Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης
ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

2022–23

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Παράγωγοι συναρτήσεων ΙΙ

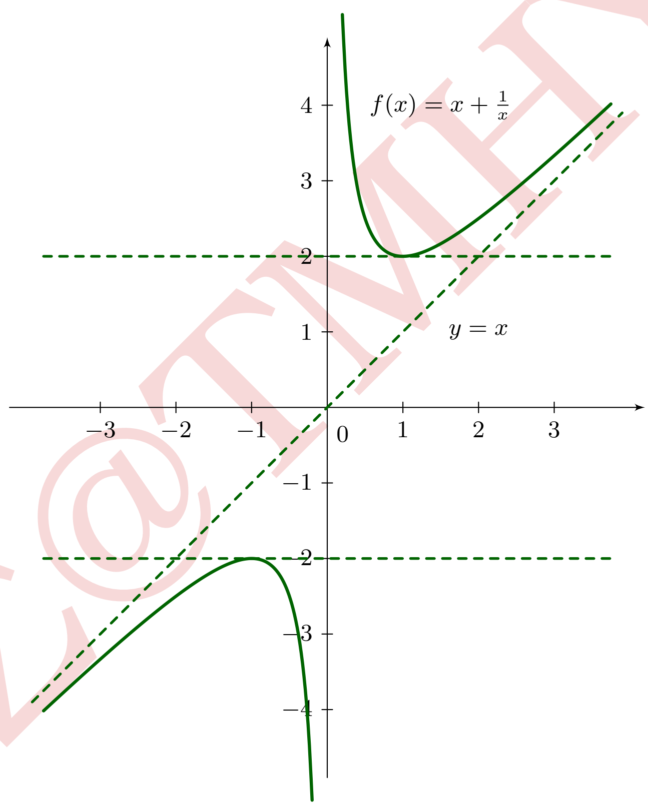
1. **Μια χρήσιμη ανισότητα.** Εάν a, b είναι θετικοί αριθμοί, δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab},$$

ειδικά για $a = b = 1$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \qquad \text{για κάθε } x > 0.$$

Λύση



Σχήμα 1: Άσκηση 1

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η προς απόδειξη ανισότητα είναι ειδική περίπτωση της σχέσης μεταξύ **αριθμητικού** και **γεωμετρικού** μέσου δύο αριθμών, δηλαδή αν x, y είναι μη αρνητικοί αριθμοί τότε

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}. \tag{1}$$

Αν $x = y = 0$ η (1) ισχύει ως ισότητα. Για την απόδειξη της (1) αν $y > 0$ σταθερό θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x) = x + y - 2\sqrt{xy}, \qquad x > 0.$$

2. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του a ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύει $\sqrt{x} \geq \log x + a$.

3. **Ανισότητα του Young.** Εάν a και b είναι μη αρνητικοί αριθμοί και $p, q > 1$ με $1/p + 1/q = 1$ δείξτε ότι
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$
Υπόδειξη: Εάν $ab = 0$ η ανισότητα ισχύει. Για $a > 0$, $b > 0$ θεωρήστε τη
$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - bx, \qquad x > 0.$$

4. Αν a είναι μια πραγματική παράμετρος, εξετάστε κατά πόσον η συνάρτηση $f_a(x) = x - a\sin x$ είναι αύξουσα, φθίνουσα, ή τίποτα από τα δύο;

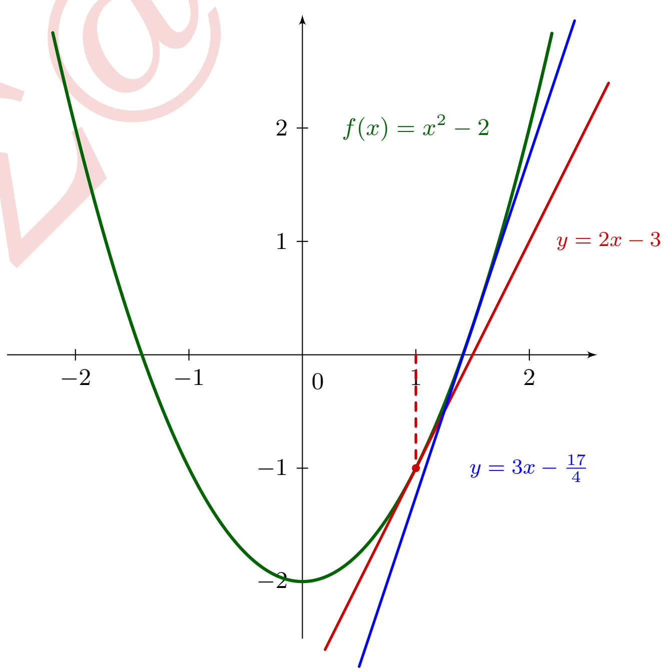
5. Να εξετασθούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες και αν συγκλίνουν να βρεθούν τα όριά τους.

   (α΄) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$

   (β΄) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$

Λύση

(α΄) Η δοσμένη ακολουθία είναι της μορφής
$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$
με $f(x) = x^2 - 2$, κατά συνέπεια αν συγκλίνει θα πρέπει να συγκλίνει σε μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, ισοδύναμα $x = \pm\sqrt{2}$. Επειδή η αρχική συνθήκη $x_1 = 1$ είναι περισσότερο “κοντά” στο $\sqrt{2}$ περιμένουμε να συγκλίνει στο $\sqrt{2}$.



Σχήμα 2: Άσκηση 5

Η ακολουθία μπορεί να γραφεί ως

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \tag{2}$$

απ' όπου επειδή $x_1 = 1$ συμπεραίνουμε:

(i) Οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί αριθμοί (δεν υπάρχει αφαίρεση στην (2))

(ii) Οι όροι της ακολουθίας είναι ρητοί αριθμοί

(iii) ότι $x_n \geq \sqrt{2}$ για $n \geq 2$ μέσω της Άσκησης 1, και τελικά μέσω του (ii) ότι $x_n > \sqrt{2}$ για $n \geq 2$.

Τότε από την έκφραση

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

έπεται ότι η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα για $n \geq 2$, οπότε λόγω της (iii) συγκλίνει. Αν x^* είναι το όριό της, παίρνοντας το όριο στα δύο μέλλη της (2) βρίσκουμε

$$x^* = \frac{x^*}{2} + \frac{1}{x^*} \Rightarrow \frac{x^*}{2} = \frac{1}{x^*} \Rightarrow x^* = \sqrt{2}$$

όπως περιμέναμε.

Σημείωση: Δίχως χρήση της Άσκησης 1, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{2} &= x_n - \sqrt{2} - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \\ &= x_n - \sqrt{2} - \frac{(x_n - \sqrt{2})(x_n + \sqrt{2})}{2x_n} \\ &= (x_n - \sqrt{2})\left(1 - \frac{x_n + \sqrt{2}}{2x_n}\right) \\ &= \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται η μονοτονία της ακολουθίας αλλά την ίδια στιγμή και το κάτω φράγμα για $n \geq 2$, συνεπώς και η σύγκλιση.

6. Τι θα συμβεί αν χρησιμοποιήσετε τον Κανόνα του l'Hospital για να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}};$$

Υπολογίστε το όριο με διαφορετικό τρόπο.

7. Να βρεθούν σταθερές a και b, αν υπάρχουν τέτοιες, ώστε

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b\right) = 0.$$

Υπόδειξη

Επειδή

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{(\sin\xi)x^4}{4!}$$

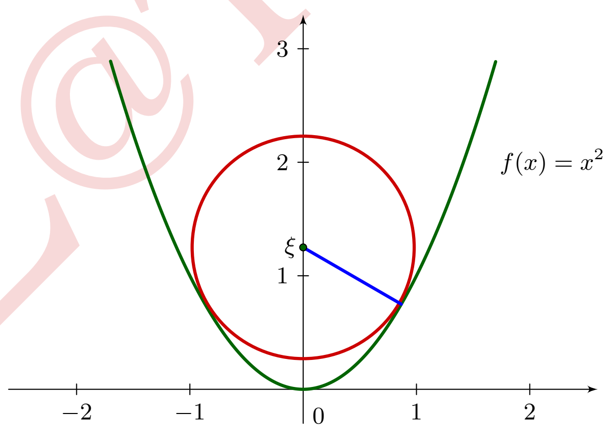
για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x, υπολογίζουμε (για κάποιο ξ μεταξύ 0 και $3x$)

$$\begin{aligned}\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{a}{x^2} + b &= \frac{3x}{x^3} - \frac{(3x)^3}{3!x^3} + \frac{\sin\xi(3x)^4}{4!x^3} + \frac{a}{x^2} + b \\ &= \left(\frac{3}{x^2} + \frac{a}{x^2}\right) + \left(\frac{3^3}{3!} + b\right) + \frac{3^4\sin\xi}{4!}x.\end{aligned}$$

8. Εάν ένα αρχικό κεφάλαιο A_0 κατατεθεί με επιτόκιο r και ανατοκίζεται n φορές το χρόνο, το ποσό μετά από t χρόνια θα έχει ανέλθει σε
$$A = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$
Στη περίπτωση συνεχούς ανατοκισμού, δηλαδή $n \to \infty$, δείξτε ότι το τελικό ποσό μετά από t χρόνια θα είναι
$$A = A_0e^{rt}.$$

9. **Ένα ιστορικό παράδειγμα.** Η πρώτη εμφάνιση του Κανόνα του l'Hospital σε έντυπη μορφή ήταν στο βιβλίο *Analyse des Infiniment Petits* που εκδόθηκε από τον Μαρκήσιο de l'Hospital το 1696. Αυτό ήταν και το πρώτο βιβλίο Απειροστικού Λογισμού που εκδόθηκε ποτέ. Το παράδειγμα που χρησιμοποίησε ο συγγραφέας για να περιγράψει τη μέθοδο ήταν ο υπολογισμός του ορίου
$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}},$$
όπου $a > 0$. Υπολογίστε αυτό το όριο.

10. Περιφέρεια ακτίνας $r = 1$ ισορροπεί στο εσωτερικό της παραβολής $y = x^2$, όπως δείχνει το Σχήμα 3. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου της περιφέρειας, από συμμετρία $(0, \xi)$, καθώς και τα



Σχήμα 3: Άσκηση 10

σημεία τομής της περιφέρειας με την παραβολή.

11. Να υπολογιστούν τα όρια

(α') $\lim_{x\to 0}(e^{3x} - 5x)^{1/x}$.

(β') $\lim_{x\to\infty}(e^{3x} - 5x)^{1/x}$.

(γ') $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$ $\quad a > 0, \quad b > 0.$

(δ') $\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)}$. $\quad a > 0, \quad b > 0.$

(ε') $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right).$

(ϛ') $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt[4]{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}.$

(ζ') $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \left(\log\frac{1}{x}\right)^{x}.$

(η') $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)}.$

(θ') $\displaystyle\lim_{x\to 1-} (\log x)\log(1-x).$

(ι') $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^{1/\log x}.$

12. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right).$$

Λύση

1ος τρόπος: l'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) \qquad (\infty - \infty)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} && \frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2x - 2\sin x\cos x}{2x\sin^2 x + x^2 2\sin x\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2x - \sin 2x}{x(1-\cos 2x) + x^2\sin 2x}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t - \sin t}{(t/2)(1-\cos t) + (t/2)^2\sin t} && t = 2x\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{4(t - \sin t)}{2t - 2t\cos t + t^2\sin t} && \frac{0}{0}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{4(1-\cos t)}{2 - 2\cos t + 4t\sin t + t^2\cos t} && \frac{0}{0}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{4\sin t}{6\sin t + 6t\cos t - t^2\sin t} && \frac{0}{0}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{4\cos t}{12\cos t - 6t\sin t - 2t\sin t - t^2\cos t}\\
&= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

2ος τρόπος: Προσεγγίσεις Taylor. Γνωρίζουμε ότι

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

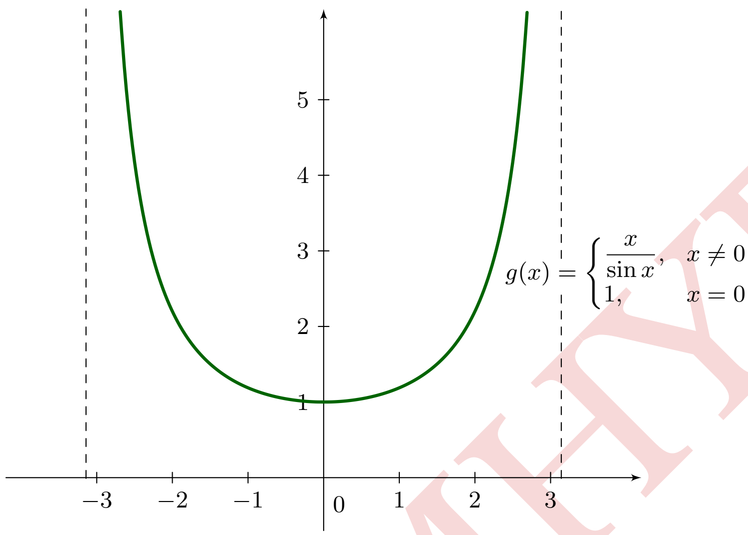
έτσι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin x} &= \frac{1}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}\\
&= \frac{1}{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)}\\
&= \frac{1}{x}g(x)
\end{aligned}$$

όπου

$$g(x) = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots} = \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)^{-1}.$$

Η συνάρτηση g είναι άρτια, έχει παραγώγους όλων των τάξεων και τέτοια ώστε $g(0) = 1$. Επιπλέον



Σχήμα 4: Άσκηση 12. Η συνάρτηση g στο $(-\pi, \pi)$

$$g'(x) = -1\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)^{-2}\left(-\frac{2x}{3!} + \frac{4x^3}{5!} - \cdots\right)$$

$$\begin{aligned} g''(x) = 2\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)^{-3}\left(-\frac{2x}{3!} + \frac{4x^3}{5!} - \cdots\right)^2 \\ - 1\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)^{-2}\left(-\frac{2}{3!} + \frac{12x^2}{5!} - \cdots\right) \end{aligned}$$

επομένως $g'(0) = 0$ (όπως περιμέναμε) και $g''(0) = 1/3$, συνεπώς

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(\xi)}{3!}x^3 \\ &= 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{g'''(\xi)}{6}x^3. \end{aligned}$$

Έτσι υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin x} &= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{g'''(\xi)}{6}x^3\right) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{g'''(\xi)}{6}x^2 \end{aligned}$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{g'''(\xi)}{6}x^2\right)^2 - \frac{1}{x^2} \\
&= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{36}x^2 + \frac{(g'''(\xi))^2}{36}x^4 + \frac{1}{3} + \frac{g'''(\xi)}{3}x + \frac{g'''(\xi)}{18}x^3 - \frac{1}{x^2} \\
&= \frac{1}{3} + x\left(\frac{g'''(\xi)}{3} + \frac{1}{36}x + \frac{g'''(\xi)}{18}x^2 + \frac{(g'''(\xi))^2}{36}x^3\right) \\
&= \frac{1}{3} + O(x),
\end{aligned}
$$

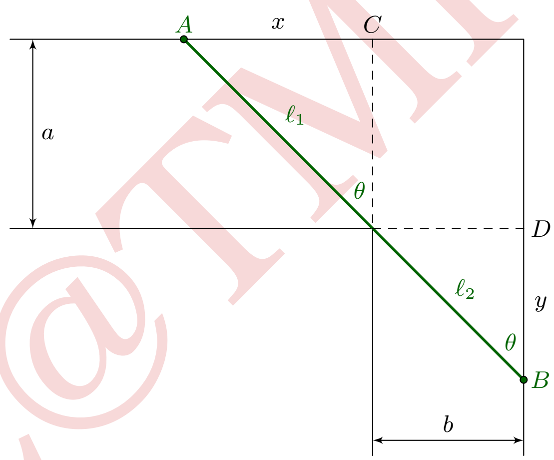
όπου $O(x) \to 0$ καθώς $x \to 0$. Έτσι βρίσκουμε

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}$$

όπως βρήκαμε και πριν.

13. Να βρεθεί το μέγιστο μήκος σκάλας η οποία μπορεί να περάσει από τη γωνία του διαδρόμου με διαστάσεις a και b του Σχήματος 5.

Υπόδειξη: Εκφράστε το μήκος L της σκάλας AB ως συνάρτηση της γωνίας θ που σχηματίζει το τμήμα AB με την κατακόρυφη πλευρά του διαδρόμου.



Σχήμα 5: Άσκηση 13

Λύση

1ος τρόπος: Με την υπόδειξη. Από τα ορθογώνια τρίγωνα βρίσκουμε

$$\cos\theta = \frac{a}{\ell_1}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{\ell_2}$$

έτσι αν L είναι το μήκος της σκάλας, τότε

$$L = \ell_1 + \ell_2 = \frac{a}{\cos\theta} + \frac{b}{\sin\theta} = a\sec\theta + b\csc\theta.$$

Το ζητούμενο L είναι το ελάχιστο ευθύγραμμο τμήμα που αγγίζει τους εξωτερικούς τοίχους και την εσωτερική γωνία. Επομένως

$$L'(\theta) = a\sec\theta\tan\theta - b\csc\theta\cot\theta = 0 \Leftrightarrow a\sin^3\theta = b\cos^3 \Leftrightarrow \tan\theta = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Για $\theta = \tan^{-1}\sqrt[3]{b/a}$ αποδεικνύεται ότι $L''(\theta) > 0$ κατά συνέπεια έχουμε ελάχιστο. Υπολογίζοντας

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{a^{1/3}}, \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{b^{1/3}}$$

τελικά βρίσκουμε

$$L = a\sec\theta + b\csc\theta = (a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}.$$

2ος τρόπος: Από τα όμοια τρίγωνα βρίσκουμε

$$\tan\theta = \frac{AC}{a} = \frac{b}{BD}$$

οπότε θέτοντας $AC = x$ και $BD = y$ από την προηγούμενη σχέση βρίσκουμε $y = ab/x$. Το ζητούμενο μήκος είναι

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{y^2+b^2} \\ &= \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{\frac{a^2b^2}{x^2}+b^2} \\ &= \sqrt{x^2+a^2} + \frac{b}{x}\sqrt{x^2+a^2} \\ &= \left(1+\frac{b}{x}\right)\sqrt{x^2+a^2}. \end{aligned}$$

Και πάλι θέλουμε να υπολογίσουμε την ελάχιστη τιμή της $L(x)$. Δείξτε ότι $L'(x) = 0$ αν και μόνο αν $x = \sqrt[3]{ab^2}$, και ότι $L(\sqrt[3]{ab^2})$ είναι η ελάχιστη τιμή της L.