ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

3η Διάλεξη

Το μιγαδικό επίπεδο
Η εκθετική συνάρτηση και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

6 Μαρτίου 2023

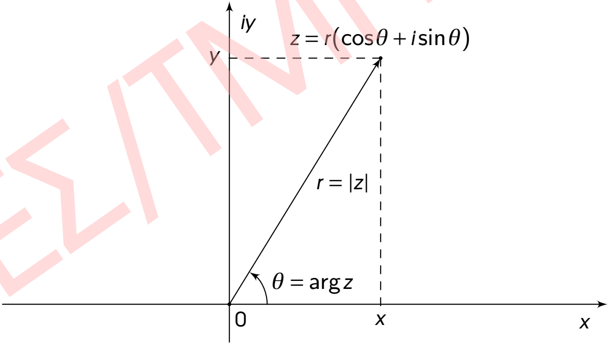
Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Εάν r και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες του σημείου $(x, y) \neq (0,0)$ τότε

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta \quad \text{με} \quad |z| = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} = r.$$

Η **τριγωνομετρική μορφή** (trigonometric form) του z είναι η έκφραση

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{1}$$



Παράδειγμα

Να γραφούν σε τριγωνομετρική μορφή οι αριθμοί
(i) $z = 1 + i$, (ii) $z = 1$, (iii) $z = i$, (iv) $z = -2$.

(i) Επειδή $|1 + i| = \sqrt{2}$, έχουμε

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big)$$

(ii) $1 = 1 + i0 = \cos 0 + i\sin 0$.
(iii) $i = 0 + i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$.
(iv) $-2 = 2(-1 + i0) = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Αν $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)], \end{aligned}$$

οπότε η τριγωνομετρική μορφή του γινομένου $z_1 z_2$ δίνεται από τη σχέση

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]. \tag{2}$$

Εάν $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι μη μηδενικός αριθμός, ισοδύναμα $r \neq 0$, τότε από τη σχέση (2) έπεται ότι

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]. \tag{3}$$

Η σχέση αυτή προκύπτει επίσης από τον τύπο του αντίστροφου μιγαδικού αριθμού. Εάν τώρα $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ είναι διάφορος του μηδενός, τότε συνδυάζοντας τις (2) και (3) έχουμε

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \tag{4}$$

Εάν $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ με μαθηματική επαγωγή μέσω της (2) έχουμε

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)], \tag{5}$$

ειδικά για $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, για κάθε φυσικό αριθμό n, προκύπτει

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]. \tag{6}$$

Εάν $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \neq 0$, από τις σχέσεις (3) και (6) έπεται ότι για $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{r^n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)],$$

και επειδή $z^0 = 1$, τελικά η σχέση (6) ισχύει για κάθε ακέραιο $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
Εάν $z = \cos\theta + i\sin\theta$ η (6) μετασχηματίζεται στην

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \tag{7}$$

Η τελευταία σχέση είναι ο **τύπος του de Moivre**.
Μία εφαρμογή του τύπου του de Moivre είναι η εύρεση ριζών μιγαδικών αριθμών.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Εάν w είναι ένας μιγαδικός αριθμός και $n \geq 2$ είναι ένας φυσικός αριθμός να βρεθούν μιγαδικοί z τέτοιοι ώστε $z^n = w$. Έστω ότι $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, τότε παρατηρούμε ότι ο αριθμός $z_0 = r^{1/n}(\cos(\theta/n) + i\sin(\theta/n))$ ικανοποιεί την

$$z_0^n = \left[\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)\right]^n = r(\cos\theta + i\sin\theta) = w,$$

δηλαδή ο z_0 είναι μία λύση του προβλήματος.

Οι $z_k = r^{1/n}(\cos[(\theta+2k\pi)/n]+i\sin[(\theta+2k\pi)/n])$, $k = 1,2,\ldots$ είναι επίσης λύσεις

$$z_k^n = \left[\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]^n = r(\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)) = w.$$

Έχουμε λοιπόν ότι οι αριθμοί $z_k = r^{1/n}(\cos[(\theta+2k\pi)/n]+i\sin[(\theta+2k\pi)/n])$ για $k = 0,1,2,\ldots$ ικανοποιούν την $z_k^n = w$. Στη συνέχεια θυμίζουμε ότι για n σταθερό κάθε $k \in \mathbb{N}$ γράφεται μοναδικά στη μορφή $k = m+\ell n$ όπου $m = 0,1,\ldots,n-1$ και $\ell \in \mathbb{N}$ (διαίρεση του k δια n). Έτσι εάν $k \geq n$, τότε

$$\begin{aligned}
z_k &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\\
&= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2m\pi+2\ell n\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2m\pi+2\ell n\pi}{n}\right)\\
&= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2m\pi}{n}+2\ell\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2m\pi}{n}+2\ell\pi\right)\right)\\
&= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2m\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2m\pi}{n}\right)\\
&= z_m
\end{aligned}$$

όπου $m = 0,1,2,\ldots,n-1$.

Συμπέρασμα: Οι n το πλήθος μιγαδικοί αριθμοί

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{8}$$

είναι οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ και λέγονται n-οστες ρίζες του $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Παράδειγμα

Επειδή $1 = \cos 0 + i\sin 0$, οι *n-οστες ρίζες της μονάδας* είναι οι αριθμοί

$$\zeta_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{9}$$

Εάν ορίσουμε

$$\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \tag{10}$$

τότε από τον τύπο του de Moivre έπεται ότι οι n-οστες ρίζες της μονάδας είναι οι $1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$. Παρατηρούμε ότι $\omega_n^n = 1$. Οι n-οστες ρίζες της μονάδας είναι οι κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου με n πλευρές εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο.

Παράδειγμα

Να βρεθούν αριθμοί z τέτοιοι ώστε $z^2 = -2$ (τετραγωνικές ρίζες του -2).

Είναι $-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$, οπότε οι αριθμοί που ζητούμε δίνονται από τη σχέση

$$z_k = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right), \qquad k = 0, 1.$$

Έτσι έχουμε

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i\sqrt{2}, \qquad z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i\sqrt{2}.$$

Πράγματι $z_0^2 = (i\sqrt{2})^2 = i^2 2 = -2$ και $z_1^2 = (-i\sqrt{2})^2 = i^2 2 = -2$.

Παράδειγμα

Εάν $z_1 = 2\sqrt{3} - i2$ και $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ να γραφούν οι z_1 και z_2 σε πολική μορφή και να υπολογισθούν οι $z_1 z_2$ και z_1 / z_2.

Είναι $|z_1| = |2\sqrt{3} - i2| = \sqrt{16} = 4$ και $|z_2| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$ οπότε

$$z_1 = 4\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right],$$

$$z_2 = 2\left[\left(-\frac{1}{2}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 2\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right].$$

Από την σχέση (2) υπολογίζουμε το γινόμενο

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 4 \cdot 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 8\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = i8, \end{aligned}$$

ενώ από την (4) το πηλίκο

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] \\ &= 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -\sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

Σύνολα και γεωμετρικοί τόποι στο μιγαδικό επίπεδο

Η ευθεία των πραγματικών αριθμών, ως υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, μπορεί να εκφρασθεί ως το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με μηδενικό φανταστικό μέρος, δηλαδή

$$\mathbb{R} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ και } \operatorname{Im} z = 0\}$$

ή ως

$$\mathbb{R} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ και } \bar{z} = z\}.$$

αφού κάθε πραγματικός αριθμός είναι ίσος με τον συζυγή του. Γενικότερα, υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου μπορούν να εκφρασθούν με κατάλληλες αλγεβρικές σχέσεις. Για παράδειγμα το σύνολο

$$\{z : z \in \mathbb{C} \text{ και } \operatorname{Re} z > 0\}$$

παριστάνει το ημιεπίπεδο στα δεξιά του φανταστικού άξονα, ενώ το

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \text{ και } \operatorname{Im} z > 0\}$$

παριστάνει το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου.

Άσκηση

Τι παριστάνει καθένα από τα σύνολα:

α΄ $C = \{z : |z| = 1\}$

β΄ $D = \{z : |z| < 1\}$

γ΄ $U = \{z : |z| > 1\}$

δ΄ $C(w,r) = \{z : |z-w| = r\}$, όπου w είναι ένας μιγαδικός αριθμός και $r > 0$

Το $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ λέγεται **ανοικτός δίσκος** κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας r
Το $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ λέγεται **κλειστός δίσκος** κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας r.
Εάν w είναι ένας σταθερός μιγαδικός αριθμός και r είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, τα $\{z \in \mathbb{C} : |z-w| < r\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z-w| \leq r\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z-w| > r\}$, και $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r\}$ περιγράφουν αντίστοιχα τον ανοικτό δίσκο κέντρου w και ακτίνας r, τον κλειστό δίσκο κέντρου w και ακτίνας r, το εξωτερικό του κλειστού δίσκου κέντρου w και ακτίνας r, και το εξωτερικό του ανοικτού δίσκου κέντρου w και ακτίνας r.

Παράδειγμα

Να περιγραφεί το σύνολο

$$F = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}.$$

Εάν $z = x + iy \in F$, τότε $x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = y$, κατά συνέπεια το F είναι η ευθεία $y = x$ του επιπέδου.

Άσκηση

Τι παριστάνει το σύνολο $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im}(z+1)\}$;

Παράδειγμα

Να περιγραφεί το σύνολο

$$L = \{z : |z-1| = |z-2|\}.$$

Ένα z που περιέχεται στο δοσμένο σύνολο, ισαπέχει από τα σημεία 1 και 2, κατά συνέπεια το σύνολο είναι η μεσοκάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα $[1,2]$.

Η εκθετική συνάρτηση, τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αν $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ορίζουμε

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y).$$

Ιδιότητες: Αν $z = x + iy$ και $w = s + it$, τότε

1. $e^{z+w} = e^{z}e^{w}$

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{x+s}[\cos(y+t) + i\sin(y+t)] \\ &= e^{x+s}[\cos y \cos t - \sin y \sin t + i(\sin y \cos t + \cos y \sin t)] \\ &= e^{x}(\cos y + i \sin y)e^{y}(\cos t + i \sin t) \\ &= e^{z}e^{w} \end{aligned}$$

2. $|e^{z}| = e^{\operatorname{Re} z}$

$$\begin{aligned} |e^{z}| &= \sqrt{(e^{x}\cos y)^2 + (e^{x}\sin y)^2} \\ &= e^{x} = e^{\operatorname{Re} z} \end{aligned}$$

Αν $z = x + iy$, με $x, y \in \mathbb{R}$ από την ιδιότητα (1) έπεται ότι

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \Rightarrow e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$
$$\Rightarrow e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

Συνεπώς

$$|e^{it}| = 1, \qquad t \in \mathbb{R},$$

γεγονός που συμφωνεί με την ιδιότητα (2).
Μπορούμε να γράφουμε

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

και η τελευταία σχέση είναι η **εκθετική μορφή** του μιγαδικού αριθμού z. Παρατηρούμε ότι για $m \in \mathbb{Z}$

$$e^{i2m\pi} = 1, \qquad e^{i\pi} = -1, \qquad e^{i\pi/2} = i, \qquad e^{i\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \qquad \ldots$$

Η δεύτερη σχέση είναι η σημαντική μαθηματική εξίσωση $e^{i\pi} + 1 = 0$ στην οποία εμφανίζονται οι τέσσερις σημαντικές μαθηματικές σταθερές.

Παρατήρηση

1. Αν $z = re^{i\theta}$ και $w = \rho e^{i\phi}$, τότε $zw = r\rho e^{i(\theta+\phi)}$.
2. $e^z \neq 0$, αφού $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} > 0$.
3. Η συνάρτηση $f(t) = e^{it}$ απεικονίζει την πραγματική ευθεία στον μοναδιαίο κύκλο.

Ορισμός

Για $z \in \mathbb{C}$ ορίζουμε

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Άσκηση

Αποδείξτε ότι

α΄. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$

β΄. $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$, για κάθε ζευγάρι $z, w \in \mathbb{C}$

γ΄. $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$, για κάθε ζευγάρι $z, w \in \mathbb{C}$

Παρατήρηση

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\cos(-3i) &= \left(e^{i(-3i)} + e^{-i(-3i)}\right)/2\\ &= \left(e^{3} + e^{-3}\right)/2\\ &> e^{3}/2\end{aligned}$$

κατά συνέπεια η $|\cos z| \leq 1$ **δεν ισχύει** στους μιγαδικούς αριθμούς. Όμοια η $|\sin z| \leq 1$ **δεν ισχύει**. Οι cos και sin δεν είναι καν φραγμές συναρτήσεις στο $\mathbb{C}$.

Ορισμός

Για $z \in \mathbb{C}$ ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \qquad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

με κατάλληλο πεδίο ορισμού για κάθε μία από αυτές.

Άσκηση

Να βρεθούν οι ρίζες κάθε μιας από τις εξισώσεις

- α΄ $\cos z = 0$ $(z = m\pi + \pi/2,\ m \in \mathbb{Z})$
- β΄ $\cos z = 1$
- γ΄ $\sin z = 0$ $(z = m\pi,\ m \in \mathbb{Z})$
- δ΄ $\sin z = 1$

Άσκηση

Αποδείξτε κάθε μια από τις σχέσεις

- α΄ $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$
- β΄ $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$
- γ΄ $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$