ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

10η Διάλεξη

Το ολοκλήρωμα

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

16 Απριλίου 2023

Έστω f να είναι μια φραγμένη συνάρτηση ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[a,b]$. Μια **διαμέριση** του $[a,b]$ είναι ένα σύνολο σημείων του $[a,b]$, $P=\{x_0,x_1,\dots,x_N\}$ σημείων του $[a,b]$ με $a=x_0<x_1<\cdots<x_{N-1}<x_N=b$. Αν ξ_k είναι σημείο του $[x_{k-1},x_k]$, διαμορφώνουμε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k, \tag{1}$$

όπου $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. Θέτουμε $\|P\|=\max\{\Delta x_k,\ k=1,2,\dots,N\}$. Εάν καθώς ο αριθμός των σημείων N στη διαμέριση αυξάνει απεριόριστα, ώστε $\|P\|\to 0$, το αντίστοιχο όριο

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k$$

υπάρχει το συμβολίζουμε με

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

δηλαδή

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Το όριο αυτό το λέμε **ολοκλήρωμα Riemann**, ή απλά **ολοκλήρωμα**, της f στο $[a,b]$. Τα σημεία a και b λέγονται **άκρα της ολοκλήρωσης** με a να είναι το κάτω άκρο και b να είναι το άνω άκρο της ολοκλήρωσης.

Ορισμός

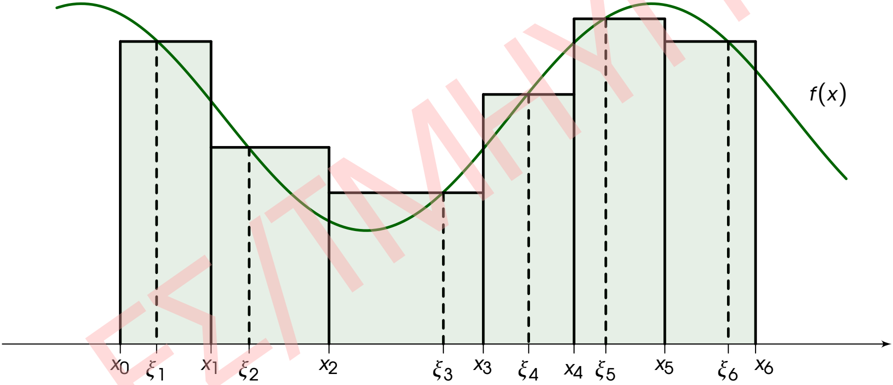
Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη και φραγμένη σε κάποιο διάστημα $[a,b]$ για την οποία το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ υπάρχει θα λέγεται **ολοκληρώσιμη κατά Riemmann**, ή απλά **ολοκληρώσιμη** στο $[a,b]$. Το άθροισμα στην (1) λέγεται **άθροισμα Riemann** της f για την διαμέριση P στο $[a,b]$.

Παρατήρηση

Εάν $f(x)=c$ σε κάποιο διάστημα $[a,b]$, όπου c είναι μια σταθερά, τότε για κάθε διαμέριση $a=x_0<x_1<\cdots<x_{N-1}<x_N=b$ του $[a,b]$ και $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ είναι

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k = c\sum_{k=1}^{N}\Delta x_k = c(b-a), \quad \text{οπότε} \quad \int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$$

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$



Σχήμα: Το άθροισμα Riemann ($N = 6$, $a = x_0$, $b = x_6$)

Θεώρημα

Αν η f είναι μια συνεχής ή τμηματικά συνεχής[1] *συνάρτηση στο διάστημα $[a,b]$ τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Παρατήρηση

Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $f(x) \geq 0$ στο διάστημα αυτό, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ είναι το εμβαδόν της περιοχής R του επιπέδου που βρίσκεται μεταξύ του x-άξονα, του γραφήματος της f και των ευθειών $x = a$ και $x = b$. Το αποτέλεσμα αυτό έπεται από το γεγονός ότι κάθε άθροισμα Riemann της f είναι το άθροισμα εμβαδών διαδοχικών ορθογωνίων το ``άθροισμα'' των οποίων, καθώς το μήκος της βάσης Δx τείνει στο μηδέν, προσεγγίζει όλο και περισσότερο την περιοχή R. Βλέπε Σχήμα 1

[1] Μια συνάρτηση f λέγεται **τμηματικά συνεχής** στο διάστημα $[a,b]$ εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[a,b]$ εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων στα οποία τα πλευρικά όρια της f υπάρχουν.

Παράδειγμα

Με τον ορισμό του ολοκληρώματος να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x\,dx.$$

Η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι συνεχής παντού άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$. Επιπλέον το ζητούμενο ολοκλήρωμα θα δίνει το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$ και $(1,1)$, κατά συνέπεια θα πρέπει το ζητούμενο ολοκλήρωμα να ισούται με $1/2$.
Αφού το ολοκλήρωμα υπάρχει, είναι ανεξάρτητο της διαμέρισης στη διαμόρφωση των αθροισμάτων Riemann. Για $N \in \mathbb{N}$ παίρνουμε την διαμέριση

$$0 < \frac{1}{N} < \frac{2}{N} < \cdots < \frac{N-1}{N} < 1$$

και σαν ξ_k το κέντρο κάθε υποδιαστήματος $[(k-1)/N, k/N]$, δηλαδή $\xi_k = (2k-1)/2N$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Έτσι το αντίστοιχο άθροισμα Riemann γίνεται

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{2k-1}{2N}\frac{1}{N} = \frac{1}{2N^2}\sum_{k=1}^{N}(2k-1) = \frac{1}{2N^2}\left(2\sum_{k=1}^{N} k - N\right)$$

$$2\sum_{k=1}^{N} k - N = 2\frac{N(N+1)}{2} - N = N^2$$

τελικά βρίσκουμε

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k = \frac{1}{2N^2}N^2 = \frac{1}{2},$$

κατά συνέπεια, όπως εξάλου περιμέναμε,

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right).$$

Θέλουμε να δούμε το ζητούμενο όριο σαν όριο αθροισμάτων Riemann. Έτσι γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n} &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+1/n}+\frac{1}{1+2/n}+\cdots+\frac{1}{1+n/n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\end{aligned}$$

με $\xi_k = k/n$ και $\Delta x_k = 1/n$ με $k = 1,2,\ldots,n$ για $f(x) = 1/(1+x)$, έτσι η σχετική διαμέριση αποτελείται από τα σημεία $x_0 = 0$, $x_1 = 1/n$, $x_2 = 2/n$, $\ldots$, $x_n = n/n = 1$. Κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx.$$

Άσκηση

Με τον ορισμό του ολοκληρώματος να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^2\,dx.$$

Παρατήρηση

Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$, όπως φαίνεται και από την (1), είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής x. Έτσι μπορούμε, για παράδειγμα, να γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(s)\,ds.$$

Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση χωρίζουμε το διάστημα $[a,b]$ σε n ίσου μήκους υποδιαστήματα, με τη βοήθεια της διαμέρισης $P_h = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, με $x_k - x_{k-1} = h = (b-a)/n$, για $k = 1, 2, \ldots, n$. Τότε τό άθροισμα

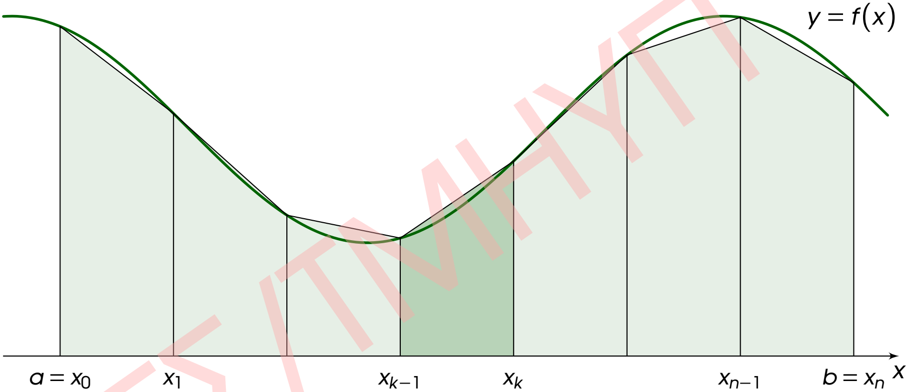
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k = f(x_0)h + f(x_1)h + \cdots + f(x_{n-1})h$$

είναι ένα τυπικό άθροισμα Riemann της f για την P_h, έστω $S(f, P_h)$, αφού $\xi_k = x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, κατά συνέπεια

$$\lim_{h\to 0} S(f, P_h) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Τότε και $S(f, P_h) + f(b)h \to \int_a^b f(x)\,dx$ καθώς $h \to 0$. Το τελευταίο άθροισμα μπορεί να γραφεί ως

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k)h = f(a)\frac{h}{2} + [f(a) + f(x_1)]\frac{h}{2} + \cdots + [f(x_{n-1}) + f(b)]\frac{h}{2} + f(b)\frac{h}{2}$$
$$= f(a)\frac{h}{2} + \sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1}) + f(x_k)]\frac{h}{2} + f(b)\frac{h}{2}.$$



Σχήμα: Ο κανόνας του τραπεζίου

Παρατηρούμε ότι για $f \geq 0$ ό τυπικός όρος του αθροίσματος παριστάνει το εμβαδόν τραπεζίου με βάσεις $f(x_{k-1})$, $f(x_k)$ και ύψος h, βλέπε Σχήμα 2. Επειδή $x_k = a + k(b-a)/n$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, για μεγάλο n, έχουμε την προσέγγιση

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b)\Big), \qquad \text{όπου} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Τον προσεγγιστικό αυτό τρόπο υπολογισμού του ολοκληρώματος λέμε **κανόνα του τραπεζίου**.

Θεώρημα

Έστω ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[a,b]$.

1. *Για κάθε ζευγάρι πραγματικών αριθμών λ και μ η $\lambda f+\mu g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b [\lambda f(x)+\mu g(x)]\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. *Εάν $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

3. $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Θεώρημα

Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a,b]$.

1. *Εάν $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Ειδικά αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

2. *Εάν $a < c < b$, τότε*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Μέχρι τώρα έχουμε υποθέσει ότι το κάτω όριο ολοκλήρωσης είναι μικρότερο του άνω ορίου. Στη πράξη είναι βολικό να θεωρούμε και περιπτώσεις όπου το κάτω όριο είναι μεγαλύτερο του άνω ορίου. Για τον λόγο αυτό ορίζουμε αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ $(a<b)$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Επίσης εάν $a \leq c \leq b$, ορίζουμε

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0.$$

Με αυτή την επέκταση του ορισμού του ολοκληρώματος αποδεικνύεται ότι αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα I και a, b, c είναι σημεία του I, τότε για οποιαδήποτε διάταξη των a, b, c ισχύει

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Θεώρημα

Έστω ότι η f είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a,b]$. Η συνάρτηση που ορίζεται με τη σχέση

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt, \qquad a\leq x\leq b$$

είναι συνεχής στο $[a,b]$.

Ορισμός

Εάν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ ορίζουμε την **μέση τιμή** $\bar{f}$ της f να είναι

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Θεώρημα

Εάν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi) = \bar{f}$, δηλαδή

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \bar{f}.$$

Θεώρημα

Εάν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και δεν αλλάζει πρόσημο στο διάστημα, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Θεώρημα (ΘΘ1)

Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad a \leq x \leq b.$$

Αν η f είναι συνεχής στο $c \in [a,b]$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο c και $F'(c) = f(c)$. Ειδικά αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Γράφοντας $F'(a)$ εννοούμε τη δεξιά παράγωγο στο $x = a$, και $F'(b)$ εννοούμε την αριστερή παράγωγο στο $x = b$.

Το αποτέλεσμα του θεωρήματος μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

σε κάθε σημείο x όπου η f είναι συνεχής.

Θεώρημα (ΘΘ2)

Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω $f = g'$ για κάποια συνάρτηση g, τότε

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a).$$

Ειδικά αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a), \qquad \text{όπου} \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

♣ Αν $g' = f$ το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 13 το γράφουμε απλά σαν

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(t)\Big]_a^b \qquad \text{όπου} \quad g(t)\Big]_a^b = g(b) - g(a).$$