Γενικά Μαθηματικά Ι

Διάλεξη 14

Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών και Γραμμικές εξισώσεις

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

14 Μαΐου 2024

Μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης μπορεί συνήθως να παρασταθεί ως

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = 0 \qquad \text{ή} \qquad y' = f(t, y), \tag{1}$$

στη περίπτωση όπου η πρώτη εξίσωση μπορεί να λυθεί ως προς y'. Στη δεύτερη περίπτωση η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάποιο χωρίο D του επιπέδου.

Ορισμός

Μία συνάρτηση ϕ θα λέγεται **λύση** της (1) σε κάποιο διάστημα I εάν ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο I, η παράγωγός της είναι συνεχής στο I και επιπλέον επαληθεύει την (1), για όλα τα t στο διάστημα I, δηλαδή

$$F(t, \phi(t), \phi'(t)) = 0, \qquad \text{ή} \qquad \phi'(t) = f(t, \phi(t)).$$

Ορισμός

Λέγοντας **πρόβλημα αρχικών τιμών** (ΠΑΤ) για μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης εννοούμε μια εξίσωση (1) μαζί με μία αρχική συνθήκη της μορφής

$$y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

Εξισώσεις Χωριζομένων Μεταβλητών

Μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης $y' = f(x,y)$ λέγεται **χωριζομένων μεταβλητών** εάν οι μεταβλητές στη συνάρτηση f διαχωρίζονται με την έννοια ότι $f(x,y) = g(x)h(y)$, ισοδύναμα εάν η εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y' = g(x)h(y), \tag{3}$$

όπου οι g και h είναι συνεχείς συναρτήσεις. Αν σε κάποιο σημείο (x_0, y_0) είναι $h(y_0) \neq 0$, τότε σε κάποιο διάστημα είναι $h(y) \neq 0$. Σε αυτό το διάστημα μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{y'}{h(y)} = g(x),$$

απ΄ όπου ολοκληρώνοντας προκύπτει

$$\int \frac{y'}{h(y)}\,dx = \int g(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx \tag{4}$$

μετά από αλλαγή μεταβλητής.

- Εάν η εξίσωση $h(y) = 0$ έχει λύσεις τις σταθερές $y = c$ τότε οι λύσεις αυτές είναι και λύσεις της (3) καθ' όσον την επαληθεύουν.
- Αν την εξίσωση (3) τη γράψουμε ως

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y),$$

τότε από την (4) υπαγορεύεται η θεώρηση της διαφορικής μορφής της εξίσωσης

$$\frac{1}{h(y)}\,dy = g(x)\,dx.$$

- Κάθε αυτόνομη εξίσωση

$$y' = f(y)$$

είναι χωριζομένων μεταβλητών και η λύση της δίνεται (πεπλεγμένα) από τη σχέση

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dx = x + c.$$

- Κάθε εξίσωση της μορφής $y' = f(x)$ είναι χωριζομένων μεταβλητών.

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση
$$y' = y^2 e^{-x}.$$

Η εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών. Παρατηρούμε ότι η $y = 0$ είναι μία λύση της εξίσωσης. Αν τώρα $y \neq 0$ έχουμε
$$\int \frac{dy}{y^2} = \int e^{-x}\, dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = -e^{-x} + c,$$
όπου c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης, ή τελικά
$$y = \frac{1}{e^{-x} - c} \tag{5}$$

Παρατηρούμε ότι η λύση $y = 0$ δεν περιέχεται στην οικογένεια λύσεων (5), δηλαδή δεν προκύπτει από την (5) για κάποια τιμή της σταθεράς c. Αυτή είναι μία χαρακτηριστική ιδιότητα των μη γραμμικών εξισώσεων που θα πρέπει να έχουμε κατά νου όταν λύνουμε μια τέτοια εξίσωση.

Άσκηση

Να βρεθούν οι λύσεις των προβλημάτων αρχικών τιμών

1. $y' = y^2 e^{-x}, \qquad y(0) = 1.$
2. $y' = y^2 e^{-x}, \qquad y(0) = 0.$

Παράδειγμα

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

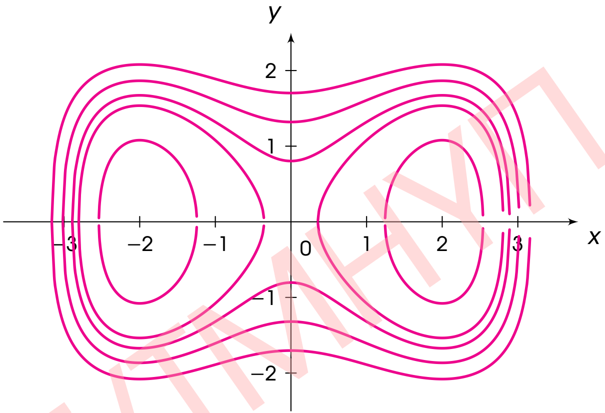
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - x^3}{2y + y^3}.$$

Η εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών, οπότε όπως στην εισαγωγή της παραγράφου έχουμε

$$(2y + y^3)y' = 4x - x^3 \Rightarrow \int (2y + y^3)\, dy = \int (4x - x^3)\, dx$$
$$\Rightarrow y^2 + \frac{y^4}{4} = 2x^2 - \frac{x^4}{4} + c$$

όπου c είναι μια σταθερά. Έτσι όλες(;) οι λύσεις της εξίσωσης προκύπτουν από την

$$y^4 + 4y^2 + x^4 - 8x^2 = C.$$



Σχήμα: Ολοκληρωτικές καμπύλες της $y' = (4x - x^3)/(2y + y^3)$.

Στο Σχήμα 1 έχουμε σχεδιάσει κάποιες ολοκληρωτικές καμπύλες της εξίσωσης. Οι ολοκληρωτικές αυτές καμπύλες είναι οι καμπύλες στάθμης της συνάρτησης $\Phi(x, y) = y^4 + 4y^2 + x^4 - 8x^2$. Η Φ παίρνει την ελάχιστη τιμή της στα σημεία $(\pm 2, 0)$, όπως εξάλλου υποδεικνύει το σχήμα.

Παράδειγμα

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = (y+1)x, \qquad y(0) = 1. \tag{6}$$

Η εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών. Εάν τώρα είναι $y \neq -1$ τότε γράφοντας

$$\frac{y'}{y+1} = x,$$

και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\ln|y+1| = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow |y+1| = e^{c+x^2/2} \Rightarrow y+1 = \pm e^c e^{x^2/2},$$

όπου c είναι μία σταθερά. Θέτοντας στη συνέχεια $C = \pm e^c$, έχουμε

$$y = Ce^{x^2/2} - 1. \tag{7}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Η οικογένεια καμπυλών (7) καλύπτει όλο το επίπεδο, με την έννοια ότι για κάθε σημείο (x_0, y_0) υπάρχει C τέτοιο ώστε η αντίστοιχη καμπύλη να περιέχει το σημείο. Πράγματι λύνοντας την εξίσωση $y(x_0) = y_0$, βρίσκουμε

$$y_0 = Ce^{x_0^2/2} - 1 \Rightarrow C = (y_0 + 1)e^{-x_0^2/2}.$$

Η τιμή λοιπόν της σταθεράς C υπολογίζεται από την αρχική συνθήκη. Έτσι από την (7) προκύπτει

$$1 = Ce^0 - 1,$$

άρα $C = 2$ και η λύση του προβλήματος (6) είναι

$$y = 2e^{x^2/2} - 1.$$

Παρατηρούμε ότι η $y = -1$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης, αλλά όχι του προβλήματος αρχικών τιμών, η οποία, στη περίπτωση αυτή, προκύπτει από την (7) για $C = 0$. Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με το ανάλογο αποτέλεσμα σε προηγούμενο Παράδειγμα. Αυτό οφείλεται στο ότι η εξίσωση (6) είναι γραμμική.

Άσκηση (∗)

Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

$$y' = axy, \qquad a \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Άσκηση (∗∗)

Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

$$y' = p(x)y, \tag{9}$$

όπου $p(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση.

Γραμμικές Εξισώσεις

Μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης $y' = f(x, y)$ λέγεται **γραμμική** εάν είναι της μορφής

$$y' + p(t)y = g(t), \tag{10}$$

όπου p και g είναι γνωστές συναρτήσεις.

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (6) είναι γραμμική. Παρατηρούμε επίσης ότι μία εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών είναι γραμμική αν και μόνον αν είναι της μορφής

$$y' = p(t)(ay + b),$$

όπου a και b είναι σταθερές. Η εξίσωση $y' = ty + 1$ είναι γραμμική αλλά δεν είναι χωριζομένων μεταβλητών. Πρόθεση μας είναι να εκφράσουμε τη λύση της εξίσωσης (10) σε κλειστή μορφή.
Υποθέτουμε ότι οι p και g είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα I, το οποίο είναι πιθανό να είναι άπειρο ή και ολόκληρη η πραγματική ευθεία, και θέλουμε να βρούμε τη λύση ορισμένη στο διάστημα αυτό.

Πολλαπλασιάζοντας την (10) με κάποια μη μηδενική συνάρτηση $\mu(t)$ έχουμε την ισοδύναμη με την (10) εξίσωση

$$\mu(t)y' + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t) \tag{11}$$

και απαιτούμε το αριστερό μέλος της (11) να είναι παράγωγος γινομένου, ισοδύναμα η συνάρτηση $\mu(t)$ να είναι τέτοια ώστε

$$\mu'(t) = \mu(t)p(t), \tag{12}$$

να είναι δηλαδή, βλέπε Άσκηση $(**)$,

$$\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt}. \tag{13}$$

Έτσι η (11) γίνεται

$$(\mu(t)y)' = \mu(t)g(t),$$

απ΄ όπου ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)\,dt + c$$

ή τελικά

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\int \mu(t)g(t)\,dt + \frac{c}{\mu(t)}. \tag{14}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι οι λύσεις της (10) δίνονται από τον τύπο (14) όπου η $\mu = \mu(t)$ είναι **μία οποιαδήποτε** λύση της (12), δίνεται δηλαδή από την (13). Η συνάρτηση μ λέγεται **ολοκληρωτικός παράγοντας** για τη γραμμική εξίσωση (10).

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση

$$y' + y = e^{-t}. \tag{15}$$

Η εξίσωση είναι γραμμική. Ένας ολοκληρωτικός παράγοντας δίνεται από τη σχέση

$$\mu(t) = e^{\int 1\, dt} = e^{t+c} = Ce^{t},$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με e^t και κατόπιν ολοκληρώνοντας έχουμε

$$y'e^t + ye^t = e^{-t}e^t \Rightarrow (e^t y)' = 1 \Rightarrow e^t y = t + c.$$

Κατά συνέπεια οι λύσεις της εξίσωσης είναι της μορφής

$$y = te^{-t} + ce^{-t}. \tag{16}$$

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' + y = e^{-t}, \qquad y(t_0) = y_0.$$

Δείξαμε στο Παράδειγμα 7 ότι η λύση της εξίσωσης είναι η $y = t\exp(-t) + c\exp(-t)$ η οποία εξαρτάται από μία σταθερά c. Αν τώρα $y(t_0) = y_0$ θα πρέπει να ισχύει

$$y_0 = t_0 e^{-t_0} + c e^{-t_0},$$

απ΄ όπου λύνοντας ως προς c έχουμε

$$c = y_0 e^{t_0} - t_0.$$

Δηλαδή η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y = (t - t_0)e^{-t} + y_0 e^{-(t-t_0)}.$$

Το αποτέλεσμα στο Παράδειγμα 8 υποδηλώνει ότι **κάθε** λύση του (15) προέρχεται από τη (16). Αυτό όντως συμβαίνει και είναι απόρροια του Θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας για διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Για τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης το θεώρημα αυτό μπορεί να διαβαστεί ως

Θεώρημα

Εάν οι p και g είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο ανοικτό διάστημα I και t_0 είναι σημείο του I τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' + p(t)y = g(t), \qquad y(t_0) = y_0, \tag{17}$$

όπου y_0 είναι μία αυθαίρετη σταθερά, έχει μοναδική λύση στο I, την

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} \left\{ \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{\tau} p(s)\,ds} g(\tau)\,d\tau + y_0 \right\}. \tag{18}$$

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δείξει ότι οι λύσεις της εξίσωσης στη (17) δίνονται από την (14), η οποία μπορεί να γραφεί σαν

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \int_{t_0}^{t} \mu(s) g(s)\, ds + \frac{c}{\mu(t)},$$

έτσι ώστε

$$y(t_0) = y_0 = \frac{c}{\mu(t_0)}.$$

Εάν τώρα επιλέξουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα μ έτσι ώστε $\mu(t_0) = 1$, επιλέξουμε δηλαδή

$$\mu(t) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}, \tag{19}$$

τότε θα είναι $c = y_0$. Έτσι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (17) δίνεται από τη ζητούμενη σχέση

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds} \left\{ \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{\tau} p(s)\, ds} g(\tau)\, d\tau + y_0 \right\}.$$

Αποδεικνύουμε τώρα τη μοναδικότητα της λύσης του (17). Εάν y_1 και y_2 είναι λύσεις του (17) θα έχουμε

$$y_i' + p(t)y_i = g(t), \qquad y_i(t_0) = y_0, \qquad i = 1,2$$

και αφαιρώντας

$$(y_1 - y_2)' + p(t)(y_1 - y_2) = 0, \qquad (y_1 - y_2)(t_0) = 0.$$

Αν τώρα ορίσουμε τη συνάρτηση $w = y_1 - y_2$ τότε η w ικανοποιεί το

$$w' + p(t)w = 0, \qquad w(t_0) = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας αρχικά με τον ολοκληρωτικό παράγοντα (19) και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$(\mu w)' = 0 \Rightarrow \mu w = c,$$

όπου c μία σταθερά. Έτσι

$$w = c\exp\Big(-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\Big).$$

Η αρχική συνθήκη ικανοποιείται αν

$$w(t_0) = c = 0,$$

επομένως

$$w = y_1 - y_2 = 0,$$

για όλα τα t στο διάστημα I. Έτσι $y_1 = y_2$. Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Στη περίπτωση λοιπόν των γραμμικών εξισώσεων μπορούμε να μιλούμε για **τη γενική λύση** της διαφορικής εξίσωσης υπονοώντας ότι η μοναδική λύση ενός προβλήματος αρχικών τιμών προκύπτει με τη κατάλληλη επιλογή της σταθεράς. Η (18) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{\tau}^{t} p(s)\,ds} g(\tau)\,d\tau, \tag{20}$$

ή ισοδύναμα

$$y(t) = U(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} U(t,\tau)g(\tau)\,d\tau, \tag{21}$$

όπου

$$U(t,\xi) = e^{-\int_{\xi}^{t} p(s)\,ds}. \tag{22}$$

Η λύση (20) ή (21) αναφέρεται σαν **τύπος μεταβολής των παραμέτρων**. Παρατηρούμε επίσης ότι εάν η συνάρτηση p στην (17) είναι σταθερά έστω $p(t) = a$, τότε η (20) γράφεται

$$y(t) = y_0 e^{-a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-a(t-\tau)} g(\tau)\, d\tau. \tag{23}$$

μία γενίκευση του τύπου (23) θα δούμε στο Κεφάλαιο 4.

Άσκηση

(Δικαιολόγιση του ονόματος τύπος μεταβολής των παραμέτρων και ένας άλλος τρόπος απόδειξης του θεωρήματος.) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (17), ακολουθώντας τα βήματα:

1. Να βρεθεί μία λύση y_1 της εξίσωσης $y' + p(t)y = 0$ με $y_1(t_0) = 1$.
2. Υποθέτοντας ότι η λύση του $y' + p(t)y = g(t)$, $y(t_0) = y_0$ είναι της μορφής $y = c(t)y_1(t)$, όπου $c(t)$ είναι μία ``μεταβλητή σταθερά'' αντικαταστήστε στην εξίσωση και υπολογίστε την άγνωστη συναρτηση c, και έτσι την έκφραση του y.

Άσκηση

Να βρεθεί η τιμή του y_0 για την οποία η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' - y = 1 + 2\sin t, \qquad y(0) = y_0,$$

1. παραμένει πεπερασμένη καθώς $t \to \infty$,
2. είναι περιοδική συνάρτηση του t και
3. είναι φραγμένη για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Λύση. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\mu(t) = e^{\int_0^t -1\, ds} = e^{-t}$$

έχουμε

$$(e^{-t} y)' = e^{-t} + 2e^{-t}\sin t,$$

και ολοκληρώνοντας

$$\begin{aligned} e^{-t}y &= -e^{-t} + 2\int e^{-t}\sin t\,dt + c \\ &= -e^{-t} - e^{-t}(\cos t + \sin t) + c. \end{aligned}$$

Έτσι η γενική λύση της εξίσωσης είναι η

$$y = ce^{t} - (\cos t + \sin t) - 1.$$

Από τη γενική λύση τώρα και την αρχική συνθήκη προκύπτει

$$y_0 = y(0) = c - 1 - 1,$$

απ' όπου βρίσκουμε $c = y_0 + 2$ και αντικαθιστώντας στη γενική λύση έχουμε τελικά

$$y = (y_0 + 2)e^{t} - (\cos t + \sin t) - 1.$$

Από την έκφραση αυτή του y προκύπτει ότι η λύση είναι πεπερασμένη καθώς $t \to \infty$, ή είναι περιοδική συνάρτηση του t, ή είναι φραγμένη για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε και μόνον τότε όταν $y_0 = -2$.