

Γενικά Μαθηματικά Ι

Διάλεξη 13

Γραμμικές εξισώσεις Το Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας Απλά μοντέλα με ΔΕ 1ης τάξης

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

26 Μαΐου 2025

2.2. Γραμμικές Εξισώσεις

Μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης $y' = f(x, y)$ λέγεται **γραμμική** εάν είναι της μορφής

$$y' + p(t)y = g(t), \quad (1)$$

όπου p και g είναι γνωστές συναρτήσεις.

Παρατηρούμε ότι μία εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών είναι γραμμική αν και μόνον αν είναι της μορφής

$$y' = p(t)(ay + b),$$

όπου a και b είναι σταθερές. Η εξίσωση $y' = ty + 1$ είναι γραμμική αλλά δεν είναι χωριζομένων μεταβλητών. Πρόθεση μας είναι να εκφράσουμε τη λύση της εξίσωσης (1) σε κλειστή μορφή.

Υποθέτουμε ότι οι p και g είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα I , το οποίο είναι πιθανό να είναι άπειρο ή και ολόκληρη η πραγματική ευθεία, και θέλουμε να βρούμε τη λύση ορισμένη στο διάστημα αυτό.

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με κάποια μη μηδενική συνάρτηση $\mu(t)$ έχουμε την ισοδύναμη με την (1) εξίσωση

$$\mu(t)y' + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t) \quad (2)$$

και απαιτούμε το αριστερό μέλος της (2) να είναι παράγωγος γινομένου, ισοδύναμα η συνάρτηση $\mu(t)$ να είναι τέτοια ώστε

$$\mu'(t) = \mu(t)p(t), \quad (3)$$

να είναι δηλαδή

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt}. \quad (4)$$

Έτσι η (2) γίνεται

$$(\mu(t)y)' = \mu(t)g(t),$$

απ' όπου ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t) dt + c$$

ή τελικά

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)g(t) dt + \frac{c}{\mu(t)}. \quad (5)$$

Δείξαμε λοιπόν ότι οι λύσεις της (1) δίνονται από τον τύπο (5) όπου η $\mu = \mu(t)$ είναι **μία οποιαδήποτε** λύση της (3), δίνεται δηλαδή από την (4). Η συνάρτηση μ λέγεται **ολοκληρωτικός παράγοντας** για τη γραμμική εξίσωση (1).

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η εξίσωση

$$y' + y = e^{-t}. \quad (6)$$

Η εξίσωση είναι γραμμική. Ένας ολοκληρωτικός παράγοντας δίνεται από τη σχέση

$$\mu(t) = e^{\int 1 dt} = e^{t+c} = Ce^t,$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με e^t και κατόπιν ολοκληρώνοντας έχουμε

$$y'e^t + ye^t = e^{-t}e^t \Rightarrow (e^t y)' = 1 \Rightarrow e^t y = t + c.$$

Κατά συνέπεια οι λύσεις της εξίσωσης είναι της μορφής

$$y = te^{-t} + ce^{-t}. \quad (7)$$

Παράδειγμα 2

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' + y = e^{-t}, \quad y(t_0) = y_0.$$

Δείξαμε στο Παράδειγμα 1 ότι η λύση της εξίσωσης είναι η $y = t \exp(-t) + c \exp(-t)$ η οποία εξαρτάται από μία σταθερά c . Αν τώρα $y(t_0) = y_0$ θα πρέπει να ισχύει

$$y_0 = t_0 e^{-t_0} + c e^{-t_0},$$

απ' όπου λύνοντας ως προς c έχουμε

$$c = y_0 e^{t_0} - t_0.$$

Δηλαδή η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y = (t - t_0) e^{-t} + y_0 e^{-(t-t_0)}.$$

Το αποτέλεσμα στο Παράδειγμα 2 υποδηλώνει ότι **κάθε** λύση του (6) προέρχεται από τη (7). Αυτό όντως συμβαίνει και είναι απόρροια του Θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας για διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Για τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης το θεώρημα αυτό μπορεί να διαβαστεί ως

Θεώρημα 1

Εάν οι p και g είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο ανοικτό διάστημα I και t_0 είναι σημείο του I τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' + p(t)y = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad (8)$$

όπου y_0 είναι μία αυθαίρετη σταθερά, έχει μοναδική λύση στο I , την

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} \left\{ \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} p(s) ds} g(\tau) d\tau + y_0 \right\}. \quad (9)$$

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δείξει ότι οι λύσεις της εξίσωσης στη (8) δίνονται από την (5), η οποία μπορεί να γραφεί σαν

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \int_{t_0}^t \mu(s) g(s) ds + \frac{c}{\mu(t)},$$

έτσι ώστε

$$y(t_0) = y_0 = \frac{c}{\mu(t_0)}.$$

Εάν τώρα επιλέξουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα μ έτσι ώστε $\mu(t_0) = 1$, επιλέξουμε δηλαδή

$$\mu(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s) ds}, \quad (10)$$

τότε θα είναι $c = y_0$. Έτσι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (8) δίνεται από τη ζητούμενη σχέση

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} \left\{ \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} p(s) ds} g(\tau) d\tau + y_0 \right\}.$$

Αποδεικνύουμε τώρα τη μοναδικότητα της λύσης του (8). Εάν y_1 και y_2 είναι λύσεις του (8) θα έχουμε

$$y_i' + p(t)y_i = g(t), \quad y_i(t_0) = y_0, \quad i = 1, 2$$

και αφαιρώντας

$$(y_1 - y_2)' + p(t)(y_1 - y_2) = 0, \quad (y_1 - y_2)(t_0) = 0.$$

Αν τώρα ορίσουμε τη συνάρτηση $w = y_1 - y_2$ τότε η w ικανοποιεί το

$$w' + p(t)w = 0, \quad w(t_0) = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας αρχικά με τον ολοκληρωτικό παράγοντα (10) και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$(\mu w)' = 0 \Rightarrow \mu w = c,$$

όπου c μία σταθερά. Έτσι

$$w = c \exp\left(-\int_{t_0}^t p(s) ds\right).$$

Η αρχική συνθήκη ικανοποιείται αν

$$w(t_0) = c = 0,$$

επομένως

$$w = y_1 - y_2 = 0,$$

για όλα τα t στο διάστημα I . Έτσι $y_1 = y_2$. Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Στη περίπτωση λοιπόν των γραμμικών εξισώσεων μπορούμε να μιλούμε για **τη γενική λύση** της διαφορικής εξίσωσης υπονοώντας ότι η μοναδική λύση ενός προβλήματος αρχικών τιμών προκύπτει με τη κατάλληλη επιλογή της σταθεράς. Η (9) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_{\tau}^t p(s) ds} g(\tau) d\tau, \quad (11)$$

ή ισοδύναμα

$$y(t) = U(t, t_0) y_0 + \int_{t_0}^t U(t, \tau) g(\tau) d\tau, \quad (12)$$

όπου

$$U(t, \xi) = e^{-\int_{\xi}^t p(s) ds}. \quad (13)$$

Η λύση (11) ή (12) αναφέρεται σαν **τύπος μεταβολής των παραμέτρων**. Παρατηρούμε επίσης ότι εάν η συνάρτηση p στην (8) είναι σταθερά έστω $p(t) = a$, τότε η (11) γράφεται

$$y(t) = y_0 e^{-a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-a(t-\tau)} g(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Άσκηση 1 (Δικαιολόγηση του ονόματος τύπος μεταβολής των παραμέτρων και ένας άλλος τρόπος απόδειξης του θεωρήματος)

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (8), ακολουθώντας τα βήματα:

- 1 Να βρεθεί μία λύση y_1 της εξίσωσης $y' + p(t)y = 0$ με $y_1(t_0) = 1$.
- 2 Υποθέτοντας ότι η λύση του $y' + p(t)y = g(t)$, $y(t_0) = y_0$ είναι της μορφής $y = c(t)y_1(t)$, όπου $c(t)$ είναι μία “μεταβλητή σταθερά” αντικαταστήστε στην εξίσωση και υπολογίστε την άγνωστη συνάρτηση c , και έτσι την έκφραση του y .

Άσκηση 2

Να βρεθεί η τιμή του y_0 για την οποία η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' - y = 1 + 2\sin t, \quad y(0) = y_0,$$

- ❶ παραμένει πεπερασμένη καθώς $t \rightarrow \infty$,
- ❷ είναι περιοδική συνάρτηση του t και
- ❸ είναι φραγμένη για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Λύση. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(t) = e^{\int_0^t -1 ds} = e^{-t}$$

έχουμε

$$(e^{-t}y)' = e^{-t} + 2e^{-t}\sin t,$$

και ολοκληρώνοντας

$$\begin{aligned} e^{-t}y &= -e^{-t} + 2 \int e^{-t} \sin t \, dt + c \\ &= -e^{-t} - e^{-t}(\cos t + \sin t) + c. \end{aligned}$$

Έτσι η γενική λύση της εξίσωσης είναι η

$$y = ce^t - (\cos t + \sin t) - 1.$$

Από τη γενική λύση τώρα και την αρχική συνθήκη προκύπτει

$$y_0 = y(0) = c - 1 - 1,$$

απ' όπου βρίσκουμε $c = y_0 + 2$ και αντικαθιστώντας στη γενική λύση έχουμε τελικά

$$y = (y_0 + 2)e^t - (\cos t + \sin t) - 1.$$

Από την έκφραση αυτή του y προκύπτει ότι η λύση είναι πεπερασμένη καθώς $t \rightarrow \infty$, ή είναι περιοδική συνάρτηση του t , ή είναι φραγμένη για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε και μόνον τότε όταν $y_0 = -2$.

2.3. Εξισώσεις Bernoulli

Οι Εξισώσεις **Bernoulli** είναι της μορφής

$$y' + p(t)y = q(t)y^\alpha, \quad (15)$$

όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός. Παρατηρούμε ότι εάν $\alpha = 0, 1$ τότε η (15) είναι μία γραμμική εξίσωση, η οποία στη περίπτωση $\alpha = 1$ είναι επιπλέον χωριζομένων μεταβλητών. Παρατηρούμε επίσης ότι για $\alpha > 0$ η $y = 0$ είναι μία λύση της (15). Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $\alpha \neq 0, 1$. Εάν $y \neq 0$ η (15) γράφεται

$$y^{-\alpha} y' + p(t)y^{1-\alpha} = q(t),$$

και η αλλαγή μεταβλητής

$$v = y^{1-\alpha}, \quad (16)$$

οδηγεί μετά από πράξεις στη γραμμική εξίσωση

$$v' + (1 - \alpha)p(t)v = (1 - \alpha)q(t). \quad (17)$$

Με χρήση λοιπόν του μετασχηματισμού (16) μία εξίσωση Bernoulli ανάγεται σε μία γραμμική εξίσωση.

Παράδειγμα 3

Να λυθεί η εξίσωση

$$t^2 y' + 2ty - y^3 = 0, \quad t > 0.$$

Γράφοντας τη δοσμένη εξίσωση στη μορφή

$$y' + \frac{2}{t}y - \frac{1}{t^2}y^3 = 0,$$

διαπιστώνεται ότι είναι μία εξίσωση Bernoulli με $\alpha = 3$, και ότι η $y = 0$ είναι μία λύση της. Αν τώρα $y \neq 0$, διαιρώντας την εξίσωση με y^3 βρίσκουμε

$$y^{-3}y' + \frac{2}{t}y^{-2} - \frac{1}{t^2} = 0,$$

και θέτοντας, όπως στην (16), $v = y^{1-3} = y^{-2}$ προκύπτει η γραμμική εξίσωση

$$v' + \frac{-4}{t}v + \frac{2}{t^2} = 0, \quad t > 0.$$

Παράδειγμα 3 (συνέχεια)

Πολλαπλασιάζοντας τώρα με τη συνάρτηση (ολοκληρωτικό παράγοντα)

$$\mu(t) = \exp\left(\int_1^t \frac{-4}{s} ds\right) = \frac{1}{t^4},$$

έχουμε

$$\left(\frac{1}{t^4}v\right)' = \frac{-2}{t^4} \Rightarrow \frac{1}{t^4}v = \frac{2}{3t^3} + c,$$

οπότε

$$v = \frac{2}{3}t + ct^4,$$

όπου c είναι μία αυθαίρετη σταθερά. Επιστρέφοντας στην αρχική μεταβλητή y διά μέσου της $y = \pm 1/\sqrt{v}$ τελικά έχουμε τη γενική λύση της αρχικής εξίσωσης να είναι η

$$y = \pm \sqrt{\frac{3}{2t + Ct^4}}.$$

Άσκηση 3

Έστω a ένας πραγματικός αριθμός. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση f , της οποίας η μέση τιμή σε κάθε διάστημα $[0, x]$, με $x \neq 0$, είναι ίση με $(f(x) - a)/x$.

Άσκηση 4

Να προσδιοριστούν όλες οι συναρτήσεις $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$, των οποίων η μέση τιμή σε κάθε διάστημα $[0, x]$, $x > 0$, είναι ίση με το γεωμετρικό μέσο των $f(0)$ και $f(x)$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Οι ζητούμενες συναρτήσεις f ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(s) ds = \sqrt{f(0)f(x)}.$$

Διακρίνετε τις περιπτώσεις $f(0) = 0$ και $f(0) \neq 0$.

Το πρόβλημα αυτό εμφανίστηκε στο W. L. Putnam Mathematics Competition το 1962.

3. Το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας

Θεώρημα 2 (Picard - Lindelöf Τοπική Ύπαρξη και Μοναδικότητα)

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (18)$$

Εάν οι συναρτήσεις f και $\partial f / \partial y$ είναι συνεχείς σε ένα ορθογώνιο το οποίο περιέχει το σημείο (t_0, y_0) τότε υπάρχει μοναδική λύση του (18) ορισμένη σε κάποιο διάστημα I το οποίο περιέχει το t_0 .

Παράδειγμα 4

Να λυθεί το πρόβλημα

$$ty' = 2y, \quad y(0) = 0. \quad (19)$$

Στη περίπτωση αυτή είναι $f(t, y) = 2y/t$ η οποία δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$, για την ακρίβεια δεν ορίζεται για $t = 0$. Όπως παρατηρούμε μία λύση του προβλήματος είναι η $y = 0$.

Παράδειγμα 4 (συνέχεια)

Αναζητώντας άλλες λύσεις γράφουμε

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{t},$$

για $y \neq 0$ απ' όπου ολοκληρώνοντας παίρνουμε διαδοχικά

$$\ln |y| = 2 \ln |t| + \ln |c| \Rightarrow \ln |y| = \ln |ct^2| \Rightarrow y = \pm ct^2.$$

άρα η εξίσωση $ty' = 2y$ έχει μία διπαραμετρική οικογένεια λύσεων

$$y = \begin{cases} c_1 t^2, & t < 0 \\ c_2 t^2, & t \geq 0, \end{cases}$$

όπου c_1 και c_2 είναι πραγματικές σταθερές. Η οικογένεια αυτή των λύσεων ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη, οπότε έχουμε άπειρες λύσεις του (19).

Παρατήρηση 1

Στο σημείο αυτό θέλουμε να τονίσουμε ότι το αποτέλεσμα του Θεωρήματος ειδικά για τη μοναδικότητα της λύσης είναι τοπικό. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το πρόβλημα

$$ty' = 2y, \quad y(1) = 1. \quad (20)$$

Οι συναρτήσεις

$$f(t, y) = \frac{2y}{t} \quad \text{και} \quad f_y(t, y) = \frac{2}{t}$$

είναι συνεχείς σε κάθε ορθογώνιο που περιέχει το $(1, 1)$ στο εσωτερικό του και περιέχεται στο ημιεπίπεδο $t > 0$, αλλά κάθε συνάρτηση της μονοπαραμετρικής οικογένειας

$$y = \begin{cases} ct^2, & t < 0 \\ t^2, & t \geq 0, \end{cases}$$

είναι λύση του (20). Σε μία περιοχή όμως του $t = 1$, $(1 - \delta, 1 + \delta)$ υπάρχει μοναδική λύση, συγκεκριμένα η $y = t^2$.

Άσκηση 5

Να δείχθεί ότι για κάθε $c \geq 0$ η συνάρτηση

$$y = \begin{cases} 0, & t < c \\ (t - c)^2, & t \geq c, \end{cases}$$

είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0.$$

Έρχεται το γεγονός αυτό σε αντίθεση με το Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 6

Να βρεθούν όλες οι λύσεις του μη γραμμικού προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(2) = 0.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Η εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών.

Σχετικά με την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (21)$$

περιγράφουμε ένα τρόπο απόδειξης του θεωρήματος που την ίδια στιγμή μας παρέχει και τρόπο εύρεσης μίας προσέγγισης της λύσης.

Το πρόβλημα (21) είναι ισοδύναμο με την **ολοκληρωτική εξίσωση**

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \quad (22)$$

Πραγματικά εάν ολοκληρώσουμε την (21) προκύπτει η (22), ενώ αν παραγωγίσουμε την (22) προκύπτει η (21).

Ένας τρόπος που χρησιμοποιείται για ναδειχθεί ότι η εξίσωση (22), και άρα η (21), έχει λύση είναι η **μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων** του **Picard**.

Η μέθοδος αυτή συνίσταται στη κατασκευή μίας αναδρομικής ακολουθίας συναρτήσεων όπως παρακάτω

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0(s)) ds,$$

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) ds,$$

$$y_3(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_2(s)) ds,$$

$$\vdots$$

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds,$$

$$\vdots$$

όπου $y_0(s)$ είναι η αρχική συνθήκη, δηλαδή $y_0(s) = y_0$ και παρατηρούμε ότι κάθε μέλος της ακολουθίας $y_1, y_2, y_3, \dots$ ικανοποιεί την αρχική συνθήκη. Αποδεικνύεται ότι εάν οι υποθέσεις του θεωρήματος ισχύουν τότε η αναδρομική αυτή ακολουθία των συναρτήσεων συγκλίνει στη μοναδική λύση του (21).

Παράδειγμα 5

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών: $y' = y$, $y(0) = 1$.

Ακολουθώντας τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων έχουμε

$$y_0(t) = 1$$

$$y_1(t) = 1 + \int_0^t 1 \, ds = 1 + t$$

$$y_2(t) = 1 + \int_0^t (1 + s) \, ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$$y_3(t) = 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right) \, ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \cdot 3}$$

$$\vdots$$

$$y_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{t^n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$$

$$\vdots$$

Παράδειγμα 5 (συνέχεια)

Παρατηρούμε ότι καθώς $n \rightarrow \infty$, τότε

$$y_n(t) \rightarrow 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t,$$

όπως περιμένουμε.

Άσκηση 7

Το μη γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(2) = 0,$$

δεν έχει μοναδική λύση. Να δείχθεί ότι η μέθοδος του Picard με $y_0(t) = 0$ οδηγεί στη λύση $y = 0$, ενώ η ίδια μέθοδος αρχίζοντας με $y_0(t) = t - 2$ οδηγεί στη λύση $y = (t - 2)^3$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Για τη περίπτωση $y_0(t) = t - 2$ δείξτε ότι $y_n(t) = a_n(t - 2)^{b_n}$ και καθώς $n \rightarrow \infty$, $a_n \rightarrow 1$ και $b_n \rightarrow 3$.

4. Απλά μοντέλα ΔΕ 1ης τάξης

Άσκηση 8

Η ανάπτυξη ενός κυτάρου εξαρτάται από τη ροή θρεπτικών ουσιών μέσω της επιφάνειάς του. Αν $W(t)$ είναι το βάρος του κυτάρου τη χρονική στιγμή t , $W(0) = W_0$, και αν υποθέσουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του βάρους είναι ανάλογος του εμβαδού της επιφάνειας του κυτάρου, ισοδύναμα

$$\frac{dW}{dt} = kS, \quad (S = \text{εμβαδόν επιφάνειας})$$

- 1 Δείξτε ότι

$$\frac{dW}{dt} = \alpha W^{2/3}, \quad \alpha = \text{κατάλληλη σταθερά.}$$

- 2 Να βρεθεί το βάρος του κυτάρου κάθε στιγμή t .

Υπόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κύτταρο είναι σφαιρικό. Ο όγκος V σφαίρας ακτίνας r είναι $V = 4\pi r^3/3$ και το εμβαδό επιφάνειας της $S = 4\pi r^2$

Λύση.

- Αν g είναι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας, m είναι η μάζα του κυτάρου και ρ η πυκνότητα του κυτάρου, τότε

$$W = mg = g\rho V.$$

- Από τις $V = 4\pi r^3/3$ και $S = 4\pi r^2$ βρίσκουμε $r = (3V/(4\pi))^{1/3}$ οπότε

$$S = 4\pi \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{2/3} = (4\pi)^{1/3} \left(\frac{3W}{g\rho}\right)^{2/3} = \left(\frac{6\sqrt{\pi}}{g\rho}\right)^{2/3} W^{2/3}$$

- Από την υπόθεση

$$\frac{dW}{dt} = kS = k \left(\frac{6\sqrt{\pi}}{g\rho}\right)^{2/3} W^{2/3}$$

- 1 Έτσι προκύπτει ο νόμος

$$\frac{dW}{dt} = \alpha W^{2/3}, \quad \text{με } \alpha = \text{σταθερά.}$$

2 Επιλύοντας βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
 \frac{dW}{dt} &= \alpha W^{2/3} \Rightarrow \frac{W'}{W^{2/3}} = \alpha \\
 &\Rightarrow (3W^{1/3})' = \alpha \\
 &\Rightarrow 3W^{1/3} = \alpha t + C \\
 &\Rightarrow W = \left(\frac{\alpha}{3} t + C \right)^3 \\
 &\Rightarrow W(0) = W_0 = C^3
 \end{aligned}$$

κατά συνέπεια η λύση της εξίσωσης είναι

$$W = \left(\sqrt[3]{W_0} + \frac{\alpha}{3} t \right)^3$$

όπου

$$\alpha = k \left(\frac{6\sqrt{\pi}}{g\rho} \right)^{2/3}.$$

Άσκηση 9 (Ο νόμος ψύξης/θέρμανσης του Newton)

Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας $T(t)$ ενός κτιρίου είναι ανάλογος της διαφοράς της θερμοκρασίας $M(t)$ του περιβάλλοντος και της θερμοκρασίας του κτιρίου. Έτσι θα είναι

$$\frac{dT}{dt} = K(M - T),$$

όπου K είναι μία σταθερά. Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης αν $T(0) = T_0$.

Άσκηση 10 (Ο νόμος ακτινοβολίας του Stefan)

Σύμφωνα με το νόμο αυτό ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ενός σώματος σε T βαθμούς της κλίμακας Kelvin σε ένα μέσο θερμοκρασίας M βαθμών της ίδιας κλίμακας είναι ανάλογος του $M^4 - T^4$, δηλαδή

$$\frac{dT}{dt} = k(M^4 - T^4),$$

όπου k είναι μία θετική σταθερά. Να λυθεί η εξίσωση.

Άσκηση 11 (Χημικές αντιδράσεις)

Η αλληλεπίδραση ενός μορίου μίας ουσίας A με ένα μόριο της ουσίας B με αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός μορίου μίας νέας ουσίας X , είναι μία δεύτερης τάξης χημική αντίδραση που συνήθως συμβολίζουμε με $A + B \rightarrow X$. Εάν α και β είναι οι αρχικές συγκεντρώσεις των ουσιών A και B αντίστοιχα και $x(t)$ είναι η συγκέντρωση της νέας ουσίας X τη χρονική στιγμή t , τότε ο ρυθμός που εξελίσσεται η αντίδραση δίνεται από

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(\beta - x),$$

όπου k είναι μία θετική σταθερά. Εάν $x(0) = x_0$ να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στις περιπτώσεις $\alpha \neq \beta$ και $\alpha = \beta$ καθώς και η συμπεριφορά της λύσης καθώς $t \rightarrow \infty$.