ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

4η Διάλεξη

Ακολουθίες

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

9 Μαρτίου 2023

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Ο πραγματικός αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, και μια τυπική προσέγγιση του είναι $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$. Θεωρούμε τους ρητούς αριθμούς

$$\begin{aligned}
&a_1 = 1.4, && a_2 = 1.41, && a_3 = 1.414, \\
&a_4 = 1.4142, && a_5 = 1.41421, && a_6 = 1.414213, \\
&a_7 = 1.4142135, && a_6 = 1.41421356, && a_9 = 1.414213562, \quad \cdots
\end{aligned}$$

Η συλογή αυτή παριστάνει προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$ έτσι ώστε ο n στην τάξη όρος, a_n, είναι η προσέγγιση που περιέχει τα n πρώτα δεκαδικά ψηφία του αναπτύγματος. Καθώς το n μεγαλώνει ο όρος a_n παρέχει μια καλύτερη προσέγγιση του $\sqrt{2}$

$$\left|\sqrt{2} - a_n\right| < \frac{1}{10^n},$$

έτσι καθώς ο n **τείνει στο άπειρο**, ο a_n τείνει να γίνει ο $\sqrt{2}$. Η συλλογή αυτή είναι παράδειγμα μιας **ακολουθίας** αριθμών, και κάθε μέλος της συλλογής λέγεται **όρος της ακολουθίας**, ο a_n λέγεται n-οστός όρος της ακολουθίας. Στη συγκεκριμένη περίπτωση λέμε, επίσης, ότι η ακολουθία των a_n **τείνει**, ή **συγκλίνει** στον $\sqrt{2}$, ή ισοδύναμα ότι ο $\sqrt{2}$ είναι το **όριο** της ακολουθίας.

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Ορισμός

Εάν S είναι ένα μη κενό σύνολο τότε κάθε συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο των φυσικών αριθμών $a : \mathbb{N} \to S$ λέγεται **ακολουθία** (sequence) του S. Αντί για $a(n)$ γράφουμε a_n. Το a_1 λέγεται πρώτος όρος της ακολουθίας, το a_2 δεύτερος όρος, ..., το a_n n-οστός όρος της ακολουθίας. Μία ακολουθία γράφεται ως $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ή με παράθεση των όρων της $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, $n \in \mathbb{N}$. Γράφουμε επίσης και (a_n). Εάν οι a_n είναι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή $S \subset \mathbb{R}$, η $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ λέγεται ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Παράδειγμα

Η ακολουθία των φυσικών αριθμών $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ $n \in \mathbb{N}$. Εδώ $a_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα

Η ακολουθία με όρους

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, \quad n \in \mathbb{N}$$

είναι η $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ με $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$.

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Παράδειγμα

Οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, όπου $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι οι

$$-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Παράδειγμα

Εάν c είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία

$$c, c, c, \dots, c, \dots$$

Εδώ είναι $a_n = c$, $n \in \mathbb{N}$. Η παραπάνω ακολουθία λέγεται **σταθερή** ακολουθία.

Διακρίνουμε τους άπειρους **όρους της ακολουθίας** $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ από το **σύνολο τιμών της ακολουθίας** $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ που μπορεί να είναι πεπερασμένο. Για παράδειγμα για την ακολουθία $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ έχουμε ότι οι όροι της ακολουθίας είναι οι $-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$ ενώ το σύνολο τιμών είναι το $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$.

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Ορισμός

Εάν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών, τότε:

1. Θα λέμε ότι οι ακολουθίες είναι **ίσες** εάν $a_n = b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Η ακολουθία $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, όπου $c_n = a_n + b_n,\ n \in \mathbb{N}$ θα λέγεται **άθροισμα** των ακολουθιών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.
3. Η ακολουθία $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, όπου $c_n = a_n - b_n,\ n \in \mathbb{N}$ θα λέγεται **διαφορά** των ακολουθιών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.
4. Η ακολουθία $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, όπου $c_n = a_n b_n,\ n \in \mathbb{N}$ θα λέγεται **γινόμενο** των ακολουθιών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.
5. Εάν $b_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, με $c_n = a_n / b_n,\ n \in \mathbb{N}$ θα λέγεται **πηλίκο** των ακολουθιών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

• Εάν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία και f είναι μία συνάρτηση τέτοια ώστε το $f(a_n)$ να ορίζεται για κάθε n, τότε μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ όπου $c_n = f(a_n),\ n \in \mathbb{N}$. Για παράδειγμα για $f(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0$ ορίζουμε

$$(\sqrt{a_n})_{n=1}^{\infty},\ \text{με όρους } \sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \ldots, \sqrt{a_n}, \ldots,\ \text{εάν } a_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Για την ακολουθία $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ παρατηρούμε ότι $a_1 = 1 \leq 1$, $a_2 = 1/2 < 1$, και γενικότερα $a_n = 1/n < 1$, $\forall n > 1$. Επίσης ισχύει $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τελικά έχουμε $0 < a_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός

Μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ λέγεται:

1. **΄Ανω φραγμένη** (bounded above) εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ο αριθμός M λέγεται **άνω φράγμα** (upper bound) της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
2. **Κάτω φραγμένη** (bounded below) εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός m τέτοιος ώστε $a_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ο αριθμός m λέγεται **κάτω φράγμα** (lower bound) της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
3. **Φραγμένη** (bounded) εάν είναι άνω και κάτω φραγμένη.

Παρατηρούμε ότι το άνω φράγμα ακολουθίας, εάν αυτό υπάρχει, δεν είναι μοναδικό, γιατί εάν M είναι άνω φράγμα της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, τότε για κάθε $\delta > 0$ το $M + \delta$ είναι επίσης άνω φράγμα, αφού $a_n \leq M < M + \delta$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Το ανάλογο ισχύει και για το κάτω φράγμα.

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Θεώρημα

Μία ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη εάν και μόνον εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός L τέτοιος ώστε $|a_n| \leq L, \forall n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ με

$$a_n = \frac{\sin n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Να εξετασθεί εάν η ακολουθία είναι φραγμένη.
Παρατηρούμε ότι

$$|a_n| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

οπότε από το Θεώρημα 8 έπεται ότι η ακολουθία είναι φραγμένη.

ΕΣ/ΤΙΜΗΥΠ

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ με

$$a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

είναι φραγμένη. Υπολογίζουμε μερικούς όρους της ακολουθίας

$$a_1 = \frac{2}{1} = 2, \qquad a_2 = \frac{2^2}{2!} = 2, \qquad a_3 = \frac{2^3}{3!} = \frac{4}{3} < 2, \qquad a_4 = \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3} < 2.$$

Παρατηρούμε ότι για $n \geq 3$ ισχύει

$$a_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1}\frac{2}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{n} = 2\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{n} \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}, \tag{1}$$

οπότε $0 < a_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, άρα η ακολουθία είναι φραγμένη. Από την (1) παίρνουμε

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{3^{n-2}}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots. \tag{2}$$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Ορισμός

Η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ λέγεται:

1. **Αύξουσα** (increasing) εάν $a_n \leq a_{n+1}$ και **γνησίως αύξουσα** (strictly increasing) εάν $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. **Φθίνουσα** (decreasing) εάν $a_n \geq a_{n+1}$ και **γνησίως φθίνουσα** (strictly decreasing) εάν $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Μία ακολουθία που είναι αύξουσα, ή φθίνουσα (γνησίως αύξουσα, ή γνησίως φθίνουσα) λέγεται **μονότονη** (**γνησίως μονότονη**) (monotone (strictly monotone)).

΄Ασκηση

Να εξετασθούν ως προς τη μονοτονία οι ακολουθίες με γενικό όρο

$$(1)\ a_n = r^n, \quad r > 0, \qquad (2)\ a_n = \sqrt[n]{2}, \qquad (3)\ a_n = \frac{2^n}{n!}, \qquad (4)\ a_n = \frac{n^n}{n!}.$$

ΕΣ/ΠΜΗΥΠ

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η ακολουθία

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη.

Με χρήση του διωνυμικού θεωρήματος υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-(k-1)}{n} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right), \end{aligned}$$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

όμοια

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} \\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k}+\binom{n+1}{n+1}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Από τα αναπτύγματα των a_n και a_{n+1}, παρατηρούμε ότι

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right),$$

για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$ (στη πραγματικότητα η ανισότητα είναι αυστηρή για $2 \leq k \leq n$), ενώ ο τελευταίος όρος στο ανάπτυγμα του a_{n+1} είναι θετικός, άρα $a_n < a_{n+1}$. Έτσι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή δε $a_1 = 2$ έπεται ότι $a_n \geq 2$, δηλαδή η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη.

ΕΣΙΜΗΥΠ

Αναζητώντας ένα άνω φράγμα της ακολουθίας και επειδή

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\leq 1,$$

από το ανάπτυγμα του a_n έπεται ότι

$$\begin{aligned} a_n &\leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \\ &\leq 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2}\frac{1}{3^{n-2}} && \left(\text{από την (2)}\right) \\ &= 2+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-2}}\right) \\ &= 2+\frac{1}{2}\left(\frac{1-1/3^{n-1}}{1-1/3}\right) = 2+\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right) < 2.75. \end{aligned}$$

Έτσι τελικά έχουμε ότι $2\leq a_n<2.75$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

ΕΛ/ΛΑΚ ΗΥΠ

Παράδειγμα

Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ με $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Ισχυριζόμαστε ότι εάν ϵ είναι ένας αυθαίρετα μικρός θετικός αριθμός τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$0 < a_n < \epsilon, \qquad \text{για κάθε } n \geq N.$$

Για την ακολουθία αυτή γνωρίζουμε ότι

$$0 < \cdots < a_{n+1} < a_n < \cdots < a_2 < a_1. \tag{3}$$

Δείχνουμε ότι για $\epsilon > 0$ δοσμένο, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < a_N < \epsilon$, ισοδύναμα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ με

$$1/N < \epsilon \Leftrightarrow 1/\epsilon < N.$$

Επιλέγοντας $N = [1/\epsilon] + 1$ έχουμε $N > 1/\epsilon$, ή $a_N < \epsilon$. Επομένως μέσω της (3) δείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει N έτσι ώστε $0 < a_n < \epsilon$, για όλα τα $n \geq N$. Βλέπουμε λοιπόν ότι όλοι τελικά, δηλαδή από ένα N και έπειτα, οι όροι της ακολουθίας πλησιάζουν αυθαίρετα κοντά στο 0.

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε την ακολουθία $a_n = \ell + (-1)^n / n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, όπου $\ell \in \mathbb{R}$. Ισχυριζόμαστε ότι εάν ϵ είναι ένας αυθαίρετα μικρός θετικός αριθμός τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|a_n - \ell| < \epsilon$, για κάθε $n \geq N$.

Παρατηρούμε ότι

$$a_n - \ell = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow |a_n - \ell| = \frac{1}{n},$$

κατά συνέπεια σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα για δοσμένο $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$, για παράδειγμα $N \geq [1/\epsilon] + 1$, τέτοιο ώστε $1/n < \epsilon$ για όλα τα $n \geq N$, επομένως $|a_n - \ell| < \epsilon$, για κάθε $n \geq N$.

Ορισμός

Θα λέμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **συγκλίνει** στον πραγματικό αριθμό L εάν η απόσταση $|a_n - L|$ γίνεται τελικά αυθαίρετα μικρή, δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - L| < \epsilon$, για όλα τα $n \geq N$. Εάν αυτό ισχύει θα λέμε ότι ο L είναι το **όριο** (limit) της ακολουθίας $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ και θα γράφουμε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Γράφουμε επίσης $a_n \to L$, καθώς $n \to \infty$.

Σύμφωνα με τον ορισμό βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

μιας και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

για όλα τα $n \geq N$.

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Παρατήρηση

Ας θεωρήσουμε την σταθερή ακολουθία $a_n = a$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε $|a_n - a| = 0 < \epsilon$, για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επομένως

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a = a.$$

Θεώρημα (Μοναδικότητα του ορίου)

Έστω ότι η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει, τότε το όριό της είναι μοναδικό.

Θεώρημα

Έστω ότι η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει και έστω ότι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,$$

τότε η ακολουθία είναι φραγμένη. Επιπλέον αν $|a_n| \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $M > 0$, τότε $|\alpha| \leq M$.

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Θεώρημα (Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών)

Έστω ότι για τις ακολουθίες $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *και* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *γνωρίζουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta.$$

Τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $|a_n| \to |\alpha|$.
2. $\lambda a_n \to \lambda\alpha$, *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\lambda a_n + \mu b_n \to \lambda\alpha + \mu\beta$, *για κάθε* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
4. $a_n b_n \to \alpha\beta$.
5. *Εάν* $b_n \neq 0$, *για* $n \geq N$ *και* $\beta \neq 0$, *τότε* $a_n/b_n \to \alpha/\beta$.
6. *Εάν* $a_n \leq b_n$, *τότε* $\alpha \leq \beta$.
7. **Ιδιότητα της παρεμβολής** *Εάν για την ακολουθία* $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, *ισχύει:*
   - α΄ $a_n \leq c_n \leq b_n$, $\forall n \geq N$, *και*
   - β΄ $\alpha = \beta$, *δηλαδή* $a_n \to \alpha$, *και* $b_n \to \alpha$,

   τότε $c_n \to \alpha$.

ΕΚΠΑ/ΤΜΗΥΠ

Παράδειγμα

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία

$$a_n = \frac{2n+3}{n^2+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Διαιρώντας με το μεγιστοβάθμιο όρο n^2 αριθμητή και παρονομαστή έχουμε

$$a_n = \frac{2n+3}{n^2+1} = \frac{\frac{2n}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Ο αριθμητής συγκλίνει στο 0, ενώ ο παρονομαστής συγκλίνει στο 1, άρα από την ιδιότητα του ορίου πηλίκου ακολουθιών έπεται ότι η ακολουθία συγκλίνει και

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n^2+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

ΕΣ/ΠΜΗΥΠ

Παράδειγμα

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Αν $a_n = \sqrt[n]{n}$, τότε $a_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\sqrt[n]{n} = (1+\delta_n)^2, \qquad \delta_n \geq 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Υψώνοντας αρχικά στη n–οστη δύναμη έχουμε

$$n = (1+\delta_n)^{2n} \Rightarrow \sqrt{n} = (1+\delta_n)^n \Rightarrow \sqrt{n} \geq 1 + n\delta_n$$

όπου στη τελευταία συνεπαγωγή έγινε χρήση της ανισότητας Bernoulli. Έτσι

$$\sqrt{n} \geq n\delta_n \Rightarrow \delta_n \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

απ' όπου έπεται ότι $\delta_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$. Τελικά

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + 2\delta_n + \delta_n^2) = 1.$$

ΕΣ/ΠΜΗΥΠ

Παράδειγμα

Κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών.

Έστω $r \in \mathbb{R}$. Εάν ο r είναι ρητός τότε η ακολουθία $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ με $r_n = r$, $\forall n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει προφανώς στον r. Έστω ότι ο r είναι άρρητος, τότε για κάθε φυσικό αριθμό n θα είναι $nr - 1 < [nr] \leq nr$, όπου με $[nr]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του nr, απ' όπου έπεται ότι

$$r - \frac{1}{n} < \frac{[nr]}{n} \leq r, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Από το Θεώρημα της παρεμβολής έπεται ότι η ακολουθία $([nr]/n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στον r.

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Θεώρημα (Μονότονη σύγκλιση)

Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ μια μονότονη ακολουθία. Η ακολουθία αυτή συγκλίνει αν και μόνον αν είναι φραγμένη.

Παράδειγμα

Η ακολουθία

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

είναι αύξουσα και φραγμένη με $2 \leq a_n < 2.75$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα συγκλίνει σε κάποιο αριθμό στο διάστημα $[2, 2.75)$. Τον αριθμό αυτό συμβολίζουμε με e, τιμώντας έτσι τον Euler (1707–1783) ο οποίος χρησιμοποίησε τον αριθμό αυτό. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο e είναι άρρητος και με ακρίβεια 15 δεκαδικών ψηφίων η τιμή του είναι $e = 2.718281828459045\ldots$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

ΕΞ/ΤΜΗΥΠ

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

Για $n > 1$ έχουμε

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}$$

έτσι

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{e}$$

που είναι το ζητούμενο.

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η ακολουθία

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

συγκλίνει, και να υπολογισθεί το όριό της.
Παρατηρούμε ότι $a_n = b_n^2$ όπου

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

και $b_n \to e$, καθώς $n \to \infty$, οπότε από τις ιδιότητες των συγκλινουσών ακολουθιών θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^2 = e^2.$$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Παρατήρηση (Η έννοια της υπακολουθίας)

Ας θεωρήσουμε την ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Οι ακολουθίες $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n}, \ldots$ και $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2n-1}, \ldots$ λέγονται **υπακολουθίες** της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Γενικότερα εάν $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ είναι μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τότε η ακολουθία $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ λέγεται **υπακολουθία** της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Σημειώνουμε ότι η k μπορεί να ειδωθεί σαν μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τιμές $k(n) = k_n$.

Θεώρημα

Έστω ότι η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στον αριθμό ℓ. Τότε για κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \ell.$$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η ακολουθία

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

συγκλίνει, και να υπολογισθεί το όριό της.

Παρατηρούμε ότι

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{1/2},$$

οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 26, θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$$

κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{e}.$$

ΕΣ/ΤΜΗΥΠ

Ορισμός

Θα λέμε ότι η ακολουθία των πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **αποκλίνει στο $+\infty$**, και θα γράφουμε $a_n \to +\infty$ εάν για κάθε πραγματικό αριθμό M, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n \geq M$ για $n \geq N$.
Θα λέμε ότι η ακολουθία των πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **αποκλίνει στο $-\infty$**, και θα γράφουμε $a_n \to -\infty$ εάν για κάθε πραγματικό αριθμό M, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n \leq M$ για $n \geq N$.

Ας θεωρήσουμε μια μη άνω φραγμένη ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ πραγματικών αριθμών. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k_n \in \mathbb{N}$ με $k_n \geq n$, ώστε

$$a_{k_n} \geq n,$$

κατά συνέπεια $a_{k_n} \to +\infty$. Όμοια αν μια ακολουθία δεν είναι κάτω φραγμένη τότε υπάρχει υπακολουθία της που αποκλίνει στο $-\infty$. Μπορούμε επομένως να θεωρούμε τα $+\infty$ και $-\infty$ σαν γενικευμένα όρια υπακολουθιών μιας μη φραγμένης ακολουθίας. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν μια ακολουθία είναι φραγμένη τότε υπάρχει υπακολουθία της η οποία συγκλίνει, σε πραγματικό αριθμό.

ΕΣ/ΠΜΗΥΠ