Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

2022–23

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Πραγματικοί και Μιγαδικοί αριθμοί

1. **Η ανισότητα του Bernoulli.** Εάν $a \geq -1$ να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

Βλέπε Σημειώσεις σελίδες 17-18.

2. **Το Δυωνυμικό Θεώρημα.** Εάν a και b είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί τότε

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

για κάθε φυσικό αριθμό n. Βλέπε Σημειώσεις σελίδα 21.

3. Με χρήση της μαθηματικής επαγωγής να δειχθεί ότι εάν $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί τότε

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. Να δειχθεί ότι εάν a και b είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί τότε $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

5. Να βρεθεί το $\sup\{-e^{-x^2} : x \in \mathbb{R}\}$.

6. **Ο νόμος του συνημιτόνου.** Έστω ένα τρίγωνο με μήκη πλευρών α, β, και γ. Εάν θ είναι η γωνία απέναντι από την πλευρά μήκους γ δείξτε ότι

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta.$$

Βλέπε Σημειώσεις σελίδα 92.

7. Αποδείξτε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες:

(α΄) $\cos(\pi \pm x) = -\cos x$.

(β΄) $\sin(\pi \pm x) = \pm\sin x$.

(γ΄) $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp\sin x$.

(δ΄) $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x$.

(ε΄) $\cos(x \pm y) = \cos x\, \cos y \mp \sin x\, \sin y$.

(ϛ΄) $\sin(x \pm y) = \sin x\, \cos y \pm \cos x\, \sin y$.

(ζ΄) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

(η΄) $\sin 2x = 2\sin x\, \cos x$.

(θ΄) $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$.

(ι΄) $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$.

(ια′) $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

(ιβ′) $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

8. Να γραφούν οι παρακάτω μιγαδικοί αριθμοί στη μορφή $a + ib$:

   (α′) $(-3+i)(1-i2)$

   (β′) $\dfrac{1}{9+i2}$

   (γ′) $\dfrac{7-i}{3+i5}$

9. Εάν $z \in \mathbb{C}$ και $w \in \mathbb{C}$ να δειχθεί ότι:

   (α′) $z^2 + 1 = (z+i)(z-i)$

   (β′) $z^2 + w^2 = (z+iw)(z-iw)$.

10. Να υπολογισθούν οι δυνάμεις i^n, για κάθε ακέραιο αριθμό n.

11. Να βρεθεί μια γεωμετρική σχέση μεταξύ των μιγαδικών αριθμών z και iz.

12. Να δειχθεί ότι οι αριθμοί $1 \pm i$ ικανοποιούν την εξίσωση $z^2 - 2z + 2 = 0$.

13. Εάν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί να βρεθούν οι τιμές τους σε κάθε μία από τις εφράσεις:

    (α′) $5x + i6 = -8 + i2y$.

    (β′) $i(2x - 4y) = 4x + 2 + i3y$.

    (γ′) $(3x + i)^2 = 8 + iy$.

    (δ′) $x + iy = (x - iy)^2$.

14. Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$. **Υπόδειξη**: Θέτουμε $z = x + iy$ στην εξίσωση και αφού κάνουμε πράξεις κοιτάζουμε ξεχωριστά το πραγματικό και φανταστικό μέρος.

15. Εάν $z \in \mathbb{C}$ να δειχθεί ότι:

    (α′) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$

    (β′) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$

16. Να βρεθούν τα x και y, όταν $x + iy = |x + iy|$.

17. Εάν z και w είναι μιγαδικοί αριθμοί να δειχθεί ότι: **(i)** $|z| = |-z|$ και **(ii)** $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$.

18. Να δειχθεί ότι εάν z και w είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύουν τα παρακάτω:

    (α′) $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$.

    (β′) $|z-w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$.

    (γ′) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ *Νόμος του παραλληλογράμου.*

19. Αποδείξτε τις ιδιότητες του ορίσματος:

    (α′) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

    (β′) $\arg\dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$.

20. Δείξτε ότι εάν $\operatorname{Re} z_1 > 0$ και $\operatorname{Re} z_2 > 0$, τότε

    $$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

    Δώστε αντιπαράδειγμα όπου $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$.

21. Η συνάρτηση $\tan\theta$ είναι ένα προς ένα στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, κατά συνέπεια η αντίστροφη συνάρτηση $\arctan$ ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με τη σχέση $\arctan t = \theta$ αν και μόνον αν $\tan\theta = t$ και $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Εάν $z = x + iy$ δείξτε ότι

(α') $\operatorname{Arg} z = \arctan \dfrac{y}{x}$, εάν $x > 0$.

(β') $\operatorname{Arg} z = \arctan \dfrac{y}{x} + \pi$, εάν $x < 0$ και $y \geq 0$.

(γ') $\operatorname{Arg} z = \arctan \dfrac{y}{x} - \pi$, εάν $x < 0$ και $y < 0$.

(δ') $\operatorname{Arg} z = \dfrac{\pi}{2}$, εάν $x = 0$ και $y > 0$.

(ε') $\operatorname{Arg} z = -\dfrac{\pi}{2}$, εάν $x = 0$ και $y < 0$.

22. Δείξτε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 1$ ισχύει

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

23. Να περιγραφεί το σύνολο των μιγαδικών αριθμών που αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις σχέσεις:

(α') $z + \overline{z} = 1$, (β') $z - \overline{z} = i$, (γ') $z + \overline{z} = |z|^2$, (δ') $\overline{z} = |z|$.

24. Να περιγραφούν γεωμετρικά οι σχέσεις:

(α') $1 < \operatorname{Re} z < 2$,

(β') $1 < |z| < 2$,

(γ') $|\operatorname{Im} z| \geq 1$,

(δ') $|z| = \operatorname{Im} z + 1$,

(ε') $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$,

(ϛ') $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 1$.

25. Να περιγραφεί το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z που είναι τέτοιοι ώστε

(α') $|z - i| = |z + i|$, (β') $|z - i| < |z - 1|$, (γ') $|z - 4| \geq |z|$.

26. Η έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία που λέγονται εστίες είναι σταθερό.

(α') Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 και άθροισμα αποστάσεων από τις εστίες ίσο με $2c$, όπου $c > 0$.

(β') Εάν $z_1 = -a$ και $z_2 = a$, όπου a είναι θετικός αριθμός, να δειχθεί ότι η εξίσωση της έλλειψης σε καρτεσιανές συντεταγμένες x και y γράφεται

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

27. Εάν $z_0 \neq z_1$ είναι μιγαδικοί αριθμοί να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων z που ικανοποιούν τις σχέσεις

(α') $\operatorname{Im}\left[\dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right] = 0$ (β') $\operatorname{Im}\left[\dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right] > 0$.