ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

9η Διάλεξη

Παράγωγοι Συναρτήσεων ΙΙ

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

15 Απριλίου 2024

Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα (a,b) και $x_0 \in (a,b)$, τότε το πολυώνυμο Taylor πρώτου βαθμού στο x_0

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

είναι η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο γράφημα της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Αν το x είναι κοντά στο x_0, τότε

$$f(x) \approx P_1(x),$$

κατά συνέπεια σε ένα διάστημα γύρω από το x_0 η f προσεγγίζεται από μια γραμμική συνάρτηση. Το υπόλοιπο $R_1(x)$ εκφράζει το σφάλμα της προσέγγισης.

Ορισμός

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 η συνάρτηση

$$L(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

λέγεται **γραμμικοποίηση** της f στο x_0.

Αν το x_0 μεταβάλεται κατά $\Delta x = dx$ τότε η $y = f(x)$ μεταβάλεται κατά

$$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0).$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη η έκφραση $f'(x_0)\,dx$ είναι μια προσέγγιση της Δf αφού για Δx μικρό είναι

$$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0) = f'(x_0)\,dx + \epsilon\,dx$$

και $\epsilon \to 0$ καθώς $\Delta x \to 0$. Την έκφραση

$$dy = df = f'(x)\,dx$$

λέμε **διαφορικό** της f. Παρατηρούμε ότι το διαφορικό της f στο x_0 είναι η μεταβολή της γραμμικοποίησης L κατά dx αφού

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0 + dx) - L(x_0)\\ &= f(x_0) + f'(x_0)((x_0 + dx) - x_0) - f(x_0)\\ &= f'(x_0)\,dx.\end{aligned}$$

Παράδειγμα

Η γραμμική προσέγγιση της $f(x) = (1+x)^r$, $x > -1$ και $r \in \mathbb{R}$, στο $x = 0$ είναι

$$(1+x)^r \approx 1 + rx, \qquad x \text{ κοντά στο } 0.$$

Πράγματι $f'(x) = r(1+x)^{r-1}$, οπότε στο $x = 0$ είναι

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + rx.$$

Έτσι για x κοντά στο μηδέν έχουμε

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad \frac{1}{1+x} \approx 1 + (-1)x = 1 - x$$

$$\sqrt[3]{1+3x^4} \approx 1 + \frac{1}{3}3x^4 = 1 + x^4 \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

Η μέθοδος του Newton για την εύρεση ριζών

Έστω ότι η f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο διάστημα (a,b) και έστω, επιπλέον, ότι $f'(x) \neq 0$ στο (a,b). Αν $a < x_1 < b$ η εφαπτόμενη ευθεία στο $(x_1, f(x_1))$ έχει εξίσωση $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$. Επειδή $f'(x) \neq 0$ η ευθεία αυτή τέμνει τον x-άξονα. Αν x_2 είναι το σημείο τομής, τότε

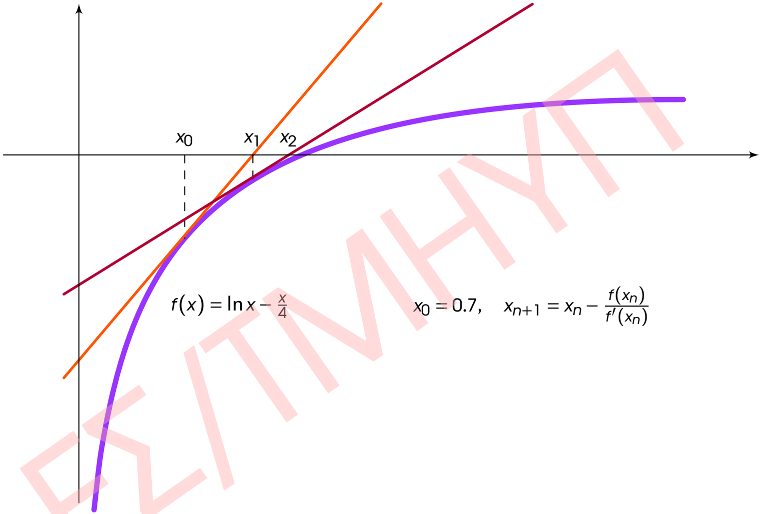
$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1) \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Όμοια η εφαπτόμενη ευθεία στο $(x_2, f(x_2))$ τέμνει τον xάξονα στο x_3 και

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία παίρνουμε μια αναδρομική ακολουθία

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$



Σχήμα: Προσέγγιση μιας ρίζας της $f(x) = \ln x - x/4$

Υποθέτοντας ότι η αναδρομική ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο σημείο x^* από την συνέχεια των f και f' παίρνοντας το όριο $n \to \infty$ στα δύο μέλη της αναδρομικής σχέσης έχουμε

$$x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \Rightarrow f(x^*) = 0,$$

δηλαδή η ακολουθία συγκλίνει σε μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$. Κατά συνέπεια παίρνοντας το σημείο x_1 κοντά σε ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ το αναδρομικό αυτό σχήμα συγκλίνει στη ρίζα.

Άσκηση

Να εξετασθούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες και αν συγκλίνουν να βρεθούν τα όριά τους.

- (α΄) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$
- (β΄) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$

Ορισμός

1. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **απόλυτο μέγιστο** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της $D(f)$ αν $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε $x \in D(f)$. Ο αριθμός $f(x_0)$ λέγεται **μέγιστη τιμή** της f. Όμοια θα λέμε ότι η f έχει **απόλυτο ελάχιστο** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της $D(f)$ αν $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in D(f)$ και ο αριθμός $f(x_0)$ θα λέγεται **ελάχιστη τιμή** της f.
2. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της $D(f)$ αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα I το οποίο περιέχει το x_0 και $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε $x \in I$. Όμοια θα λέμε ότι η f έχει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της $D(f)$ αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα I το οποίο περιέχει το x_0 και $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in I$. Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** της f.

Θεώρημα (Fermat)

Εάν η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο x_0 και η $f'(x_0)$ υπάρχει τότε $f'(x_0) = 0$.

Ορισμός

Ένα σημείο x_0 στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f λέγεται **κρίσιμο σημείο** της f αν $f'(x_0) = 0$, ή η $f'(x_0)$ δεν υπάρχει.

Θεώρημα (κριτήριο της πρώτης παραγώγου)

Έστω ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνεχούς συνάρτησης f.

1. *Εάν η f' αλλάζει από θετική σε αρνητική στο x_0, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.*
2. *Εάν η f' αλλάζει από αρνητική σε θετική στο x_0, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.*
3. *Εάν η f' δεν αλλάζει πρόσημο στο x_0, τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο x_0.*

Ορισμός

Εάν το γράφημα μιας συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτόμενη ευθεία (του γραφήματος) σε ένα διάστημα I θα λέγεται **κυρτή** στο I. Εάν το γράφημα της f βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτόμενη ευθεία (του γραφήματος) σε ένα διάστημα I θα λέγεται **κοίλη** στο I.

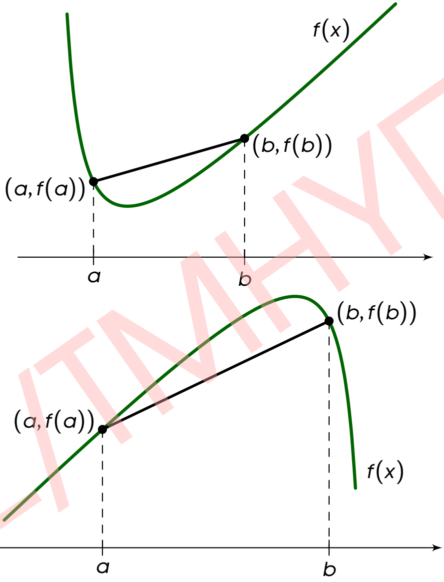
Θεώρημα (Κριτήριο κυρτότητας)

Έστω ότι για την συνάρτηση f η f'' υπάρχει σε κάποιο διάστημα I.

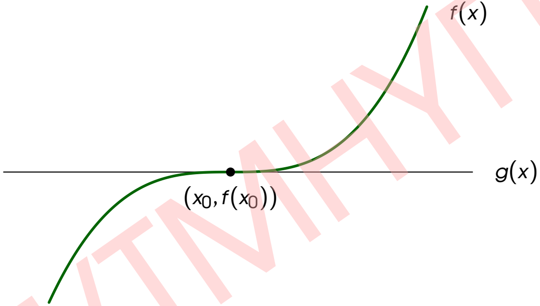
1. *Εάν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in I$, η f είναι κυρτή στο I.*
2. *Εάν $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in I$, η f είναι κοίλη στο I.*

Ορισμός

Ένα σημείο στο γράφημα μιας συνάρτησης f λέγεται **σημείο καμπής** εάν η συνάρτηση στο σημείο αυτό αλλάζει από κυρτή σε κοίλη, ή από κοίλη σε κυρτή.



Σχήμα: Μια κυρτή συνάρτηση f, και μια κοίλη συνάρτηση f



Σχήμα: Η εφαπτόμενη ευθεία στη γραφική παράσταση συνάρτησης σε σημείο καμπής

Θεώρημα (Κριτήριο της δεύτερης παραγώγου)

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάποιο ανοιχτό διάστημα το οποίο περιέχει το σημείο x_0.

1. *Εάν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.*
2. *Εάν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.*

Παράδειγμα

Δείχνουμε ότι

$$1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1, \qquad x > 0.$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \log x \qquad \text{και} \qquad g(x) = x - 1 - \log x.$$

Οι f και g ορίζονται, είναι παραγωγίσιμες για $x > 0$ και

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1 - x}{x^2} \qquad \text{και} \qquad g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αν $x<1$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι αύξουσα στο $(0,1)$ ενώ αν $x>1$ είναι $f'(x)<0$ οπότε η f είναι φθίνουσα στο $(1,+\infty)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στο $x=1$ η f έχει **μέγιστο**, έτσι

$$f(x)\leq f(1)\Rightarrow 1-\frac{1}{x}-\log x\leq 0\Rightarrow 1-\frac{1}{x}\leq \log x, \tag{1}$$

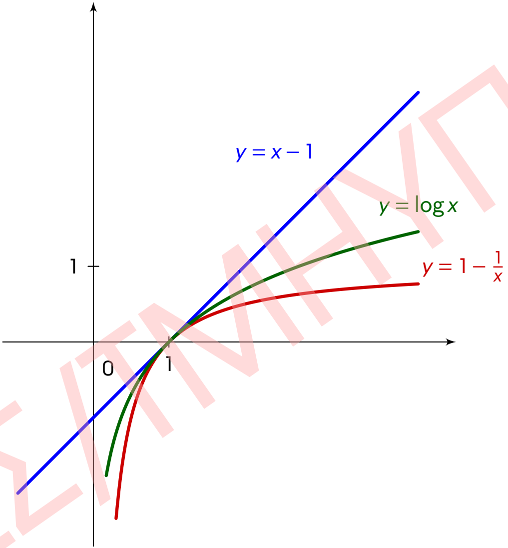
  για κάθε $x>0$.

- Αν $x<1$ είναι $g'(x)<0$ άρα η g είναι φθίνουσα στο $(0,1)$ ενώ αν $x>1$ είναι $g'(x)>0$ οπότε η g είναι αύξουσα στο $(1,+\infty)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στο $x=1$ η g έχει **ελάχιστο**, έτσι δηλαδή

$$g(x)\geq g(1)\Rightarrow x-1-\log x\geq 0\Rightarrow x-1\geq \log x, \tag{2}$$

  για κάθε $x>0$.

Το ζητούμενο έπεται από τις (1) και (2).



Σχήμα: $1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1$

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός M ώστε να ισχύει

$$|\cos a - \cos b| \leq M|a-b| \qquad a, b \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]. \tag{3}$$

Η συνάρτηση cos είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε για $a \neq b$ από το Θεώρημα της μέσης τιμής έχουμε

$$\frac{\cos a - \cos b}{a-b} = \cos' x_0 = -\sin x_0$$

για κάποιο x_0 στο $[-\pi/6, \pi/6]$. Έτσι έχουμε

$$\left|\frac{\cos a - \cos b}{a-b}\right| = |\sin x_0| \leq \max_{-\pi/6 \leq x \leq \pi/6} |\sin x| = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

κατά συνέπεια η (3) ικανοποιείται για $M = 1/2$. Σημειώνουμε ότι η ανισότητα ισχύει για $M = 1$, αφού $|\sin x_0| \leq 1$, αλλά αυτή η τιμή του M απέχει πολύ από το να είναι η ελάχιστη δυνατή για να ισχύει η (3) στο διάστημα που μας ενδιαφέρει.

Άσκηση

Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του a ώστε για κάθε $x>0$ να ισχύει $\sqrt{x} \geq \log x + a$.

Άσκηση

Να βρεθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-2}.$$

Άσκηση (Ανισότητα του Young)

Εάν a και b είναι μη αρνητικοί αριθμοί και $p,q>1$ με $1/p+1/q=1$ δείξτε ότι

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Υπόδειξη: Εάν $ab=0$ η ανισότητα ισχύει. Για $a>0$, $b>0$ θεωρήστε τη

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - bx, \qquad x>0.$$

Για καθένα από τα όρια

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{1-x}=\lim_{x\to 1}(1+x)=2$$

ενώ ο αριθμητής και ο παρονομαστής, και στα δύο, τείνει στο μηδέν τα όρια είναι διαφορετικά. Αυτό το αποτέλεσμα μας λέει ότι η πράξη $0/0$ δεν μπορεί να οριστεί, δηλαδή η μορφή $0/0$ είναι απροσδιόριστη. ΄Αλλες απροσδιόριστες μορφές είναι οι ∞/∞, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. Πράγματι τα όρια

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{1}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}$$

είναι της μορφής $0\cdot\infty$.

Θεώρημα (Ο κανόνας του L'Hospital)

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες και $g'(x) \neq 0$ σε κάθε σημείο ενός ανοιχτού διαστήματος το οποίο περιέχει το σημείο x_0, εκτός ίσως από το ίδιο το σημείο x_0 και

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty,$$

έχουμε δηλαδή απροσδιόριστη μορφή του τύπου $0/0$ ή ∞/∞, τότε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

εάν το όριο στο δεξί μέλος υπάρχει, ή είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Πράγματι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

Σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα του κανόνα του L'Hospital ισχύει αν το όριο $x \to x_0$ αντικατασταθεί με ένα από τα όρια $x \to x_0+$, $x \to x_0-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x}.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0}(2^x - 1) = 2^0 - 1 = 0, \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0} x = 0$$

ο κανόνας του L'Hospital εφαρμόζεται, οπότε

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2^x - 1)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x \log 2}{1} = \log 2.$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to\infty} (e^x) = \infty, \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$$

ο κανόνας του L'Hospital εφαρμόζεται, οπότε

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}$$

το οποίο είναι πάλι του τύπου ∞/∞. Εφαρμόζοντας για άλλη μια φορά τον κανόνα του L'Hospital παίρνουμε

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

´Ασκηση

Δείξτε ότι για κάθε $r>0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^r}=0.$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0+} x\log x.$$

Το όριο είναι του τύπου $0\cdot\infty$ οπότε μπορεί να μετασχηματιστεί σε $0\cdot 1/0=0/0$ ή σε $1/\infty\cdot\infty=\infty/\infty$. Πράγματι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} x\log x &= \lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{1/x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}\\ &= \lim_{x\to 0+}(-x)=0.\end{aligned}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}.$$

Το όριο είναι του τύπου 1^∞. Γράφοντας

$$(1+\sin x)^{1/x} = e^{\log(1+\sin x)^{1/x}} = e^{[\log(1+\sin x)]/x}$$

βλέπουμε ότι καθώς $x \to 0$ ο εκθέτης είναι του τύπου $0/0$ οπότε από την συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης $\exp x = e^x$ έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x} &= \lim_{x\to 0}\exp\frac{\log(1+\sin x)}{x} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{x}\right)\\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}}{1}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\sin x}\right) = \exp 1 = e,\end{aligned}$$

όπως περιμέναμε (γιατί;).

΄Ασκηση

Να υπολογιστούν τα όρια

(α΄) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{3x}-5x\right)^{1/x}$.

(β΄) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{1/x}$.

΄Ασκηση

Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right).$$

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι μια πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = r \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = s.$$

Ορίζοντας τις ακολουθίες $a_n = f(n)$ και $b_n = f(1/n)$, επίσης ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = r \qquad \text{και} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = s.$$

Έτσι αν ο κανόνας του L' Hospital εφαρμόζεται στη συνεχή περίπτωση, δηλαδή στην ανάλογη συνάρτηση f και δίνει το όριο της συνάρτησης, τότε αυτό το όριο είναι και το όριο της ακολουθίας. Για παράδειγμα

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = 1.$$

Βέβαια η απόδειξη της ενδιάμεσης ισότητας δεν γίνεται με εφαρμογή του κανόνα του L' Hospital. Κάτι τέτοιο **δεν έχει έννοια σε ακολουθίες** (γιατί;).

Παράδειγμα

Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $a_n = n\left(e^{1/n} - 1\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Γράφοντας

$$a_n = \frac{e^{1/n} - 1}{1/n}$$

βλέπουμε ότι το όριο της a_n είναι το

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x},$$

εφόσον αυτό υπάρχει. Το τελευταίο όριο είναι η παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης στο $x = 0$, επομένως

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} = e^0 = 1.$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Τα ανάλογα όρια της συνεχούς περίπτωσης είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \sin\frac{1}{x}\right)^x, \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x\to 0}\left(1 + \sin x\right)^{1/x}.$$

Και τα δύο όρια είναι της μορφής 1^∞. Στο Παράδειγμα 18, κάνοντας χρήση του κανόνα του L' Hospital υπολογίσαμε το δεύτερο όριο και δείξαμε ότι ισούται με e. Έτσι λοιπόν έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to 0}\left(1 + \sin x\right)^{1/x} = e.$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \left(\frac{\log(n+1)}{n^p}\right)^q, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

όπου p και q είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Εξετάζουμε πρώτα αν το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n^p}$$

υπάρχει. Θεωρώντας τη συνεχή περίπτωση με x στη θέση του n βλέπουμε ότι το όριο είναι της μορφής ∞/∞, και ότι ο αριθμητής $\log(x+1)$ και ο παρονομαστής x^p είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, έτσι από τον κανόνα του L' Hospital παίρνουμε

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x+1)}{x^p} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/(x+1)}{px^{p-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{px^{p-1}(x+1)}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Το τελευταίο κλάσμα γράφεται

$$\frac{1}{px^p\left(1+\frac{1}{x}\right)} \to 0,$$

καθώς $x \to +\infty$, αφού $p > 0$, έτσι τελικά έχουμε για $p > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x+1)}{x^p} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{px^{p-1}(x+1)} = 0.$$

Έτσι τελικά και σε συνδυασμό με τη συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$, $a > 0$ παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log(n+1)}{n^p}\right)^q = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n^p}\right)^q = 0^q = 0.$$