Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

2022–23

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Ολοκληρώματα

1. Αν η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx.$$

2. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

(α΄) $\displaystyle\int \sin^5 x\,dx.$

(β΄) $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx.$

Λύση

(α΄) Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\int \sin^5 x\,dx &= \int \sin^4 x \sin x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x\,dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx \qquad\qquad u = \cos x, \quad du = -\sin x\,dx \\
&= \int -(1-u^2)^2\,du \\
&= \int (-1+2u^2-u^4)\,du \\
&= -u + \frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C \\
&= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.
\end{aligned}$$

(β΄) Μια διαδικασία ανάλογη αυτής που ακολουθήθηκε στο (α΄) στη περίπτωση αυτή δεν δουλεύει. Εδώ χρησιμοποιούμε τον τύπο του διπλασίου τόξου

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \tag{1}$$

απ΄ όπου προκύπτουν οι χρήσιμες σχέσεις/αντικαταστάσεις

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}. \tag{2}$$

Κάνοντας χρήση αυτού του αποτελέσματος παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2\,dx &= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx \\
&= \int \frac{1}{4}\Big(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\Big)\,dx \\
&= \int \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(4x)}{2}\right) dx \\
&= \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)\right) dx \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\cos(4x) + C.
\end{aligned}$$

3. Δεδομένου ότι $\sec x = \cos x/(1-\sin^2 x)$ δείξτε ότι

$$\int \sec x\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C.$$

4. **Αναδρομικοί τύποι.** Με ολοκλήρωση κατά μέρη αποδείξτε τις αναδρομικές σχέσεις

(α΄) $\displaystyle\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx, \qquad n = 1, 2, \dots,$

(β΄) $\displaystyle\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x\sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx, \qquad n = 1, 2, \dots,$

5. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \tan^{-1} x\,dx,$$

θέτοντας $u = \tan^{-1} x$ και $v = x$.

6. **Το ολοκλήρωμα της αντίστροφης συνάρτησης.** Έστω ότι για τη συνάρτηση f υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}. Αν $y = f^{-1}(x)$ δείξτε ότι

$$\int f^{-1}(x)\,dx = \int y f'(y)\,dy$$

κατά συνέπεια

$$\int f^{-1}(x)\,dx = y f(y) - \int f(y)\,dy. \tag{3}$$

Χρησιμοποιώντας την (3) υπολογίστε και εκφράστε το αποτέλεσμα ως συνάρτηση του x καθένα από τα ολοκληρώματα

(α΄) $\displaystyle\int \log x\,dx.$ (β΄) $\displaystyle\int \sin^{-1} x\,dx.$ (γ΄) $\displaystyle\int \tan^{-1} x\,dx.$

7. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}, \qquad -3 < x < 3.$$

8. Δείξτε ότι

$$\int_1^2 \frac{1}{(x^2-2x+4)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{6}.$$

9. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}, \qquad x > \frac{2}{5}.$$

10. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{3x^4-2x^3+16x^2-7x+15}{(x-1)(x^2+4)^2}\,dx.$$

Λύση

Ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από αυτόν του αριθμητή οπότε αναλύοντας την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση σε απλά κλάσματα γράφουμε

$$\frac{3x^4-2x^3+16x^2-7x+15}{(x-1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2},$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$3x^4-2x^3+16x^2-7x+15 = A(x^2+4)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+4) + (Dx+E)(x-1).$$

Λύνοντας βρίσκουμε $A=1$, $B=2$, $C=0$, $E=1$, επομένως

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^4-2x^3+16x^2-7x+15}{(x-1)(x^2+4)^2}\,dx &= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2x\,dx}{x^2+4} + \int \frac{dx}{(x^2+4)^2}\\ &= \log|x-1| + \log(x^2+4) + I,\end{aligned}$$

όπου

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+4)^2}.$$

Για τον υπολογισμό του I θέτουμε

$$x = 2\tan\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \qquad \text{οπότε} \quad x^2+4 = 4(\tan^2\theta+1) = 4\sec^2\theta$$

άρα

$$\theta = \tan^{-1}\frac{x}{2}, \qquad \text{και} \quad dx = 2\sec^2\theta\,d\theta,$$

επομένως

$$\begin{aligned}I = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{16\sec^4\theta} = \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\,d\theta &= \frac{1}{16}\int (1+\cos 2\theta)\,d\theta\\ &= \frac{1}{16}\theta + \frac{1}{32}\sin 2\theta + C\\ &= \frac{1}{16}\theta + \frac{1}{16}\sin\theta\cos\theta + C\end{aligned}$$

κατά συνέπεια

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{1}{16}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\frac{2}{\sqrt{x^2+4}} + C$$
$$= \frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\frac{x}{x^2+4} + C.$$

Έτσι τελικά βρίσκουμε

$$\int \frac{3x^4-2x^3+16x^2-7x+15}{(x-1)(x^2+4)^2}\,dx = \log|x-1| + \log(x^2+4) + \frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\frac{x}{x^2+4} + C.$$

11. **Αντικαταστάσεις του Euler.** Σε ολοκληρώματα στα οποία η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι της μορφής $G(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι αντικαταστάσεις

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x, \qquad \text{αν } a > 0$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}, \qquad \text{αν } c > 0.$$

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx.$$

Λύση

Θέτουμε $\sqrt{x^2+4} = t - x$, τότε $t = x + \sqrt{x^2+4}$, επομένως

$$dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx = \left(1 + \frac{t-\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx = \frac{t}{\sqrt{x^2+4}}\,dx \Rightarrow \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

επομένως

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt$$
$$= \log|t| + C$$
$$= \log|\sqrt{x^2+4} + x| + C.$$

12. **Ανισότητα Cauchy–Schwarz:** Εάν οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,b]$, τότε

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right\}^2 \le \left\{\int_a^b f^2(x)\,dx\right\}\left\{\int_a^b g^2(x)\,dx\right\}.$$

Λύση

Η fg είναι συνεχής άρα ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος έχουμε

$$0 \le \int_a^b \Big(tf(x)+g(x)\Big)^2\,dx = t^2\int_a^b f^2(x)\,dx + 2t\int_a^b f(x)g(t)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, κατά συνέπεια η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι μη θετική, δηλαδή

$$\left\{2\int_a^b f(x)g(t)\,dx\right\}^2 - 4\left\{\int_a^b f^2(x)\,dx\right\}\left\{\int_a^b g^2(x)\,dx\right\} \le 0$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο.

Παρατήρηση – Βασικό αποτέλεσμα

Δείξαμε (10η Διάλεξη σελ.12,13) ότι

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} +\infty & p \le 1, \\ 1/(p-1) & p > 1. \end{cases} \tag{4}$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε ως προς τη σύγκλιση το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx.$$

Αν $p > 0$ η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση απειρίζεται καθώς $x \to 0$ ενώ αν $p \le 0$ η συνάρτηση είναι συνεχής. Θεωρούμε λοιπόν το ολοκλήρωμα

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^p}\,dx.$$

με $0 < \epsilon < 1$ και υπολογίζουμε

(α΄) Για $p = 1$,

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \log x\Big]_\epsilon^1 = \log 1 - \log\epsilon = -\log\epsilon \to +\infty \text{ καθώς } \epsilon \to 0.$$

(β΄) Για $p \neq 1$,

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \int_\epsilon^1 x^{-p}\,dx = \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big]_\epsilon^1 = \frac{1}{1-p}(1-\epsilon^{1-p}).$$

οπότε

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{1-p}(1-\epsilon^{1-p}) = \frac{1}{1-p}\left(1-\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{1-p}\right)$$

Αν $1-p > 0 \Leftrightarrow p < 1$, τότε $\epsilon^{1-p} \to 0$ καθώς $\epsilon \to 0$, ενώ αν $1-p < 0 \Leftrightarrow p > 1$, τότε

$$\epsilon^{1-p} = \frac{1}{\epsilon^{p-1}} \to +\infty \text{ καθώς } \epsilon \to 0.$$

Έτσι τελικά

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} 1/(1-p) & p \le 1, \\ +\infty & p > 1. \end{cases} \tag{5}$$

Στη 10η Διάλεξη σελ. 11 δείξαμε την περίπτωση $p = 1/2$. **Ερώτηση:** Υπάρχει $p \in \mathbb{R}$ για το οποίο το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

συγκλίνει;

13. Εξετάστε κατά πόσον το ολοκλήρωμα

$$\int_a^{+\infty} xe^{-x}\,dx,$$

όπου a είναι πραγματικός αριθμός, συγκλίνει.

14. Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1}.$$

(α΄) Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει.

(β΄) Να βρεθεί η τιμή του ολοκληρώματος.

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \tag{6}$$

κατά συνέπεια η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι συνεχής και το ολοκλήρωμα είναι δεύτερου είδους.

(α΄) Θέλουμε να συγκρίνουμε το ολοκλήρωμα με κάποιο το οποίο γνωρίζουμε ότι συγκλίνει, θα προσπαθήσουμε να το συγκρίνουμε με το βασικό (4). Παρατηρούμε ότι

$$x^2 - x + 1 > \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - x + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 > 0$$

που ισχύει, συνεπώς

$$x^2 - x + 1 > \frac{x^2}{2}. \tag{7}$$

Ετσι γράφουμε, για να απομακρυνθούμε από το άκρο 0,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1} &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1} \\ &\leq \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} + \int_1^{+\infty} \frac{2\,dx}{x^2}\end{aligned}$$

από την (7)

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} + 2\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι το ολοκλήρωμα Riemann μιας συνεχούς συνάρτησης, άρα υπάρχει (για την ακρίβεια είναι μικρότερο ή ίσο από $4/3$ από την (6)), και το δεύτερο ολοκλήρωμα συγκλίνει από την (4) ($p = 2$), κατά συνέπεια το δοσμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

(β΄) Από την (6) έχουμε, εφόσον το ολοκλήρωμα συγκλίνει

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]} \\
&= \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\infty} \frac{d\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan(+\infty) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

15. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n + 1)^p}, \qquad p > 0$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου p.

Λύση

Συγκρίνουμε με το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(\log x + 1)^p}\, dx, \qquad p > 0.$$

Θέτοντας $t = \log x + 1$, έχουμε $dt = \frac{1}{x}\, dx$ οπότε

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(\log x + 1)^p}\, dx = \int_{t(1)}^{t(\infty)} \frac{1}{t^p}\, dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^p}\, dt, \qquad p > 0.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει για $p > 1$, βλέπε (4), επομένως από το κριτήριο του ολοκληρώματος η δοσμένη σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

16. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

(α΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

(β΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$

(γ΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(δ΄) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} ne^{-n^2}$

Λύση

Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του ολοκληρώματος, έτσι (αʹ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sim \int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx < \infty$, αφού $p = 3/2 > 1$.

(βʹ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} \sim \int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{y}{e^y}\,dy < \infty$, είναι η Άσκηση 13, όπου θέσαμε $y = \log x \Leftrightarrow x = e^y$ και $dy = \frac{1}{x}\,dx$.

(γʹ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \sim \int_1^{\infty} \frac{x}{2^x}\,dx < \infty$, τι 2 τι e, βλέπε (βʹ).

(δʹ) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} ne^{-n^2} \sim \int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} e^{-y}\,dy = -\frac{1}{2}e^{-y}\Big]_1^{\infty} = -0 + \frac{1}{2e}$, όπου θέσαμε $y = x^2$, οπότε $dy = 2x\,dx$.

17. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τα ολοκληρώματα

(αʹ) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx.$

(βʹ) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^{3/2}}\,dx.$

(γʹ) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,dx.$

(δʹ) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx.$

Λύση

(αʹ) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και για μεγάλα x συμπεριφέρεται όπως η $1/\sqrt{x^3}$ για την οποία το σχετικό ολοκλήρωμα υπάρχει, είναι η περίπτωση $p = 3/2 > 1$. Ειδικά για $x \geq 1$ έχουμε

$$\sqrt{x^3} < \sqrt{1+x^3} \leq \sqrt{x^3+x^3},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx. \end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι το ολοκλήρωμα Riemann μιας συνεχούς συνάρτησης και το δεύτερο είναι ένα p-ολοκλήρωμα δεύτερου είδους με $p = 3/2 > 1$, κατά συνέπεια συγκλίνει, επομένως το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει.

(βʹ) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και για μεγάλα x συγκρίνεται με την $x/x^{3/2} = 1/x^{1/2}$ για την οποία το σχετικά ολοκλήρωμα δεν υπάρχει αφού $p = 1/2 < 1$. Συγκεκριμένα για $x \geq 1$ έχουμε

$$x^{3/2} < 1 + x^{3/2} \leq 2x^{3/2},$$

οπότε

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^{3/2}}\,dx &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^{3/2}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^{3/2}}\,dx \\ &\geq \int_0^1 \frac{x}{1+x^{3/2}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x}{(2x)^{3/2}}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^{3/2}}\,dx + \frac{1}{2^{3/2}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\,dx.\end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπάρχει, αλλά το δεύτερο δεν συγκλίνει αφού $p = 1/2 < 1$, κατά συνέπεια το δοσμένο ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

(γ΄) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση απειρίζεται στο $x = 0$, επιπλέον για x κοντά στο μηδέν η συνάρτηση συγκρίνεται με την $1/x$ ενώ για μεγάλα x με την $1/x\sqrt{x}$. Έτσι γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,dx \\ &\geq \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{2}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,dx.\end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ένα p-ολοκλήρωμα δεύτερου είδους με $p = 1$, άρα αποκλίνει, συνεπώς και το δοσμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει.

(δ΄) Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση απειρίζεται στο $x = 0$, επιπλέον για x κοντά στο μηδέν η συνάρτηση συγκρίνεται με την $1/\sqrt{x}$, αφού $1 + x \simeq 1$, ενώ για μεγάλα x με την $1/x\sqrt{x}$, συγκεκριμένα για $x \geq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sqrt{x}(1+x) &\geq \sqrt{x} \\ \sqrt{x}(1+x) &\geq x\sqrt{x}.\end{aligned}$$

Έτσι γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx \\ &= \frac{1}{1-1/2} + \frac{1}{3/2-1} \\ &= 2 + 1\end{aligned}$$

από τις (4) και (5), συνεπώς και το δοσμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

18. Εξετάστε αν το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x^x}\,dx$$

συγκλίνει συγκρίνοντάς το με τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{n}\right)^n.$$

19. Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη μεταξύ των $p > 0$ και $q > 0$ ώστε να συγκλίνει το ολοκλήρωμα
$$\int_0^\infty \frac{x^p}{x^q + 1}\, dx.$$