

# Γενικά Μαθηματικά I

## Διάλεξη 15

### Εξισώσεις 1ης τάξης μοντέλα

### το Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

20 Μαΐου 2024

## Εξισώσεις Bernoulli

Οι Εξισώσεις **Bernoulli** είναι της μορφής

$$y' + p(t)y = q(t)y^\alpha, \quad (1)$$

όπου  $\alpha$  είναι ένας πραγματικός αριθμός. Παρατηρούμε ότι εάν  $\alpha = 0, 1$  τότε η (1) είναι μία γραμμική εξίσωση, η οποία στη περίπτωση  $\alpha = 1$  είναι επιπλέον χωριζομένων μεταβλητών. Παρατηρούμε επίσης ότι για  $\alpha > 0$  η  $y = 0$  είναι μία λύση της (1). Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι  $\alpha \neq 0, 1$ . Εάν  $y \neq 0$  η (1) γράφεται

$$y^{-\alpha} y' + p(t)y^{1-\alpha} = q(t),$$

και η αλλαγή μεταβλητής

$$v = y^{1-\alpha}, \quad (2)$$

οδηγεί μετά από πράξεις στη γραμμική εξίσωση

$$v' + (1 - \alpha)p(t)v = (1 - \alpha)q(t). \quad (3)$$

Με χρήση λοιπόν του μετασχηματισμού (2) μία εξίσωση Bernoulli ανάγεται σε μία γραμμική εξίσωση.

## Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση

$$t^2 y' + 2ty - y^3 = 0, \quad t > 0.$$

Γράφοντας τη δοσμένη εξίσωση στη μορφή

$$y' + \frac{2}{t}y - \frac{1}{t^2}y^3 = 0,$$

διαπιστώνεται ότι είναι μία εξίσωση Bernoulli με  $\alpha = 3$ , και ότι η  $y = 0$  είναι μία λύση της. Αν τώρα  $y \neq 0$ , διαιρώντας την εξίσωση με  $y^3$  βρίσκουμε

$$y^{-3}y' + \frac{2}{t}y^{-2} - \frac{1}{t^2} = 0,$$

και θέτοντας, όπως στην (2),  $v = y^{1-3} = y^{-2}$  προκύπτει η γραμμική εξίσωση

$$v' + \frac{-4}{t}v + \frac{2}{t^2} = 0, \quad t > 0.$$

## Παράδειγμα (συνέχεια)

Πολλαπλασιάζοντας τώρα με τη συνάρτηση (ολοκληρωτικό παράγοντα)

$$\mu(t) = \exp\left(\int_1^t \frac{-4}{s} ds\right) = \frac{1}{t^4},$$

έχουμε

$$\left(\frac{1}{t^4} v\right)' = \frac{-2}{t^4} \Rightarrow \frac{1}{t^4} v = \frac{2}{3t^3} + c,$$

οπότε

$$v = \frac{2}{3}t + ct^4,$$

όπου  $c$  είναι μία αυθαίρετη σταθερά. Επιστρέφοντας στην αρχική μεταβλητή  $y$  διά μέσου της  $y = \pm 1/\sqrt{v}$  τελικά έχουμε τη γενική λύση της αρχικής εξίσωσης να είναι η

$$y = \pm \sqrt{\frac{3}{2t + Ct^4}}.$$

## Άσκηση

Έστω  $a$  ένας πραγματικός αριθμός. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση  $f$ , της οποίας η μέση τιμή σε κάθε διάστημα  $[0, x]$ , με  $x \neq 0$ , είναι ίση με  $(f(x) - a)/x$ .

## Άσκηση

Να προσδιοριστούν όλες οι συναρτήσεις  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , των οποίων η μέση τιμή σε κάθε διάστημα  $[0, x]$ ,  $x > 0$ , είναι ίση με το γεωμετρικό μέσο των  $f(0)$  και  $f(x)$ .

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Οι ζητούμενες συναρτήσεις  $f$  ικανοποιούν τη σχέση

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(s) ds = \sqrt{f(0)f(x)}.$$

Διακρίνετε τις περιπτώσεις  $f(0) = 0$  και  $f(0) \neq 0$ .

Το πρόβλημα αυτό εμφανίστηκε στο W. L. Putnam Mathematics Competition το 1962.

## Άσκηση

Η ανάπτυξη ενός κυτάρου εξαρτάται από τη ροή θρεπτικών ουσιών μέσω της επιφάνειάς του. Αν  $W(t)$  είναι το βάρος του κυτάρου τη χρονική στιγμή  $t$ ,  $W(0) = W_0$ , και αν υποθέσουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του βάρους είναι ανάλογος του εμβαδού της επιφάνειας του κυτάρου

- 1 Δείξτε ότι

$$\frac{dW}{dt} = \alpha W^{2/3}, \quad \alpha = \text{κατάλληλη σταθερά.}$$

- 2 Να βρεθεί το βάρος του κυτάρου κάθε στιγμή  $t$ .

**Υπόδειξη:** Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κύτταρο είναι σφαιρικό. Ο όγκος  $V$  σφαίρας ακτίνας  $r$  είναι  $V = 4\pi r^3/3$  και το εμβαδό επιφάνειας της  $S = 4\pi r^2$

## Λύση.

- Αν  $g$  είναι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας,  $m$  είναι η μάζα του κυτάρου και  $\rho$  η πυκνότητα του κυτάρου, τότε

$$W = mg = g\rho V.$$

- Από τις  $V = 4\pi r^3/3$  και  $S = 4\pi r^2$  βρίσκουμε  $r = (3V/(4\pi))^{1/3}$  οπότε

$$S = 4\pi \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{2/3} = (4\pi)^{1/3} \left(\frac{3W}{g\rho}\right)^{2/3} = \left(\frac{6\sqrt{\pi}}{g\rho}\right)^{2/3} W^{2/3}$$

- Από την υπόθεση

$$\frac{dW}{dt} = kS = k \left(\frac{6\sqrt{\pi}}{g\rho}\right)^{2/3} W^{2/3}$$

- 1 Έτσι προκύπτει ο νόμος

$$\frac{dW}{dt} = \alpha W^{2/3}, \quad \text{με } \alpha = \text{σταθερά.}$$

2 Επιλύοντας βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
 \frac{dW}{dt} = \alpha W^{2/3} &\Rightarrow \frac{W'}{W^{2/3}} = \alpha \\
 &\Rightarrow (3W^{1/3})' = \alpha \\
 &\Rightarrow 3W^{1/3} = \alpha t + c \\
 &\Rightarrow W = \left(\frac{\alpha}{3}t + C\right)^3 \\
 &\Rightarrow W(0) = W_0 = C^3
 \end{aligned}$$

κατά συνέπεια η λύση της εξίσωσης είναι

$$W = \left(\sqrt[3]{W_0} + \frac{\alpha}{3}t\right)^3$$

όπου

$$\alpha = k\left(\frac{6\sqrt{\pi}}{g\rho}\right)^{2/3}.$$



### Άσκηση (Ο νόμος ψύξης/θέρμανσης του Newton)

Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας  $T(t)$  ενός κτιρίου είναι ανάλογος της διαφοράς της θερμοκρασίας  $M(t)$  του περιβάλλοντος και της θερμοκρασίας του κτιρίου. Έτσι θα είναι

$$\frac{dT}{dt} = K(M - T),$$

όπου  $K$  είναι μία σταθερά. Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης αν  $T(0) = T_0$ .

### Άσκηση (Ο νόμος ακτινοβολίας του Stefan)

Σύμφωνα με το νόμο αυτό ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ενός σώματος σε  $T$  βαθμούς της κλίμακας Kelvin σε ένα μέσο θερμοκρασίας  $M$  βαθμών της ίδιας κλίμακας είναι ανάλογος του  $M^4 - T^4$ , δηλαδή

$$\frac{dT}{dt} = k(M^4 - T^4),$$

όπου  $k$  είναι μία θετική σταθερά. Να λυθεί η εξίσωση.

## Άσκηση (Χημικές αντιδράσεις)

Η αλληλεπίδραση ενός μορίου μίας ουσίας  $A$  με ένα μόριο της ουσίας  $B$  με αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός μορίου μίας νέας ουσίας  $X$ , είναι μία δεύτερης τάξης χημική αντίδραση που συνήθως συμβολίζουμε με  $A + B \rightarrow X$ . Εάν  $\alpha$  και  $\beta$  είναι οι αρχικές συγκεντρώσεις των ουσιών  $A$  και  $B$  αντίστοιχα και  $x(t)$  είναι η συγκέντρωση της νέας ουσίας  $X$  τη χρονική στιγμή  $t$ , τότε ο ρυθμός που εξελίσσεται η αντίδραση δίνεται από

$$\frac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(\beta - x),$$

όπου  $k$  είναι μία θετική σταθερά. Εάν  $x(0) = x_0$  να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στις περιπτώσεις  $\alpha \neq \beta$  και  $\alpha = \beta$  καθώς και η συμπεριφορά της λύσης καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

## Θεώρημα (Picard - Lindelöf Τοπική Ύπαρξη και Μοναδικότητα)

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (4)$$

Εάν οι συναρτήσεις  $f$  και  $\partial f / \partial y$  είναι συνεχείς σε ένα ορθογώνιο το οποίο περιέχει το σημείο  $(t_0, y_0)$  τότε υπάρχει μοναδική λύση του (4) ορισμένη σε κάποιο διάστημα  $I$  το οποίο περιέχει το  $t_0$ .

### Παράδειγμα

Να λυθεί το πρόβλημα

$$ty' = 2y, \quad y(0) = 0. \quad (5)$$

Στη περίπτωση αυτή είναι  $f(t, y) = 2y/t$  η οποία δεν είναι συνεχής στο  $(0, 0)$ , για την ακρίβεια δεν ορίζεται για  $t = 0$ . Όπως παρατηρούμε μία λύση του προβλήματος είναι η  $y = 0$ .

## Παράδειγμα (συνέχεια)

Αναζητώντας άλλες λύσεις γράφουμε

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{t},$$

για  $y \neq 0$  απ' όπου ολοκληρώνοντας παίρνουμε διαδοχικά

$$\ln|y| = 2\ln|t| + \ln|c| \Rightarrow \ln|y| = \ln|ct^2| \Rightarrow y = \pm ct^2.$$

Έρα η εξίσωση  $ty' = 2y$  έχει μία διπαραμετρική οικογένεια λύσεων

$$y = \begin{cases} c_1 t^2, & t < 0 \\ c_2 t^2, & t \geq 0, \end{cases}$$

όπου  $c_1$  και  $c_2$  είναι πραγματικές σταθερές. Η οικογένεια αυτή των λύσεων ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη, οπότε έχουμε άπειρες λύσεις του (5).

## Παρατήρηση

Στο σημείο αυτό θέλουμε να τονίσουμε ότι το αποτέλεσμα του Θεωρήματος ειδικά για τη μοναδικότητα της λύσης είναι τοπικό. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το πρόβλημα

$$ty' = 2y, \quad y(1) = 1. \quad (6)$$

Οι συναρτήσεις

$$f(t, y) = \frac{2y}{t} \quad \text{και} \quad f_y(t, y) = \frac{2}{t}$$

είναι συνεχείς σε κάθε ορθογώνιο που περιέχει το  $(1, 1)$  στο εσωτερικό του και περιέχεται στο ημιεπίπεδο  $t > 0$ , αλλά κάθε συνάρτηση της μονοπαραμετρικής οικογένειας

$$y = \begin{cases} ct^2, & t < 0 \\ t^2, & t \geq 0, \end{cases}$$

είναι λύση του (6). Σε μία περιοχή όμως του  $t = 1$ ,  $(1 - \delta, 1 + \delta)$  υπάρχει μοναδική λύση, συγκεκριμένα η  $y = t^2$ .

### Άσκηση

Να δειχθεί ότι για κάθε  $c \geq 0$  η συνάρτηση

$$y = \begin{cases} 0, & t < c \\ (t - c)^2, & t \geq c, \end{cases}$$

είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0.$$

Έρχεται το γεγονός αυτό σε αντίθεση με το Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

### Άσκηση

Να βρεθούν όλες οι λύσεις του μη γραμμικού προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(2) = 0.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Η εξίσωση είναι αυτόνομη.

Σχετικά με την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (7)$$

περιγράφουμε ένα τρόπο απόδειξης του θεωρήματος που την ίδια στιγμή μας παρέχει και τρόπο εύρεσης μίας προσέγγισης της λύσης.

Το πρόβλημα (7) είναι ισοδύναμο με την **ολοκληρωτική εξίσωση**

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \quad (8)$$

Πραγματικά εάν ολοκληρώσουμε την (7) προκύπτει η (8), ενώ αν παραγωγίσουμε την (8) προκύπτει η (7).

Ένας τρόπος που χρησιμοποιείται για να δείχθει ότι η εξίσωση (8), και άρα η (7), έχει λύση είναι η **μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων** του **Picard**.

Η μέθοδος αυτή συνίσταται στη κατασκευή μίας αναδρομικής ακολουθίας συναρτήσεων όπως παρακάτω

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0(s)) ds,$$

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) ds,$$

$$y_3(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_2(s)) ds,$$

$$\vdots$$

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds,$$

$$\vdots$$

όπου  $y_0(s)$  είναι η αρχική συνθήκη, δηλαδή  $y_0(s) = y_0$  και παρατηρούμε ότι κάθε μέλος της ακολουθίας  $y_1, y_2, y_3, \dots$  ικανοποιεί την αρχική συνθήκη. Αποδεικνύεται ότι εάν οι υποθέσεις του θεωρήματος ισχύουν τότε η αναδρομική αυτή ακολουθία των συναρτήσεων συγκλίνει στη μοναδική λύση του (7).



## Παράδειγμα

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:  $y' = y$ ,  $y(0) = 1$ .

Ακολουθώντας τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων έχουμε

$$y_0(t) = 1$$

$$y_1(t) = 1 + \int_0^t 1 \, ds = 1 + t$$

$$y_2(t) = 1 + \int_0^t (1 + s) \, ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$$y_3(t) = 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right) \, ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \cdot 3}$$

$$\vdots$$

$$y_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{t^n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}$$

$$\vdots$$

## Παράδειγμα (συνέχεια)

Παρατηρούμε ότι καθώς  $n \rightarrow \infty$ , τότε

$$y_n(t) \rightarrow 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t,$$

όπως περιμένουμε.

## Άσκηση

Το μη γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(2) = 0,$$

δεν έχει μοναδική λύση. Να δείχθεί ότι η μέθοδος του Picard με  $y_0(t) = 0$  οδηγεί στη λύση  $y = 0$ , ενώ η ίδια μέθοδος αρχίζοντας με  $y_0(t) = t - 2$  οδηγεί στη λύση  $y = (t - 2)^3$ .

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Για τη περίπτωση  $y_0(t) = t - 2$  δείξτε ότι  $y_n(t) = a_n(t - 2)^{b_n}$  και καθώς  $n \rightarrow \infty$ ,  $a_n \rightarrow 1$  και  $b_n \rightarrow 3$ .