Γενικά Μαθηματικά Ι

Επαναληπτικές Ασκήσεις ΙΙΙ

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

6 Ιουνίου 2023

Αν $z = x + iy$, τότε

- Το **πραγματικό μέρος** του z είναι ο $\operatorname{Re} z = x$.
- Το **φανταστικό μέρος** του z είναι ο $\operatorname{Im} z = y$.
- Το **μέτρο** του z είναι ο $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (= η απόσταση του z από το 0).
- Ο **συζυγής** του z είναι ο $\bar{z} = x - iy$.

Συνέπειες

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

(E1.) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$, $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$. Σωστό/Λάθος

(E2.) Να βρεθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί z τέτοιοι ώστε:

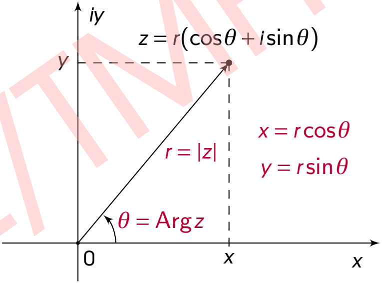
1. $|z - i| = 1$
2. $|z - 2| = |z|$
3. $\operatorname{Re}[(1-i)\bar{z}] = 0$
4. $1 < \operatorname{Re} z < 2$,
5. $1 < |z| < 2$,
6. $|\operatorname{Im} z| \geq 1$,
7. $|z| = \operatorname{Im} z + 1$,
8. $\frac{\pi}{6} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{3}$,
9. $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 1$.

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Εάν $z = x + iy \neq 0$ τότε

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Η **τριγωνομετρική μορφή** του z είναι η έκφραση $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$



Σχήμα: Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού.

Ο τύπος το de Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Έστω $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, τότε

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \qquad n \in \mathbb{N}$$

και αν $z \neq 0$

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{r^n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)], \qquad n \in \mathbb{N}$$

Αν $w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$, η εξίσωση $z^n = w$, με $n \in \mathbb{N}$ έχει n το πλήθος ρίζες τις

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

(Ε3.) Να βρεθούν

1. Οι τρίτες ρίζες του $z = 1$.
2. Οι τέταρτες ρίζες του $z = 1 + i$.

Η εκθετική συνάρτηση, τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ορισμός: Αν $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ορίζουμε

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$
$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$
$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Ιδιότητες: Αν z και w είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε

1. $e^{z+w} = e^z e^w$
2. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$
3. $e^{iy} = \cos y + i\sin y \Rightarrow |e^{iy}| = 1$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Καρτεσιανή, τριγωνομετρική και εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Παρατήρηση

1. Αν $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ και $w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi) = \rho e^{i\phi}$, τότε

$$zw = r\rho(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)) = r\rho e^{i(\theta+\phi)}$$
$$\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho}(\cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi)) = \frac{r}{\rho}e^{i(\theta-\phi)}$$

2. $e^z \neq 0$, αφού $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} > 0$.
3. Η $f(t) = e^{it}$ απεικονίζει την πραγματική ευθεία στον μοναδιαίο κύκλο.

Ορισμός

Για $z \in \mathbb{C}$ ορίζουμε

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \qquad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

με κατάλληλο πεδίο ορισμού για κάθε μία από αυτές.

(Ε4.) Αποδείξτε ότι

1. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$
2. $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$, για κάθε ζευγάρι $z, w \in \mathbb{C}$
3. $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$, για κάθε ζευγάρι $z, w \in \mathbb{C}$

(Ε5.) Δείξτε ότι

1. $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = m\pi + \pi/2$, όπου $m \in \mathbb{Z}$.
2. $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = m\pi$, όπου $m \in \mathbb{Z}$.

(Ε6.) Αποδείξτε κάθε μια από τις σχέσεις

1. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
2. $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$
3. $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$

(E7.) Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας $z = 2 + iy$, $-\infty < y < +\infty$ μέσω της απεικόνισης $f(z) = e^z$.

(E8.) Να βρεθεί η εικόνα του πρώτου τεταρτημορίου μέσω της απεικόνισης $f(z) = az$, όπου $a = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$.

(E9.) Αν $z = 2 + 2i$, τότε

1. $\mathrm{Re}(z^{21}) =$
2. $\mathrm{Im}(z^{21}) =$
3. $\mathrm{Arg}(z^{21}) =$

(E10.) Αν $z \neq 0$ να βρεθούν οι $\mathrm{Re}(1/z)$, $\mathrm{Im}(1/z)$.

(E11.) Αποδείξτε ότι $|z| = 1$ αν και μόνο αν $1/z = \bar{z}$.

(E12.) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων z που ικανοποιούν τη σχέση

$$\mathrm{Im}\left[\frac{z - z_0}{z_1}\right] = 0.$$

(E13.) Εάν $|a| = 1$, ή $|b| = 1$, δείξτε ότι

$$\left|\frac{a - b}{1 - \bar{a}b}\right| = 1.$$

Υπερβολικές συναρτήσεις

Αυτές είναι το υπερβολικό ημίτονο, το υπερβολικό συνημίτονο, η υπερβολική εφαπτομένη, η υπερβολική συνεφαπτομένη, η υπερβολική συντέμνουσα η υπερβολική τέμνουσα και ορίζονται ως

1. $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
2. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
3. $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
4. $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
5. $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$
6. $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

(Π1.) Αποδείξτε τις ταυτότητες

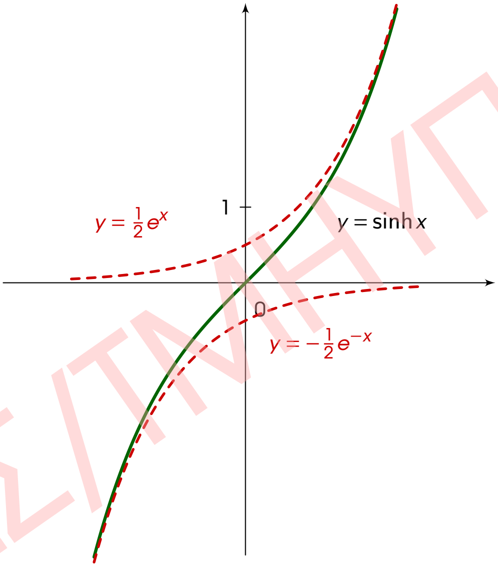
1. $\sinh(-x) = -\sinh x$
2. $\cosh(-x) = \cosh x$
3. $\tanh(-x) = -\tanh x$
4. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
5. $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
6. $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

Παρατήρηση

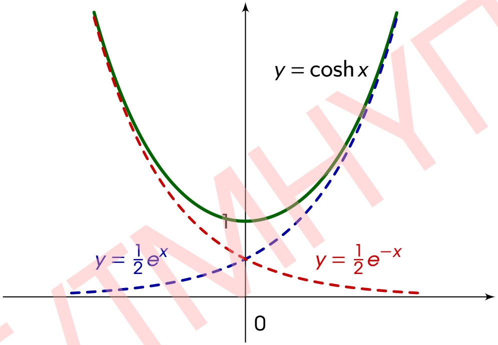
Η σχέση $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ είναι η αντίστοιχη της $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Η δεύτερη εκφράζει το γεγονός ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το σημείο $(\cos x, \sin x)$ βρίσκεται επί της μοναδιαίας περιφέρειας $x^2 + y^2 = 1$, ενώ η πρώτη εκφράζει το γεγονός ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το σημείο $(\cosh x, \sinh x)$ βρίσκεται επί της μοναδιαίας υπερβολής $x^2 - y^2 = 1$.

(Π2.) Αποδείξτε τις ταυτότητες

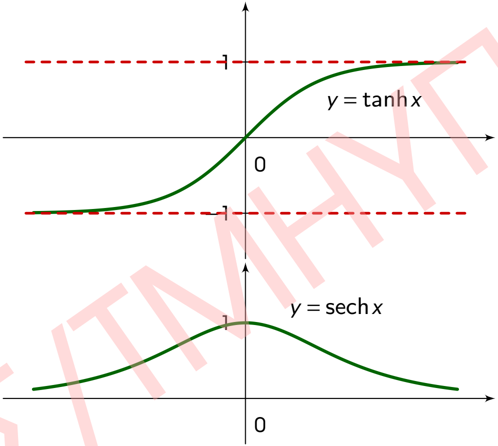
1. $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$
2. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$
3. $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$
4. $\sinh x - \sinh y = 2\cosh \dfrac{x+y}{2} \sinh \dfrac{x-y}{2}$
5. $\cosh x - \cosh y = 2\sinh \dfrac{x+y}{2} \sinh \dfrac{x-y}{2}$



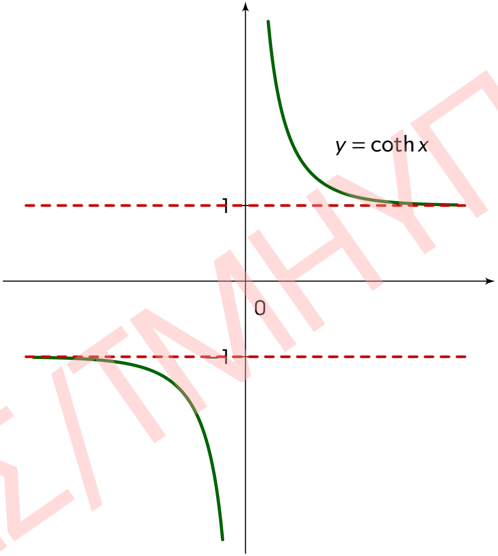
Σχήμα: Το υπερβολικό ημίτονο $\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$.



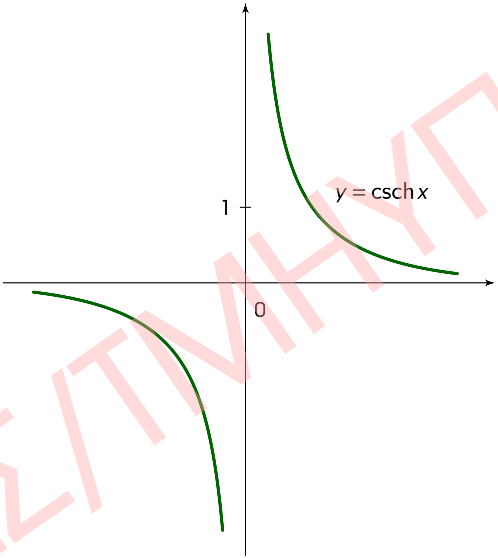
Σχήμα: Το υπερβολικό συνημίτονο $\sinh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$.



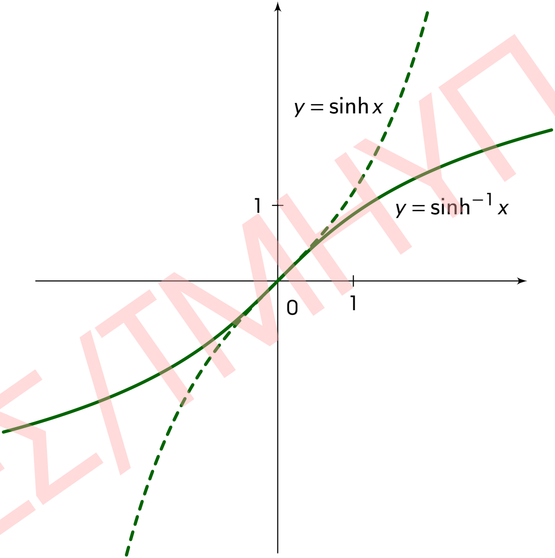
Σχήμα: Οι υπερβολικές συναρτήσεις $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, και $\operatorname{sech} x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

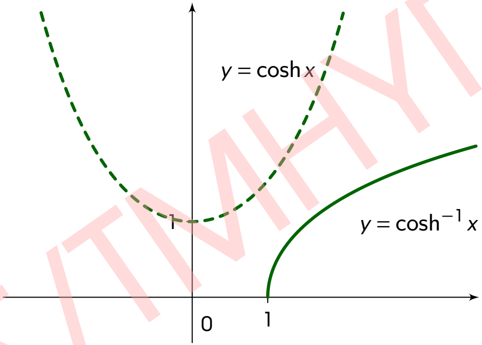


Σχήμα: Η υπερβολική συνεφαπτομένη $\coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

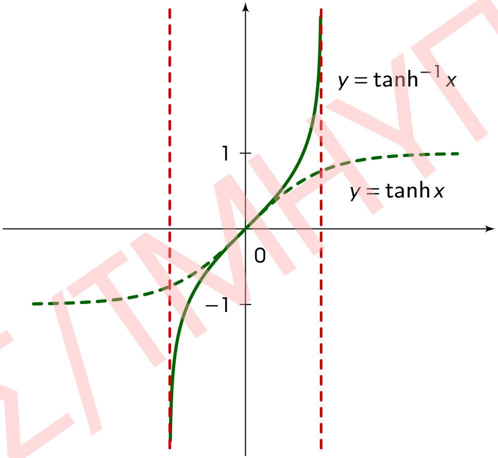


Σχήμα: Η υπερβολική συντέμνουσα $\operatorname{csch} x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

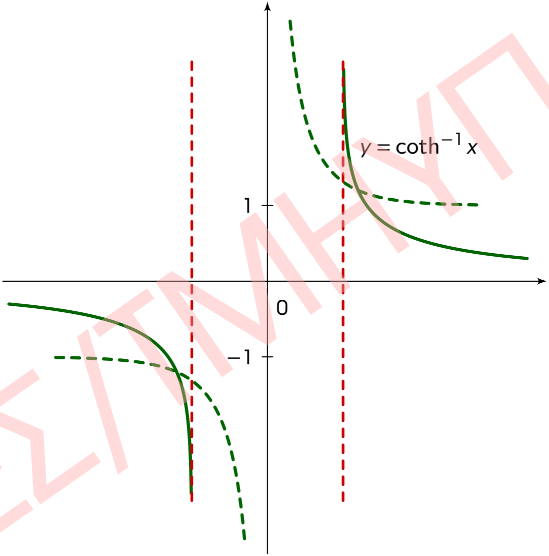

$y = \sinh x$
$y = \sinh^{-1} x$
1
0
1



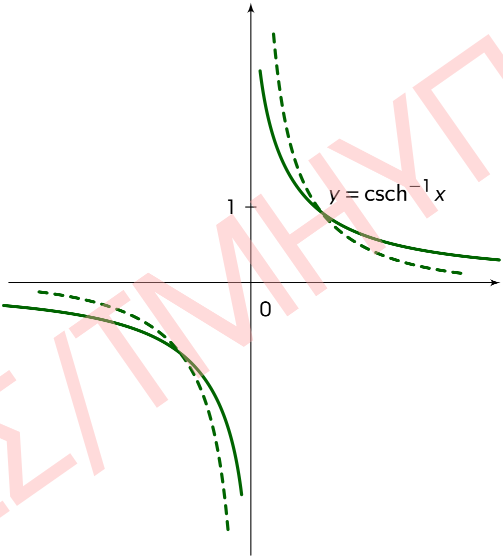
$y = \cosh x$
$y = \cosh^{-1} x$
1
0
1

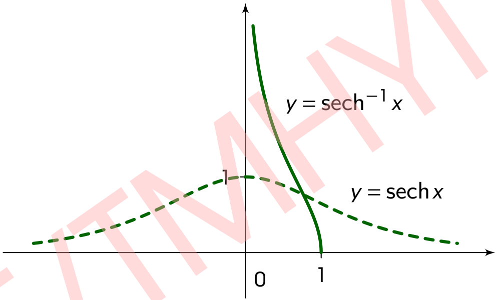


$y = \tanh^{-1} x$
1
$y = \tanh x$
0
-1



$y = \coth^{-1} x$
1
0
−1


$y = \text{csch}^{-1} x$
1
0



$y = \operatorname{sech}^{-1} x$
$y = \operatorname{sech} x$
1
0
1