δείξτε ότι

$$a_n = 2n\sin\frac{\pi}{n}.$$

Σχετικό Σχήμα

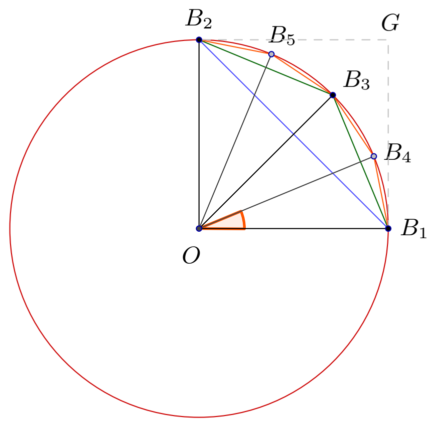
Θεωρούμε τον μοναδιαίο κύκλο (Σχήμα 2) και ενδιαφερόμαστε να ορίσουμε

(α΄) Το μήκος της περιφέρειας του κύκλου, και

(β΄) Το εμβαδόν της περιοχής που περικλείει ο κύκλος, τον μοναδιαίο δίσκο.

Ας δούμε τι συμβαίνει στο ένα τέταρτο του δίσκου. Πολλαπλασιάζοντας επί 4 βλέπουμε τι συμβαίνει στον κύκλο και στον δίσκο. Ξεκινάμε με την ορθή γωνία διχοτομούμε και συνεχίζουμε διχοτομώντας. Αν με $L(B_iB_j)$ συμβολίσουμε το μήκος του τμήματος B_iB_j παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
L(B_1B_2) &< L(B_1B_3) + L(B_3B_2)\\
&< L(B_1B_4) + L(B_4B_3) + L(B_3B_5) + L(B_5B_2)\\
&\vdots\\
&< 2 = L(B_1G) + L(GB_2)
\end{aligned}$$



Σχήμα 2: Μοναδιαία περιφέρεια και μοναδιαίος δίσκος

Αν με $A(B_iOB_j)$ συμβολίσουμε το εμβαδόν του τριγώνου B_iOB_j παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} A(B_1OB_2) &< A(B_1OB_3) + A(B_3OB_2) \\ &< A(B_1OB_4) + A(B_4OB_3) + A(B_3OB_5) + A(B_5OB_2) \\ &\vdots \\ &< 1 = \text{εμβαδόν του τετραγώνου } B_1OB_2G \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι τόσο η ακολουθία των περιμέτρων των κανονικών πολυγώνων όσο και αυτή των εμβαδών είναι αύξουσα και φραγμένη, κατά συνέπεια κάθε μια συγκλίνει. Σημειώνουμε ότι το κάθε όριο είναι το supremum φραγμένου συνόλου πραγματικών αριθμών. Το όριο της ακολουθίας των περιμέτρων το ορίζουμε ως μήκος της περιφέρειας και το όριο της ακολουθίας των εμβαδών ως εμβαδόν του δίσκου. Ορίζουμε ως 2π το μήκος της μοναδιαίας περιφέρειας.