Γενικά Μαθηματικά Ι

Διάλεξη 13

Διαφορικές Εξισώσεις και μοντέλα

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

13 Μαΐου 2024

Γνωρίζουμε ότι η εκθετική συνάρτηση $y = e^x$ έχει την χαρακτηριστική ιδιότητα να είναι ίση με την παράγωγό της, ικανοποιεί δηλαδή τη σχέση $y' = y$, ισοδύναμα

$$y' - y = 0. \tag{1}$$

Αναρωτιόμαστε εάν υπάρχουν άλλες συναρτήσεις που να ικανοποιούν τη παραπάνω σχέση. Έστω λοιπόν y να είναι μία τέτοια συνάρτηση, τότε πολλαπλασιάζοντας με e^{-x} και παραγωγίζοντας θα έχουμε

$$(ye^{-x})' = y'e^{-x} - ye^{-x} = (y' - y)e^{-x} = 0,$$

από την υπόθεσή μας. Επομένως, ολοκληρώνοντας, για κάποια πραγματική σταθερά c θα είναι

$$ye^{-x} = c \Rightarrow y = ce^x.$$

Κατά συνέπεια κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί την (1) είναι της μορφής $y = ce^x$, όπου c είναι μία αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Έτσι η σχέση (1) είναι στην πραγματικότητα μία εξίσωση η οποία περιέχει μία άγνωστη συνάρτηση καθώς και την παράγωγό της. Μία τέτοια εξίσωση θα λέγεται **διαφορική εξίσωση**, και οι συναρτήσεις οι οποίες την ικανοποιούν, θα λέγονται **λύσεις** της εξίσωσης.

Παρόμοια οι συναρτήσεις $\cos x$ και $\sin x$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + y = 0, \tag{2}$$

μιας και $(\cos x)'' = -\cos x$ και $(\sin x)'' = -\sin x$. Θα αποδείξουμε, αργότερα, ότι κάθε λύση της εξίσωσης (2) είναι της μορφής

$$y = a\cos x + b\sin x, \tag{3}$$

όπου a και b είναι πραγματικές σταθερές. Σημειώνουμε ότι η λύση $y = \cos x$ προκύπτει από την (3) για $a = 1$ και $b = 0$, ενώ η $y = \sin x$ προκύπτει από την ίδια σχέση για $a = 0$ και $b = 1$.

Σχόλιο. Ξεκινώντας από το γεγονός ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης που περιγράφει μία ποσότητα είναι ο ρυθμός μεταβολής της ποσότητας αυτής δεν θα πρέπει να μας ξαφνιάζει το ότι η μελέτη διάφορων προβλημάτων που αφορούν μεταβολές και ενδιαφέρουν τις φυσικές, κοινωνικές, οικονομικές αλλά και άλλες επιστήμες, καταλήγει συνήθως στη δημιουργία μοντέλων διαφορικών εξισώσεων οι οποίες περιλαμβάνουν άγνωστες συναρτήσεις καθώς και παραγώγους αυτών.

• Ένα τυπικό παράδειγμα είναι η απλούστερη δυνατή εξίσωση,

$$y' = 0 \tag{4}$$

ίσως **η πρώτη διαφορική εξίσωση που γράφτηκε ποτέ**. Εάν η $y = y(t)$ είναι η ταχύτητα ενός σώματος το οποίο κινείται κατά μήκος μιας ευθείας, η y' εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του σώματος, δηλαδή την επιτάχυνση. Οι λύσεις της εξίσωσης προκύπτουν με απλή ολοκλήρωση και είναι οι $y =$ σταθερά. Η εξίσωση εκφράζει τον πρώτο νόμο του Newton σύμφωνα με τον οποίο ένα σώμα ηρεμεί, ή κινείται με σταθερή ταχύτητα εφόσον δεν δρα επ' αυτού κάποια δύναμη.

• Σαν δεύτερο παράδειγμα ας σκεφτούμε ότι μελετάμε μία ποσότητα ο ρυθμός μεταβολής της οποίας είναι ανάλογος της υπάρχουσας ποσότητας τη χρονική στιγμή t. Έτσι αν $y = y(t)$ είναι η υπάρχουσα ποσότητα τη στιγμή t, τότε ο νόμος που διέπει την εξέλιξη του φαινομένου είναι $y' = ky$, ισοδύναμα

$$y' - ky = 0, \tag{5}$$

όπου k είναι η σταθερά αναλογίας και η οποία υπολογίζεται από τα πειραματικά δεδομένα.

Το απλό αυτό μοντέλο είναι θεμελιώδες μιας και διέπει την εξέλιξη συγκεκριμένων πληθυσμών για σχετικά σύντομους χρόνους, ή την φθορά (απώλεια μάζας) ραδιενεργών υλικών. Στην τελευταία αυτή περίπτωση είναι $k < 0$. Εδώ παρατηρούμε ότι η διαφορική εξίσωση (1) είναι ειδική περίπτωση της (5). Κατ' αναλογία μπορεί να δειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (5) είναι οι $y = ce^{kt}$, όπου το c είναι πραγματική σταθερά.

• Ένα άλλο παράδειγμα, ίσως το πιο γνωστό, είναι αυτό που περιγράφει την ελεύθερη πτώση ενός σώματος από κάποιο συγκεκριμμένο ύψος. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Newton η δύναμη που δρα σε ένα σώμα είναι ίση με την επιτάχυνση που του προσδίδει επί τη μάζα του σώματος. Έτσι η εξίσωση που περιγράφει τη κίνηση του σώματος είναι

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg. \tag{6}$$

Εδώ m είναι η μάζα του σώματος, g είναι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας και $h(t)$ είναι η θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t, έτσι ώστε $h''(t)$ να είναι η επιτάχυνση του σώματος τη στιγμή t. Ακόμη $-mg$ είναι το μέτρο της δύναμης λόγω βαρύτητας που δρα στο σώμα.

• **Τάξη μιας Διαφορικής Εξίσωσης** ορίζεται να είναι η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση. Η τάξη των εξισώσεων (1), (5) είναι ένα, ενώ των (2), (6) είναι δύο. Ένα άλλο παράδειγμα Διαφορικής Εξίσωσης πρώτης τάξης είναι

$$y\frac{dy}{dx}-x=0. \tag{7}$$

Από την μορφή της (7) καταλαβαίνουμε ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η x και η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η y, θα είναι δηλαδή $y=y(x)$. Την ανεξάρτητη μεταβλητή συμβολίζουμε συνήθως με t ή x. Έτσι μία Διαφορική Εξίσωση τάξης n μπορεί να παρασταθεί ως

$$F\big(t,y,y',\ldots,y^{(n)}\big)=0, \tag{8}$$

όπου F είναι μία πραγματική συνάρτηση $n+2$ μεταβλητών, ή σε περίπτωση που η εξίσωση (8) μπορεί να λυθεί ως προς την μεγαλύτερης τάξης παράγωγο ως

$$y^{(n)}=f\big(t,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\big), \tag{9}$$

όπου η f τώρα είναι μία πραγματική συνάρτηση $n+1$ μεταβλητών.

• **Λύση μίας Διαφορικής Εξίσωσης** σε κάποιο ανοικτό διάστημα I είναι μία συνάρτηση, παραγωγίσιμη στο διάστημα τόσες φορές όσες και η τάξη της εξίσωσης, με συνεχείς παραγώγους, και η οποία ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση στο I, με την έννοια ότι αν αντικατασταθεί στη διαφορική εξίσωση την επαληθεύει. Για παράδειγμα λύσεις της (6) μπορούν να βρεθούν με απλή ολοκλήρωση. Έτσι διαιρώντας αρχικά με $m \neq 0$ προκύπτει η

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g,$$

απ΄ όπου ολοκληρώνοντας θα έχουμε

$$\frac{dh}{dt} = -gt + a, \tag{10}$$

όπου a είναι μία σταθερά. Ολοκληρώνοντας ακόμη μία φορά παίρνουμε

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b, \tag{11}$$

όπου b είναι μία άλλη σταθερά. Μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση που δίνεται στην (11) είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης (6). Στη πραγματικότητα η (11) είναι μία οικογένεια λύσεων, τόσων όσα και τα ζεύγη (a, b).

Ας δούμε προσεκτικά τη σημασία αυτών των σταθερών. Θέτοντας $t = 0$ στην (10) έχουμε $h'(0) = a$, είναι δηλαδή το a η αρχική ταχύτητα του σώματος. Θέτοντας στη συνέχεια $t = 0$ στην (11) έχουμε $h(0) = b$, το b δηλαδή είναι η αρχική θέση του σώματος. Αν λοιπόν ένα σώμα πέφτει από ύψος h_0 με αρχική ταχύτητα v_0 τότε η θέση του σε κάθε χρονική στιγμή t δίνεται **μοναδικά** από τη σχέση

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0. \tag{12}$$

Ορισμός

Ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών** αποτελείται από μία διαφορική εξίσωση

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \qquad t \in I \tag{13}$$

μαζί με τις αρχικές συνθήκες

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_{01}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{0(n-1)}, \tag{14}$$

όπου $t_0 \in I$.

Εάν η f ικανοποιεί ορισμένες προϋποθέσεις τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μοναδική λύση, όπως για παράδειγμα είδαμε στη λύση (12) της (6), που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $h(0) = h_0$, και $h'(0) = v_0$.
Σε αρκετές περιπτώσεις η διαδικασία επίλυσης μίας διαφορικής εξίσωσης καταλήγει στην εύρεση μίας σχέσης που περιέχει τη λύση. Για παράδειγμα ολοκληρώνοντας την (7) βρίσκουμε

$$yy' - x = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}y^2\right)' = x \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow y^2 = x^2 + C$$

όπου $C = 2c$ είναι μία σταθερά, είναι λύση της (7). Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι η $y^2 - x^2 = C$ είναι μία **πεπλεγμένη λύση** για την εξίσωση (7). Αντίθετα θα λέμε ότι η (11) είναι **αναλυτική λύση** της (6). Γενικότερα έχουμε

Ορισμός

Η συνάρτηση $\phi(t)$ θα λέγεται **αναλυτική λύση** της (8) ή (9) σε κάποιο διάστημα I του t, εάν αντικαθιστούμενη στην (8) ή (9) ικανοποιεί την αντίστοιχη εξίσωση για όλα τα σημεία t του I. Η σχέση $G(x, y) = 0$ θα λέγεται **πεπλεγμένη λύση** για την (8) ή (9) σε κάποιο διάστημα I του t, εάν ορίζει κάποια αναλυτική λύση της (8) ή (9) στο I.

Ξεχωριστό ρόλο στις Διαφορικές Εξισώσεις κατέχουν οι γραμμικές εξισώσεις.

Ορισμός

Θα λέμε ότι μια εξίσωση τάξης n είναι **γραμμική** εάν μπορεί να γραφεί ως

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = g(t). \tag{15}$$

Οι συντελεστές των $y, y', \ldots, y^{(n)}$ είναι συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής. Μια εξίσωση που δεν είναι γραμμική λέγεται μη γραμμική.

Έτσι οι εξισώσεις

$$y' - ky = 0, \qquad y'' + ay = 0, \qquad x\frac{dy}{dx} + e^x y = \sin x$$

είναι γραμμικές, ενώ η

$$y\frac{dy}{dx} - x = 0$$

είναι μη γραμμική.

Παράδειγμα

Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0, \tag{16}$$

περιγράφει την ταλάντωση ενός εκκρεμούς. Εδώ $\theta = \theta(t)$ είναι η γωνία που μετρά την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας, g είναι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας, και L είναι το μήκος του νήματος. Η εξίσωση είναι μη γραμμική. Ωστόσο για μικρές ταλαντώσεις είναι $\sin\theta \approx \theta$, έτσι οι λύσεις της γραμμικής εξίσωσης

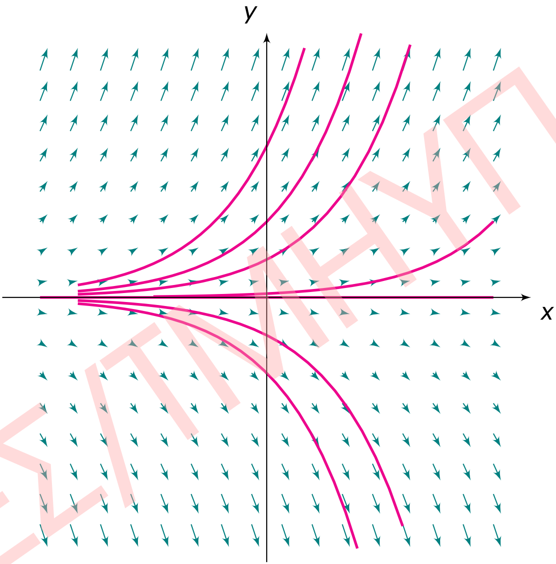
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0, \tag{17}$$

λέμε ότι προσεγγίζουν αυτές της (16) για μικρά θ. Η (17) λέγεται **γραμμικοποίηση της** (16).

Μια διαφορική εξίσωση περιέχει πληροφορία για τις λύσεις της την οποία για να ανακτήσουμε δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τον τύπο των λύσεων. Ας θεωρήσουμε τη γενική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$y' = f(x, y).$$

Σε κάθε σημείο του xy-επιπέδου στο οποίο ορίζεται η $f(x, y)$ η εξίσωση δίνει την κλίση της λύσης $y(x)$ της εξίσωσης, εφόσον αυτή υπάρχει. Έτσι με αρχή κάθε τέτοιο σημείο μπορούμε να ζωγραφίσουμε ένα διάνυσμα μοναδιαίου μήκους με κλίση ίση με $f(x, y)$ και κατεύθυνση ανάλογη του προσήμου της $f(x, y)$, παράλληλου δηλαδή στο $(1, f(x, y))$. Το σύνολο όλων αυτών των διανυσμάτων αποτελούν το **πεδίο κατευθύνσεων** της εξίσωσης. Η επίλυση ή **ολοκλήρωση** της εξίσωσης, δηλαδή η εύρεση όλων των λύσεων ισοδυναμεί με την κατασκευή όλων των καμπυλών $(x, y(x))$ με εφαπτόμενα διανύσματα-ταχύτητες τα $(1, y') = (1, f(x, y))$. Τις καμπύλες αυτές τις λέμε **ολοκληρωτικές καμπύλες** της εξίσωσης. Για παράδειγμα το πεδίο κατευθύνσεων για την εξίσωση $y' = ky$ με λύσεις, όπως είδαμε, τις $y = ke^x$, όπου k είναι μια αυθαίρετη σταθερά, δείχνεται στο Σχήμα 1 στο οποίο έχουν σχεδιαστεί κάποιες ολοκληρωτικές καμπύλες-λύσεις για διάφορες τιμές του k.



Σχήμα: Το πεδίο κατευθύνσεων για την εξίσωση $y' = ky$.

Παράδειγμα

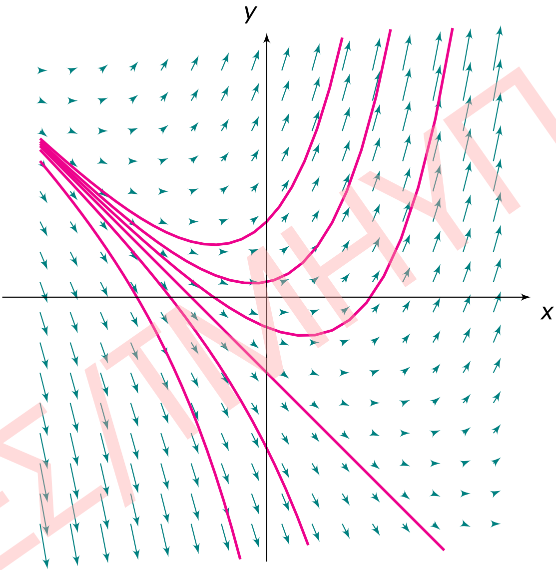
Στο Σχήμα 2 που ακολουθεί αποδίδεται το πεδίο κατευθύνσεων της εξίσωσης

$$y' = x + y$$

καθώς και οι γραφικές παραστάσεις κάποιων λύσεων της εξίσωσης (ολοκληρωτικές καμπύλες).
Παρατηρήστε ότι η κάθε μια από τις καμπύλες που έχουν σχεδιαστεί τέμνει τον y-άξονα στο σημείο $(0, y(0))$, ισοδύναμα η κάθε καμπύλη αντιστοιχεί στη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = x + y, \qquad y(0) = y_0.$$

Παρατηρήστε επίσης ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες, τουλάχιστον αυτές που έχουν σχεδιαστεί, δεν τέμνονται μεταξύ τους, ισοδύναμα λύσεις με διαφορετικές αρχικές συνθήκες δεν παίρνουν ποτέ την ίδια τιμή σε κάποιο σημείο γεγονός που αντιστοιχεί σε μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών.



Σχήμα: Το πεδίο κατευθύνσεων για την εξίσωση $y' = x + y$.

Παράδειγμα

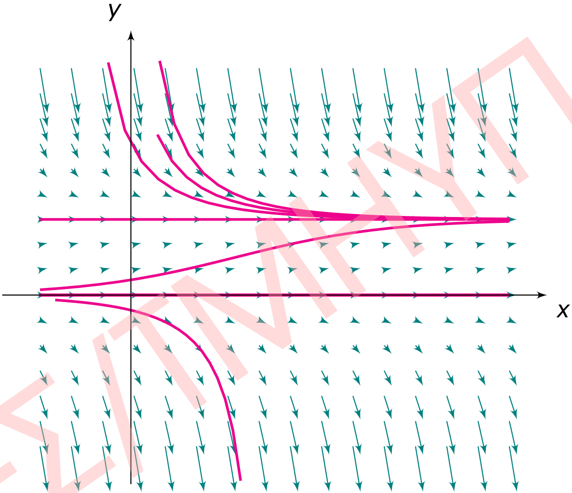
Θεωρούμε την **λογιστική** εξίσωση

$$y' = y(1-y) \tag{18}$$

η οποία είναι ένα μοντέλο που περιγράφει την εξέλιξη πληθυσμών. Από τη μορφή της $f(x,y)$ στο δεξί μέλος εξάγονται τα συμπεράσματα:

1. Οι σταθερές $y=0$ και $y=1$ είναι λύσεις της εξίσωσης καθώς μηδενίζουν και τα δύο μέλη της (18).
2. Αν σε κάποιο διάστημα I η λύση y είναι τέτοια ώστε $y(1-y)>0$, τότε η y είναι γνησίως αύξουσα αφού $y'>0$, ενώ αν σε κάποιο διάστημα I η λύση y είναι τέτοια ώστε $y(1-y)<0$, τότε η y είναι γνησίως φθίνουσα αφού $y'<0$. Ειδικά αν $y_0<0$, ή $y_0>1$, τότε η λύση της εξίσωσης με $y(0)=y_0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $x>0$, ενώ αν $0<y_0<1$ η αντίστοιχη λύση με $y(0)=y_0$ είναι γνησίως αύξουσα.

Οι πληροφορίες αυτές αποτυπώνονται και στο Σχήμα 3 στο πεδίο κατευθύνσεων της εξίσωσης στο οποίο έχουν σχεδιαστεί κάποιες ολοκληρωτικές καμπύλες.



Σχήμα: Το πεδίο κατευθύνσεων για την εξίσωση $y' = y(1 - y)$.

Άσκηση

Δείξτε ότι η

$$y(x) = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-x}} \tag{19}$$

είναι λύση της (18) η οποία επί πλέον ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = y_0$. Για $y_0 > 0$ να μελετηθεί επίσης η συμπεριφορά της λύσης καθώς $t \to \infty$.

Αν $y_0 < 0$, τότε ο παρονομαστής στη λύση (19) μηδενίζεται, κατά συνέπεια η λύση (19) απειρίζεται, ή **εκρήγνυται** όπως συνηθίζεται να λέγεται στις διαφορικές εξισώσεις, καθώς

$$x \to \ln(1 - 1/y_0) > 0$$

γεγονός που απεικονίζεται στο Σχήμα 3. Αν τώρα είναι $y_0 > 0$, τότε η λύση συγκλίνει, καθώς $x \to \infty$, στην τιμή ένα. Αυτό δείχνει το πεδίο κατευθύνσεων αλλά το αποτέλεσμα επιβεβαιώνεται παίρνοντας το αντίστοιχο όριο στην λύση (19). Κάτι άλλο που παρατηρούμε είναι ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες δεν τέμνονται μεταξύ τους. Αυτό είναι αποτέλεσμα του θεωρήματος μοναδικότητας καθόσον η συνάρτηση $f(x, y) = y(1 - y)$ ικανοποιεί τις σχετικές προϋποθέσεις.