Γενικά Μαθηματικά Ι

Επαναληπτικές Ασκήσεις ΙΙ

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

1 Ιουνίου 2023

(Ε1.) Απαντήστε στα ερωτήματα

- Αν $\lim\limits_{x\to\delta} 3^x = 1$, τότε $\delta =$
- Αν $\lim\limits_{x\to\delta} 3^x = 2$, τότε $\delta =$
- Αν $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$, τότε $|r| < 1$. Σωστό/Λάθος
- Αν $\delta > 0$, και $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\delta)^{\alpha n} = 0$, τότε $\alpha < 0$. Σωστό/Λάθος

(E2.) Για ποια τιμή του c η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - \frac{c}{x}$$

1. εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 2$;
2. εμφανίζει σημείο καμπής στο $x = 1$;
3. είναι αύξουσα στο $(0, +\infty)$;

(E3.) Να βρεθούν όλες οι τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε

$$|x^7 - y^7| \leq 7|x - y|.$$

(E4.) Δίνεται η $f(x) = 3\log(x+1)$, όπου $x > -1$.

1. Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού για την f με κέντρο το $x = 0$.
2. Εκτιμήστε την ακρίβεια της προσέγγισης της f με το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού στο διάστημα $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

(E5.) **Σκεφτείτε γεωμετρικά, ένα σχήμα βοηθάει**. Το Θεώρημα Μέσης Τιμής είναι χρήσιμο. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$, υπολογίστε

1. $$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)\, dx =$$
2. $$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)\, dx =$$

(Ε6.) Για $t > 0$ και $L > 0$ θέτουμε

$$A_L(t) = \int_0^L e^{-tx}\,dx.$$

1. Υπολογίστε το $A_L(t)$.
2. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{L\to+\infty} A_L(t).$$

3. Επιλέξτε κυκλώνοντας το σωστό χαρακτηρισμό
   - $L_1 < L_2 \Rightarrow \int_0^{L_1} e^{-tx}\,dx < \int_0^{L_2} e^{-tx}\,dx.$ Σωστό/Λάθος
   - $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx = \lim_{L\to+\infty} A_L(t).$ Σωστό/Λάθος
   - $\frac{d}{dL}\int_0^{L} e^{-tx}\,dx = e^{-tL}.$ Σωστό/Λάθος

(E7.) Να προσδιοριστούν όλες οι συναρτήσεις $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, των οποίων η μέση τιμή σε κάθε διάστημα $[0, x]$, $x > 0$, είναι ίση με το γεωμετρικό μέσο των $f(0)$ και $f(x)$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Οι ζητούμενες συναρτήσεις f ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds = \sqrt{f(0)f(x)}.$$

Διακρίνετε τις περιπτώσεις $f(0) = 0$ και $f(0) \neq 0$.

(E8.) Έχει παρατηρηθεί ότι αν ο πληθυσμός ελαφιών σε μια περιοχή πέσει κάτω από ένα ορισμένο επίπεδο m το είδος απειλείται με εξαφάνιση, ενώ αν υπερβεί μια ορισμένη οριακή τιμή M ο πληθυσμός θα ελαττωθεί ξανά προς το M εξαιτίας ασθενιών και κακής διατροφής.

1. Εξετάστε αν το μοντέλο εξέλιξης του πληθυσμού
$$\frac{dP}{dt} = rP(M-P)(P-m),$$
όπου r είναι μια θετική σταθερά αναλογίας, περιγράφει την εξέλιξη του πληθυσμού.
2. Επιλύστε την εξίσωση και επιβεβαιώστε την ορθότητα του μοντέλου.

Λύση στο 2.

Οι $P = M$, $P = m$ και $P = 0$ είναι λύσεις της εξίσωσης. Η συνάρτηση $f(P)$ στο δεξιό μέλος της εξίσωσης ικανοποιεί τις συνθήκες που εξασφαλίζουν μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών, έτσι αν $P_0 \notin \{0, m, M\}$ η λύση P δεν παίρνει ποτέ κάποια από τις τρεις αυτές τιμές. Για μια τέτοια P γράφουμε την εξίσωση ως
$$\int \frac{dP}{P(M-P)(P-m)} = \int r\,dt \qquad (1)$$

Αναλύοντας σε απλά κλάσματα

$$\frac{1}{P(M-P)(P-m)} = \frac{a}{P} + \frac{b}{M-P} + \frac{c}{P-m}$$

βρίσκουμε

$$a = -\frac{1}{mM}, \qquad b = \frac{1}{M(M-m)}, \qquad c = \frac{1}{m(M-m)}$$

και η (1) γίνεται

$$-\frac{1}{mM}\int \frac{dP}{P} + \frac{1}{M(M-m)}\int \frac{dP}{M-P} + \frac{1}{m(M-m)}\int \frac{dP}{P-m} = rt + c$$

απ΄ όπου θέτοντας $\mu = mM(M-m)$ παίρνουμε

$$-(M-m)\log|P| - m\log|M-P| + M\log|P-m| = \mu rt + \mu c$$
$$M(\log|P-m| - \log|P|) - m(\log|M-P| - \log|P|) = \mu rt + C$$

ή

$$M\log|1-m/P| - m\log|M/P-1| = \mu rt + C$$

ή

$$\log\frac{|1-m/P|^M}{|M/P-1|^m} = \mu rt + C \Rightarrow \frac{|1-m/P|^M}{|1-M/P|^m} = e^C e^{\mu rt} = Ae^{\mu rt}$$

όπου A μια σταθερά που προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Για παράδειγμα αν $m < P_0 < M$, όπου $P_0 = P(0)$, τότε από την ανάλυση που έγινε στην τάξη θα είναι $m < P(t) < M$ και η λύση δίνεται από την

$$\left(1-\frac{m}{P}\right)^M = \left(\frac{M}{P}-1\right)^m Ae^{\mu rt}$$

απ' όπου υπολογίζεται το A και συνάγεται ότι καθώς $t\to\infty$ θα πρέπει $P(t)\to M$, και μάλιστα, εκθετικά ώστε να μην απειρίζεται το δεξιό μέλος της εξίσωσης.

Η μέθοδος της διχοτόμησης

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ και $f(a)f(b)<0$, τότε υπάρχει $x^* \in (a,b)$ ώστε $f(x^*)=0$.

1. Θέτουμε $a_0=a$, $b_0=b$ και $c_0=(a_0+b_0)/2$.
   Αν $f(c_0)=0$ η ρίζα εντοπίστηκε. Αν $f(c_0)\neq 0$ τότε $f(a_0)f(c_0)<0$, ή $f(c_0)f(b_0)<0$, διαφορετικά οι $f(a_0), f(c_0), f(b_0)$ θα ήταν ομόσημοι πράγμα άτοπο από την υπόθεση. Ας υποθέσουμε ότι $f(a_0)f(c_0)<0$.
2. Θέτουμε $a_1=a_0$, $b_1=c_0$ και $c_1=(a_1+b_1)/2$.
   Αν $f(c_1)=0$ η ρίζα εντοπίστηκε. Αν $f(c_1)\neq 0$ τότε $f(a_1)f(c_1)<0$, ή $f(c_1)f(b_1)<0$, διαφορετικά οι $f(a_1), f(c_1), f(b_1)$ θα ήταν ομόσημοι πράγμα άτοπο από την υπόθεση. Ας υποθέσουμε ότι $f(c_1)f(b_1)<0$.
3. Θέτουμε $a_2=c_1$, $b_2=b_1$ και $c_2=(a_2+b_2)/2$ και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

Έτσι προκύπτουν

- (i) Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, με $a < c_n < b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και
- (ii) Μια ακολουθία διαστημάτων $(I_n)_{n=1}^{\infty}$, με $I_n = [a_n, b_n]$, όπου ένα από τα άκρα είναι το c_{n-1}, για τα οποία ισχύει ότι $I_n \subset I_{n+1}$ και επιπλέον αν με $|I_n|$ συμβολίσουμε το μήκος του I_n, τότε

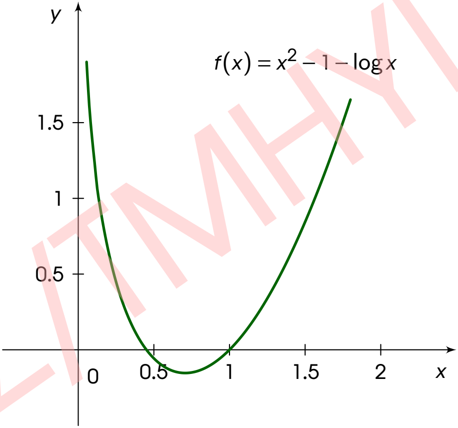
$$|I_n| = \frac{1}{2}|I_{n-1}| = \frac{1}{2^n}(b-a).$$

Παρατηρούμε ότι αν ξ είναι η ρίζα που περιέχεται σε κάθε I_n τότε για $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε

$$|\xi - c_n| < \frac{1}{2^n}(b-a) < \frac{1}{2^N}(b-a) < \epsilon \qquad (2)$$

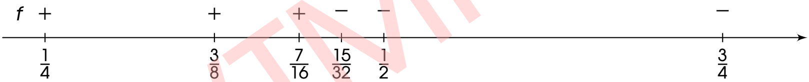
για $n > N$, κατά συνέπεια η ακολουθία $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στη ρίζα ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$. Επιπλέον η (2) παρέχει το σφάλμα της προσέγγισης της ρίζας.

Εφαρμογή: Η $f(x) = x^2 - 1 - \log x$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$ και από το Σχήμα 1 φαίνεται ότι υπάρχει και δεύτερη ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$ για την ακρίβεια κοντά στο 0.5.



Σχήμα: Σχετικά με τις ρίζες της $x^2 - 1 - \log x = 0$

Υπολογίζουμε $f(1/4) \approx 0.448794$ και $f(3/4) \approx -0.149818$, άρα υπάρχει ρίζα της εξίσωσης στο $(1/4, 3/4)$. Είναι $c_0 = 1/2$ και $f(1/2) \approx -0.056853$, κατά συνέπεια υπάρχει ρίζα της εξίσωσης στο $(1/4, 1/2)$. Είναι $c_1 = 3/8$ και $f(3/8) \approx 0.121454$, κατά συνέπεια υπάρχει ρίζα της εξίσωσης στο $(3/8, 1/2)$. Είναι $c_2 = 7/16$ και $f(7/16) \approx 0.018085$, κατά συνέπεια υπάρχει ρίζα της εξίσωσης στο $(7/16, 1/2)$. Η δεύτερη ρίζα περιέχεται στο $(0.4375, 0.5)$. Είναι $c_3 = 15/32$ και $f(15/32) \approx -0.022588$, κατά συνέπεια υπάρχει ρίζα της εξίσωσης στο $(7/16, 15/32)$. Η δεύτερη ρίζα περιέχεται στο $(0.4375, 0.46875)$. Βλέπε Σχήμα 2.



Σχήμα: Η διαδικασία της διχοτόμησης για τον εντοπισμό ρίζας της $x^2 - 1 - \log x = 0$

Τα διαστήματα εντοπισμού της ρίζας είναι τα

$$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \quad \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \quad \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right], \quad \left[\frac{7}{16}, \frac{1}{2}\right], \quad \left[\frac{7}{16}, \frac{15}{32}\right], \quad \ldots$$