Γενικά Μαθηματικά Ι

Διάλεξη 11

΄Ορια και Συνέχεια Συναρτήσεων

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

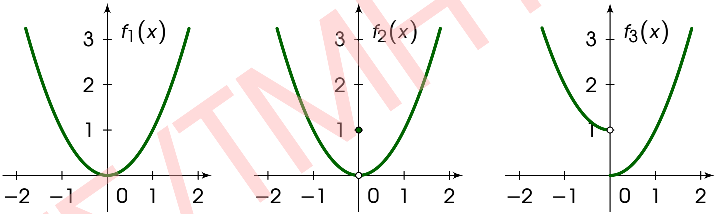
8 Μαΐου 2023

Όρια συναρτήσεων

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$$f_1(x) = x^2, \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0, \\ 1 & x = 0, \end{cases} \qquad f_3(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0, \\ x^2 & x \geq 0. \end{cases}$$

.



Καθώς το x προσεγγίζει το μηδέν οι αντίστοιχες τιμές των f_1 και f_2 προσεγγίζουν επίσης το μηδέν όχι όμως και αυτές της f_3. Αν το x προσεγγίζει το μηδέν από τα αριστερά ($x < 0$) οι αντίστοιχες τιμές $f_3(x)$ προσεγγίζουν το ένα, ενώ αν το x προσεγγίζει το μηδέν από τα δεξιά ($x > 0$) οι αντίστοιχες τιμές $f_3(x)$ προσεγγίζουν το μηδέν.

Λέμε ότι οι f_1 και f_2 συγκλίνουν στο μηδέν καθώς το x τείνει στο μηδέν και γράφουμε

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} f_2(x) = 0.$$

Το μηδέν το λέμε **όριο** των f_1 και f_2 καθώς το x τείνει στο μηδέν. Για την f_3 θέλοντας να δηλώσουμε τις διαφορετικές οριακές τιμές που προκύπτουν ανάλογα με τον τρόπο που προσεγγίζει το x το μηδέν γράφουμε

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_3(x) := \lim_{x\to 0-} f_3(x) = 1, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_3(x) := \lim_{x\to 0+} f_3(x) = 0.$$

Γράφουμε επίσης

$$f_3(0-) := \lim_{x\to 0-} f_3(x) = 1, \qquad f_3(0+) := \lim_{x\to 0+} f_3(x) = 0,$$

και λέμε το $f_3(0-)$ **αριστερό πλευρικό όριο** της f_3, ή απλά **όριο από τα αριστερά** της f_3 καθώς το x προσεγγίζει το μηδέν από τα αριστερά, και το $f_3(0+)$ **δεξιό πλευρικό όριο** της f_3, ή απλά **όριο από τα δεξιά** της f_3 καθώς το x προσεγγίζει το μηδέν από τα δεξιά.

Ορισμός

Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάθε σημείο ενός διαστήματος γύρω από ένα σημείο x_0, εκτός ίσως από το x_0. Θα λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός L είναι τό όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 και θα γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

ή $f(x) \to L$ καθώς $x \to x_0$, εάν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ϵ) ώστε

$$|f(x) - L| < \epsilon \qquad \text{οποτεδήποτε} \qquad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Παρατηρούμε ότι αν για τα πλευρικά όρια της f στο x_0 ισχύει

$$f(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0+)$$

τότε το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Το κλάσμα στο ζητούμενο όριο γράφεται

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

κατά συνέπεια για $x \neq 1$ είναι

$$\frac{x^2-1}{x-1} = (x+1),$$

επομένως από τον ορισμό του ορίου έπεται ότι

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Παράδειγμα

Υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{|1+x|-|1-x|}{x}.$$

Ενδιαφερόμαστε για την συμπεριφορά του πηλίκου για x κοντά στο μηδέν, έτσι για $-1<x<1$ είναι $1-x>0$ και $1+x>0$, οπότε

$$\frac{|1+x|-|1-x|}{x}=\frac{1+x-(1-x)}{x}=\frac{2x}{x}=2, \qquad 0<|x|<1$$

κατά συνέπεια

$$\lim_{x\to 0}\frac{|1+x|-|1-x|}{x}=2.$$

Θεώρημα (Ιδιότητες ορίων)

Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες σε κάθε σημείο ενός διαστήματος γύρω από ένα σημείο x_0, εκτός ίσως από το x_0 και έστω ότι

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad \textit{και} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = B$$

τότε

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(\lambda f(x)+\mu g(x)) = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \mu \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lambda A + \mu B$, *για* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)) = AB$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, *εάν* $B \neq 0$.
4. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n = A^n$, *για* $n \in \mathbb{N}$.
5. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$, *για* $n \in \mathbb{N}$ *και* $f(x) \geq 0$ *σε διάστημα που περιέχει το* x_0 *αν ο n είναι άρτιος.*

Θεώρημα (Κριτήριο της παρεμβολής)

Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g και h είναι ορισμένες σε κάθε σημείο ενός διαστήματος γύρω από ένα σημείο x_0, εκτός ίσως από το x_0 και έστω ότι $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για κάθε x. Εάν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

τότε $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$.

Πρόταση

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0.$$

Πόρισμα

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Παράδειγμα (1ο χαρακτηριστικό όριο)

Δείχνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Από την ανισότητα

$$\cos x\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{\cos x},\qquad x\in\left(-\pi/2,0\right)\cup\left(0,\pi/2\right)$$

το Πόρισμα εξασφαλίζει ότι το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

υπάρχει και από το Θεώρημα έπεται ότι το όριο αυτό είναι ίσο με 1.

Παράδειγμα (2ο χαρακτηριστικό όριο)

Δείξτε ότι
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0.$$

Για x κοντά στο 0 το $\cos x$ είναι κοντά στο 1, έτσι γράφοντας

$$\frac{\cos x-1}{x}=\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}=\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}=-\frac{\sin^2 x}{x(\cos x+1)}$$
$$=-\frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin x}{\cos x+1}$$

και αφού τα όρια των δύο κλασμάτων στο δεξί μέλος υπάρχουν, παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\,\frac{0}{2}=0.$$

Ορισμός

Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάθε σημείο ενός διαστήματος γύρω από ένα σημείο x_0, εκτός ίσως από το x_0.

• Θα λέμε ότι η f **αποκλίνει στο** $+\infty$ καθώς το x τείνει στο x_0 και γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ αν για κάθε $A > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) > A \qquad \text{οποτεδήποτε} \qquad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

• Θα λέμε ότι η f **αποκλίνει στο** $-\infty$ καθώς το x τείνει στο x_0 και γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ αν για κάθε $A > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) < -A \qquad \text{οποτεδήποτε} \qquad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Για τις συναρτήσεις

$$g_1(x) = \frac{1}{x-1} \qquad \text{και} \qquad g_2(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

έχουμε

$$\lim_{x\to 1} g_1(x) \quad \text{δεν υπάρχει, ενώ} \qquad \lim_{x\to 1} g_2(x) = +\infty.$$

Κοιτάζοντας τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης για αυθαίρετα μεγάλες τιμές του $|x|$, δηλαδή για $x \to \pm\infty$, έχουμε

Ορισμός

Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κατάλληλο άπειρο διάστημα.

- Γράφουμε
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$
αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $A > 0$ ώστε
$$|f(x) - L| < \epsilon \qquad \text{οποτεδήποτε} \qquad x > A.$$

- Γράφουμε
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$
αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $A > 0$ ώστε
$$|f(x) - L| < \epsilon \qquad \text{οποτεδήποτε} \qquad x < -A.$$

Παράδειγμα

Γνωρίζοντας ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της συνάρτησης

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \qquad x>0$$

καθώς $x \to +\infty$. Για $x>0$ αν n_x είναι το ακέραιο μέρος του x, τότε

$$1+\frac{1}{n_x+1} \le 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n_x}$$

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n_x} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x+1} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x}\left(1+\frac{1}{n_x}\right).$$

Καθώς $n_x \to \infty$ (ισοδύναμα $x\to\infty$) τα δύο άκρα της ανισότητας τείνουν στο e, κατά συνέπεια και η ενδιάμεση ποσότητα συγκλίνει στο ίδιο όριο καθώς $x\to\infty$.

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}), \qquad a>0.$$

Γράφοντας

$$\sqrt{x+a}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=\frac{x+a-x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$$

και παρατηρώντας ότι ο παρονομαστής στο τελευταίο κλάσμα τείνει στο $+\infty$ καθώς $x\to+\infty$ εκτιμάμε ότι το ζητούμενο όριο πρέπει να είναι ίσο με μηδέν. Πράγματι για $\epsilon>0$ έχουμε

$$0<\sqrt{x+a}-\sqrt{x}=\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}\le\frac{a}{2\sqrt{x}}<\epsilon \qquad \text{για} \quad x>\left(\frac{a}{2\epsilon}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=0.$$

Συνέχεια συναρτήσεων

Για τις συναρτήσεις

$$f_1(x) = x^2, \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0, \\ 1 & x = 0, \end{cases}$$

είδαμε ότι τα όρια και των δύο καθώς $x \to 0$ υπάρχουν και είναι ίσα με μηδέν αλλά διαφέρουν στο ότι

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = f_1(0) \qquad \lim_{x\to 0} f_2(x) \neq f_2(0).$$

Ορισμός

Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάποιο διάστημα γύρω από το x_0. Η f λέγεται **συνεχής** στο x_0 αν

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Για να είναι δηλαδή η f συνεχής στο x_0 πρέπει να ισχύουν τα εξής:

1. $f(x_0)$ υπάρχει
2. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ υπάρχει, και
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Επειδή $\lim_{x \to x_0} x = x_0$, σχηματικά μπορούμε να γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x).$$

Ορισμός

Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάποιο διάστημα που περιέχει το x_0.
Η f λέγεται **συνεχής από αριστερά** στο x_0 αν

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0-) = f(x_0).$$

Η f λέγεται **συνεχής από δεξιά** στο x_0 αν

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0+) = f(x_0).$$

Ορισμός (Συνέχεια σε διάστημα)

Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα διάστημα αν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του διαστήματος. Ειδικά η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in (a, b)$ και επιπλέον $f(a+) = f(a)$ και $f(b-) = f(b)$.

Παράδειγμα

Κάθε γραμμική συνάρτηση $f(x) = ax + b$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Από τον ορισμό του ορίου έχουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (ax + b) = a \lim_{x \to x_0} x + b = ax_0 + b = f(x_0)$$

γεγονός που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = x^n$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η συνάρτηση $f(x) = x^{-n}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το αποτέλεσμα είναι συνέπεια των ιδιοτήτων των ορίων. Για παράδειγμα για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $n = 2$, είναι

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = \big(\lim_{x \to x_0} x\big)\big(\lim_{x \to x_0} x\big) = x_0 x_0 = x_0^2,$$

ενώ για $n = 3$, έχουμε

$$\lim_{x \to x_0} x^3 = \big(\lim_{x \to x_0} x\big)\big(\lim_{x \to x_0} x^2\big) = x_0 x_0^2 = x_0^3,$$

και για γενικό n εργαζόμαστε επαγωγικά. Για $x_0 \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$ έχουμε από το πρώτο μέρος

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{\lim_{x \to x_0} 1}{\lim_{x \to x_0} x^n} = \frac{1}{x_0^n}$$

που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε.

Τα σημεία στα οποία μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής λέγονται **σημεία ασυνέχειας** της συνάρτησης και η συνάρτηση λέγεται **ασυνεχής** στα σημεία αυτά.

Παρατήρηση

Ας δούμε τι σημαίνει ότι μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε σημείο, έστω x_0. Σύμφωνα με τον ορισμό είτε το $f(x_0)$ δεν ορίζεται, είτε αν ορίζεται θα υπάρχει ένας, τουλάχιστον, τρόπος όπου ενώ το x προσεγγίζει το σημείο x_0 η εικόνα $f(x)$ δεν προσεγγίζει το $f(x_0)$. Ισοδύναμα θα υπάρχει μια ακολουθία σημείων $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ με $x_n \to x_0$, αλλά $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

Ένας ισοδύναμος ορισμός της συνέχειας είναι

Ορισμός

Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάποιο διάστημα γύρω από το x_0. Η f λέγεται **συνεχής** στο x_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ϵ και το x_0), ώστε

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \qquad \text{οποτεδήποτε} \qquad |x - x_0| < \delta,$$

Συνέχεια των συναρτήσεων sin **και** cos

Δείχνουμε ότι οι συναρτήσεις sin και cos είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x \in \mathbb{R}$ και έστω $\epsilon > 0$. Δείχνουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν} \quad |x-y| < \delta, \quad \text{τότε} \quad |\sin x - \sin y| < \epsilon.$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

παίρνουμε μέσω της $|\sin x| \leq |x|$

$$|\sin x - \sin y| = 2\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \leq |x-y|.$$

Έτσι για $\delta = \epsilon$ έχουμε

$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y| < \delta = \epsilon.$$

Συνέχεια των συναρτήσεων sin και cos (συνέχεια)

που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε.

Το αποτέλεσμα για τη συνάρτηση cos προκύπτει με ανάλογο τρόπο από την αντίστοιχη ταυτότητα

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι η επιλογή του δ, τόσο για την sin όσο και για την cos, είναι ανεξάρτητη του x και εξαρτάται μόνο από το ϵ.

Παράδειγμα

Εάν $a > 0$ η συνάρτηση a^x είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Θεώρημα

Εάν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο σημείο x_0, τότε οι

$$\lambda f(x)+\mu g(x), \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \qquad f(x)g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x_0)\neq 0$$

είναι συνεχείς στο x_0.

Θεώρημα

Έστω ότι η σύνθεση $f\circ g$ ορίζεται. Εάν η g είναι συνεχής στο x_0 και η f είναι συνεχής στο $y_0=g(x_0)$, τότε η $f\circ g$ είναι συνεχής στο x_0.

Θεώρημα

Εάν η συνάρτηση $f: I\to\mathbb{R}$, όπου I είναι διάστημα, είναι ένα-προς-ένα συνεχής συνάρτηση, τότε η f^{-1} είναι επίσης συνεχής συνάρτηση.

Θεώρημα

Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς

1. *Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις στο* $\mathbb{R}$.
2. *Οι τριγωνομετρικές* $\sin$ *και* $\cos$ *στο* $\mathbb{R}$.
3. *Οι εκθετικές* a^x, $a > 0$ *στο* $\mathbb{R}$.
4. *Οι ρητές εκτός από τα σημεία μηδενισμού του παρονομαστή.*
5. *Οι τριγωνομετρικές* $\tan$ *και* $\sec$ *σε κάθε διάστημα* $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$, $k \in \mathbb{Z}$. *Οι* $\cot$ *και* $\csc$ *σε κάθε διάστημα* $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
6. *Οι ρίζες* $\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$ *στο* $\mathbb{R}$ *αν ο* n *είναι περιττός, και στο* $[0, +\infty)$ *αν ο* n *είναι άρτιος.*
7. *Οι λογαριθμικές* $\log_a x$, $a > 0$ *στο* $(0, +\infty)$.
8. *Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές* $\sin^{-1}$ *και* $\cos^{-1}$ *στο διάστημα* $[-1, 1]$, *και* $\tan^{-1}$ *στο* $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Δείχνουμε ότι για $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Το αποτέλεσμα ισχύει για $x = 0$. Για $x > 0$ θέτουμε $t_n = n/x$, οπότε $t_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$. Έτσι γράφοντας

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = \left[\left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{t_n}\right]^x$$

από τη συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης και το αποτέλεσμα

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

παίρνοντας το όριο $n \to \infty$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = \left[\lim_{t_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{t_n}\right]^x = e^x.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Για $x<0$ θέτουμε $x=-t$, με $t>0$ και γράφουμε για $n>t$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=\left(\frac{n-t}{n}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{t}{n-t}\right)^n}=\frac{1}{\left[\left(1+\frac{t}{n-t}\right)^{\frac{n-t}{t}}\right]^t}\frac{1}{\left(1+\frac{t}{n-t}\right)^t}.$$

Συνεπώς θέτοντας $t_n=n/t-1$ έχουμε

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{t_n}\right]^x\left(1+\frac{1}{t_n}\right)^x.$$

Επειδή $t_n\to+\infty$ καθώς $n\to\infty$, όπως στο προηγούμενο βήμα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left[\lim_{t_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{t_n}\right]^x\left[\lim_{t_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{t_n}\right)\right]^x=e^x.$$

Παράδειγμα (3ο χαρακτηριστικό όριο)

Δείχνουμε ότι
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Βήμα 1. Αποδεικνύουμε ότι
$$1+x\le e^x\le \frac{1}{1-x},\qquad 0\le x<1. \tag{1}$$

Η ανισότητα ισχύει ως ισότητα για $x=0$, οπότε ας υποθέσουμε ότι $0<x<1$. Από μεν την ανισότητα Bernoulli, έχουμε
$$1+x\le\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

και από το δυωνυμικό Θεώρημα
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{x^k}{n^k}\le 1+\sum_{k=1}^{n}x^k\le\frac{1}{1-x}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Έτσι για κάθε φυσικό αριθμό n και για $0 \leq x < 1$ έχουμε

$$1 + x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{1}{1 - x}$$

και η (1) προκύπτει παίρνοντας το όριο $n \to \infty$.

Βήμα 2. Από την (1) έπεται ότι

$$\lim_{x \to 0+} e^x = 1. \tag{2}$$

Βήμα 3. Από την (1) παίρνουμε

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{1 - x} \Rightarrow 1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1 - x}$$

για $0 < x < 1$, επομένως

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αν τώρα $-1 < x < 0$, θέτοντας $y = -x$ έχουμε

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^{-y} - 1}{-y} = e^{-y}\frac{1 - e^y}{-y} = \frac{1}{e^y}\frac{e^y - 1}{y}, \qquad 0 < y < 1,$$

οπότε από την (2) και την ύπαρξη του από τα δεξιά πλευρικού ορίου έπεται ότι και το από τα αριστερά πλευρικό όριο υπάρχει και

$$\lim_{x\to 0-}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0+}\frac{1}{e^y}\frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

Συνεπώς ο ισχυρισμός για την ύπαρξη και την τιμή του ορίου επιβεβαιώνεται.

Σημειώνουμε ότι από την (2) και τις ιδιότητες των ορίων έχουμε

$$\lim_{x\to 0-} e^x = \lim_{x\to 0-}\frac{1}{e^{-x}} = \lim_{y\to 0+}\frac{1}{e^y} = \frac{1}{1} = 1$$

όπου θέσαμε $y = -x$. Έτσι τελικά συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1.$$

Θεώρημα (Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής)

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ και $f(a)=A$, $f(b)=B$. Εάν το C είναι μεταξύ A και B, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $c\in[a,b]$ ώστε $f(c)=C$. Ειδικά αν $f(a)f(b)<0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(a,b)$ ώστε $f(\xi)=0$.

Θεώρημα (Θεώρημα του σταθερού σημείου)

Εάν η $f:[0,1]\to[0,1]$ είναι συνεχής τότε υπάρχει $x_0\in[0,1]$ ώστε $f(x_0)=x_0$.

Θεώρημα

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$. Τότε η f παίρνει την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της στο διάστημα αυτό, δηλαδή υπάρχουν σημεία x_1 και x_2 στο $[a,b]$ ώστε $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Γράφουμε

$$f(x_1)=\min_{a\le x\le b} f(x), \qquad f(x_2)=\max_{a\le x\le b} f(x).$$

Πόρισμα

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ και $f(a)f(b)<0$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi)=0$.

Η μέθοδος της διχοτόμησης. Δείχνουμε πως το αποτέλεσμα ύπαρξης ρίζας μιας εξίσωσης $f(x)=0$ μπορεί να δώσει και τρόπο προσέγγισης της ρίζας. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ και ότι $f(a)f(b)<0$.

1. Θέτουμε $a_0=a$, $b_0=b$ και $c_0=(a_0+b_0)/2$. Αν $f(c_0)=0$ η ρίζα εντοπίστηκε. Αν $f(c_0)\neq 0$ τότε $f(a_0)f(c_0)<0$, ή $f(c_0)f(b_0)<0$, διαφορετικά οι $f(a_0), f(c_0), f(b_0)$ θα ήταν ομόσημοι πράγμα άτοπο από την υπόθεση. Ας υποθέσουμε ότι $f(a_0)f(c_0)<0$.
2. Θέτουμε $a_1=a_0$, $b_1=c_0$ και $c_1=(a_1+b_1)/2$. Αν $f(c_1)=0$ η ρίζα εντοπίστηκε. Αν $f(c_1)\neq 0$ τότε $f(a_1)f(c_1)<0$, ή $f(c_1)f(b_1)<0$, διαφορετικά οι $f(a_1), f(c_1), f(b_1)$ θα ήταν ομόσημοι πράγμα άτοπο από την υπόθεση. Ας υποθέσουμε ότι $f(c_1)f(b_1)<0$.
3. Θέτουμε $a_2=c_1$, $b_2=b_1$ και $c_2=(a_2+b_2)/2$ και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

Έτσι προκύπτουν

(i) Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, με $a < c_n < b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

(ii) Μια ακολουθία διαστημάτων $(I_n)_{n=1}^{\infty}$, με $I_n = [a_n, b_n]$, όπου ένα από τα άκρα είναι το c_{n-1}, για τα οποία ισχύει ότι $I_n \subset I_{n+1}$ και επιπλέον αν με $|I_n|$ συμβολίσουμε το μήκος του I_n, τότε

$$|I_n| = \frac{1}{2}|I_{n-1}| = \frac{1}{2^n}(b-a).$$

Παρατηρούμε ότι αν ξ είναι η ρίζα που περιέχεται σε κάθε I_n τότε για $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε

$$|\xi - c_n| < \frac{1}{2^n}(b-a) < \frac{1}{2^N}(b-a) < \epsilon \tag{3}$$

για $n > N$, κατά συνέπεια η ακολουθία $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στη ρίζα ξ της $f(x) = 0$. Επιπλέον η (3) παρέχει το σφάλμα της προσέγγισης της ρίζας.

Παράδειγμα

Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$, με $x \in (0,1)$ δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν} \quad |x_1 - x_2| < \delta, \quad \text{τότε} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \tag{4}$$

για κάθε x_1, x_2 στο $(0,1)$.

Αν x_1 και x_2 είναι σημεία του $(0,1)$ έχουμε

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| \leq 2|x_1 - x_2| \tag{5}$$

έτσι για δοσμένο $\epsilon > 0$ επιλέγοντας $\delta = \epsilon/2$ η (4) έπεται από την (5).

Ορισμός

Θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι **ομοιόμορφα συνεχής** σε κάποιο διάστημα I αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ (το οποίο εξαρτάται μόνο από το ϵ), ώστε

$$\text{αν} \quad |x_1 - x_2| < \delta, \quad \text{τότε} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \qquad \forall x_1, x_2 \in I.$$

Παράδειγμα

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = 1/x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(a, +\infty)$, όπου $a > 0$.

Αν $x_1 > a$ και $x_2 > a$, βρίσκουμε

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{a^2},$$

αφού $x_1 x_2 > a^2$. Έτσι για $\epsilon > 0$ και $\delta = a^2\epsilon$ έπεται ότι αν $|x_1 - x_2| < \delta$, τότε

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{a^2} < \frac{\delta}{a^2} = \epsilon,$$

κατά συνέπεια η συνάρτηση $1/x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $(a, +\infty)$. Σημειώνουμε ότι η $1/x$ είναι, επίσης, ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $[a, +\infty)$.

Άσκηση

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = 1/x$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.

Πρόταση

Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, όπου I είναι ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$. Εάν $[a, b] \subset I$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$. Διαφορετικά, μια συνάρτηση ορισμένη και συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα αυτό.

Εάν το I είναι διάστημα και $f_k : I \to \mathbb{R}$, με $k = 1, 2, \ldots, n$ είναι συνεχείς συναρτήσεις η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται με τη σχέση

$$f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\big)$$

λέγεται **καμπύλη**. Αν $n = 2$ έχουμε μια καμπύλη στο επίπεδο, ενώ αν $n = 3$ έχουμε καμπύλη στο χώρο.

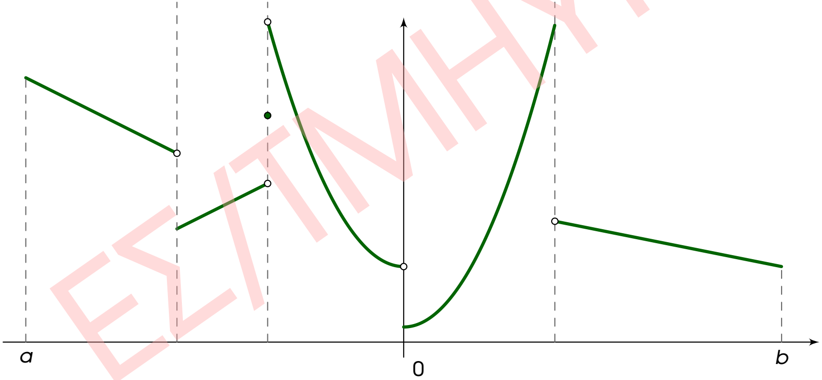
Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, παρατηρούμε ότι το γράφημα της f, $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in I\}$, είναι το πεδίο τιμών μια ειδικής περίπτωσης επίπεδης καμπύλης της

$$\gamma_f(x) = (x, f(x)), \qquad x \in I,$$

αφού η ταυτοτική συνάρτηση $\tau : I \to \mathbb{R}$, με $\tau(x) = x$ είναι συνεχής στο I. Πολλές φορές, καταχρηστικά, λέμε καμπύλη την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, δηλαδή το γεωμετρικό αντικείμενο το οποίο είναι η αποτύπωση του γραφήματος της f. Για καμπύλες θα μιλήσουμε αναλυτικότερα σε επόμενα κεφάλαια.

Ορισμός

Μια συνάρτηση f λέγεται **τμηματικά συνεχής** στο διάστημα $[a,b]$ εάν το διάστημα μπορεί να χωριστεί σε υποδιαστήματα σε καθένα από τα οποία η f είναι συνεχής και τα πλευρικά όρια στα άκρα των υποδιαστημάτων υπάρχουν.



Είναι η $f(x) = \tan x$ τμηματικά συνεχής στο $[0,\pi]$;