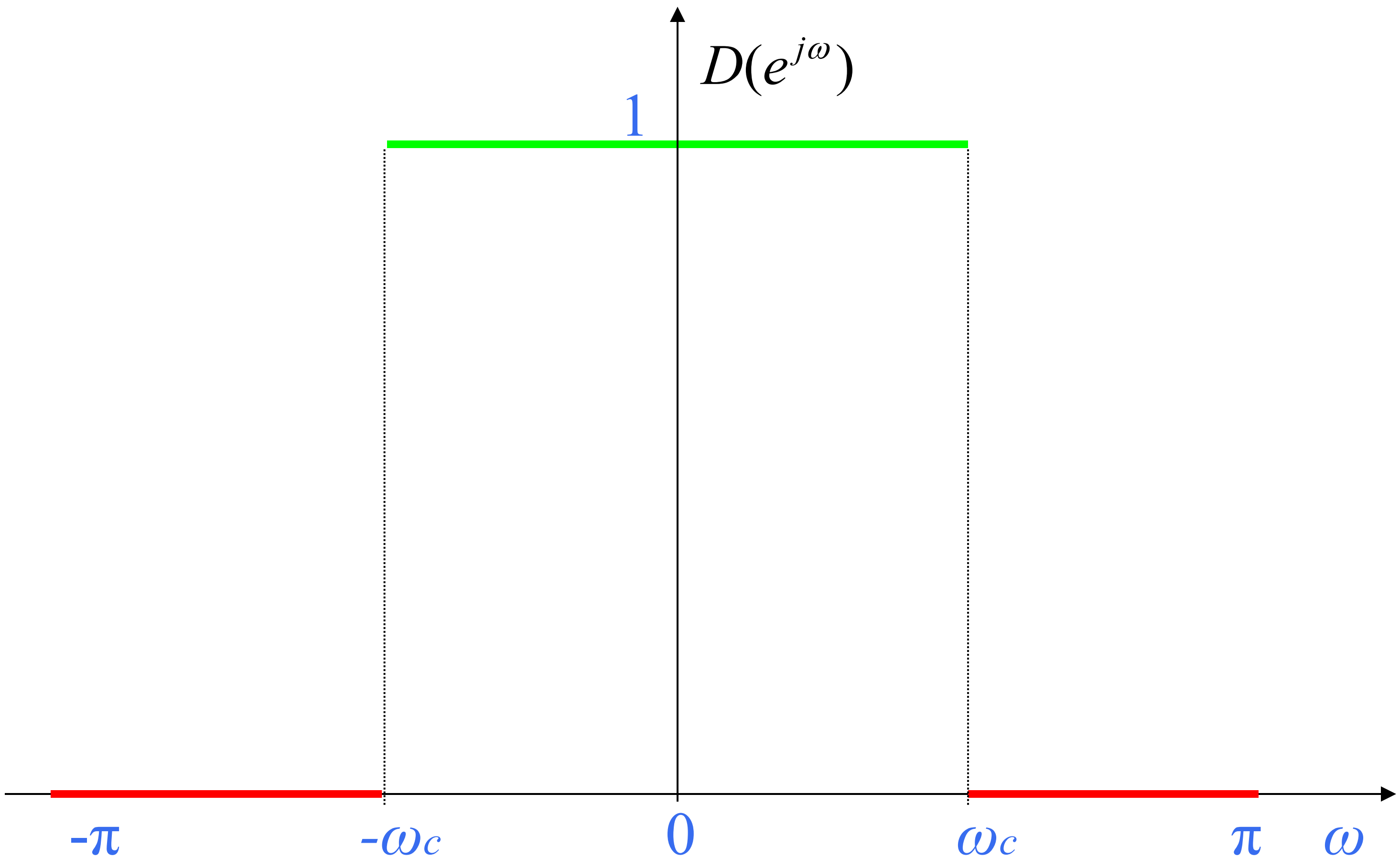
ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

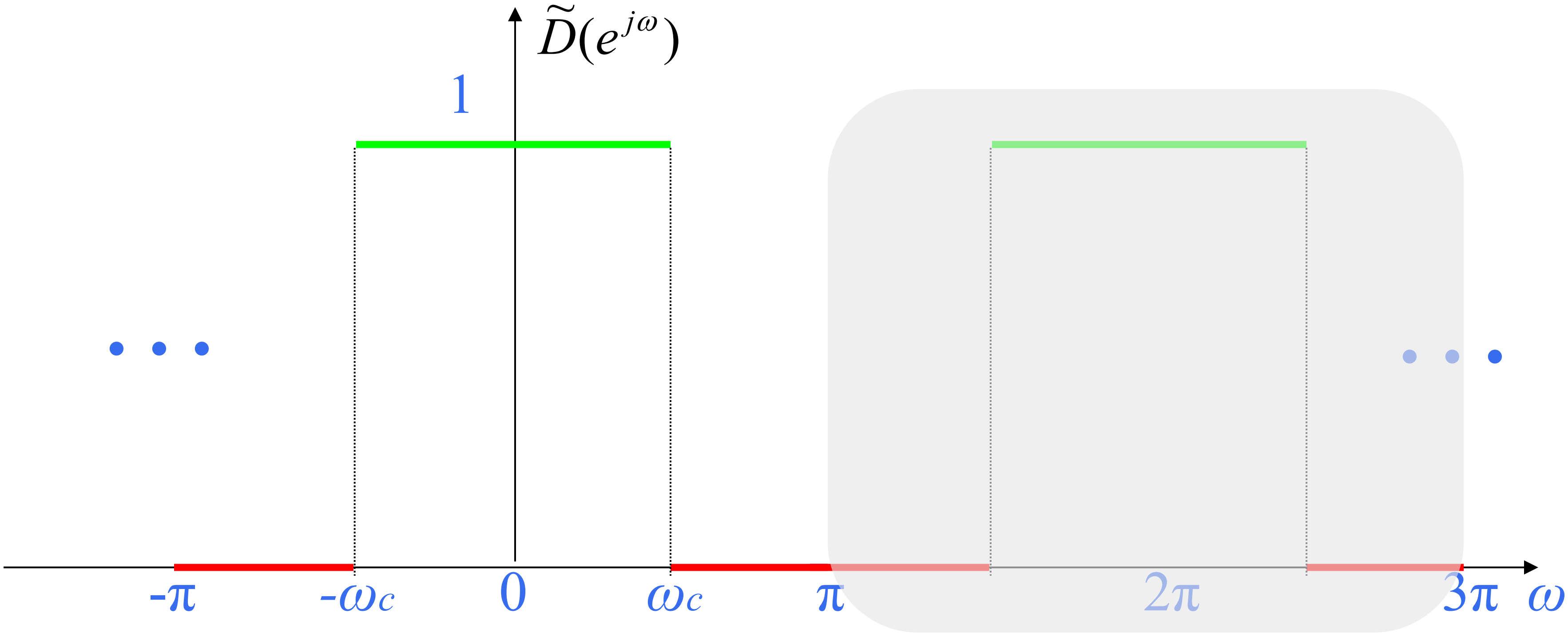
Σχεδίαση Κατωπερατών FIR Φίλτρων

$$\text{Ιδανικές Προδιαγραφές: } D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Περιοδική Επέκταση Ιδανικών Προδιαγραφών Φίλτρου



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Περιοδική Επέκταση Ιδανικών Προδιαγραφών Φίλτρου

Σχεδίαση με χρήση ΣειρώνFourier

Εξίσωση Σύνθεσης

$$\widetilde{D}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d[n]e^{-jn\omega}$$

Εξίσωση Ανάλυσης

$$d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{D}(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega, \;\; n \in Z$$

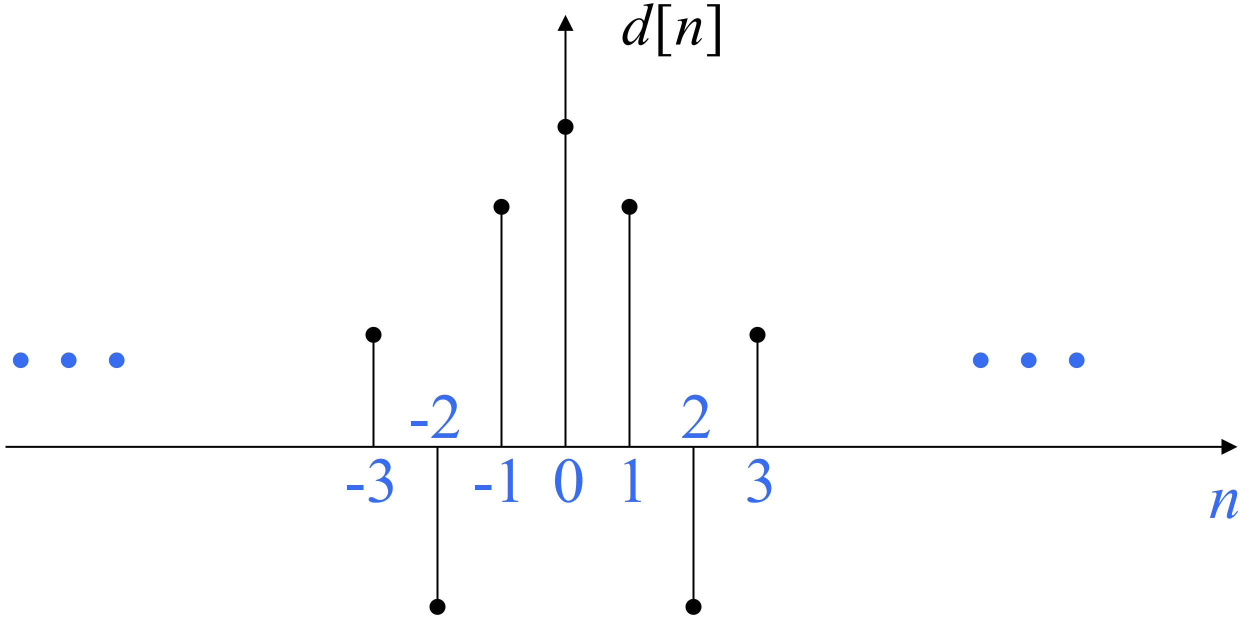
Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Περιοδική Επέκταση Ιδανικών Προδιαγραφών Φίλτρου

Σχεδίαση με χρήση ΣειρώνFourier

Εξίσωση Σύνθεσης

$$\widetilde{D}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d[n] e^{-jn\omega}$$



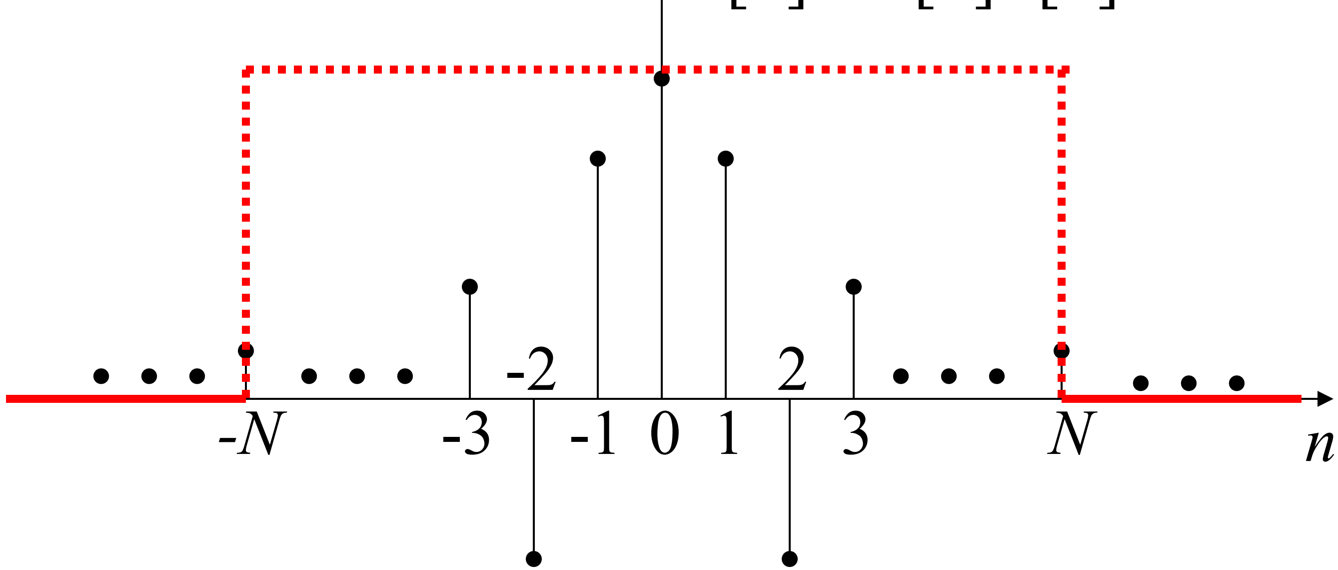
Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Σχεδίαση με χρήση Σειρών Fourier

Περιορισμός της ακολουθίας $d[n]$ με παραθύρωση για τη λύση των προβλημάτων.

$$w[n] = \begin{cases} 1, & -N \le n \le N \\ & 0 \end{cases}$$

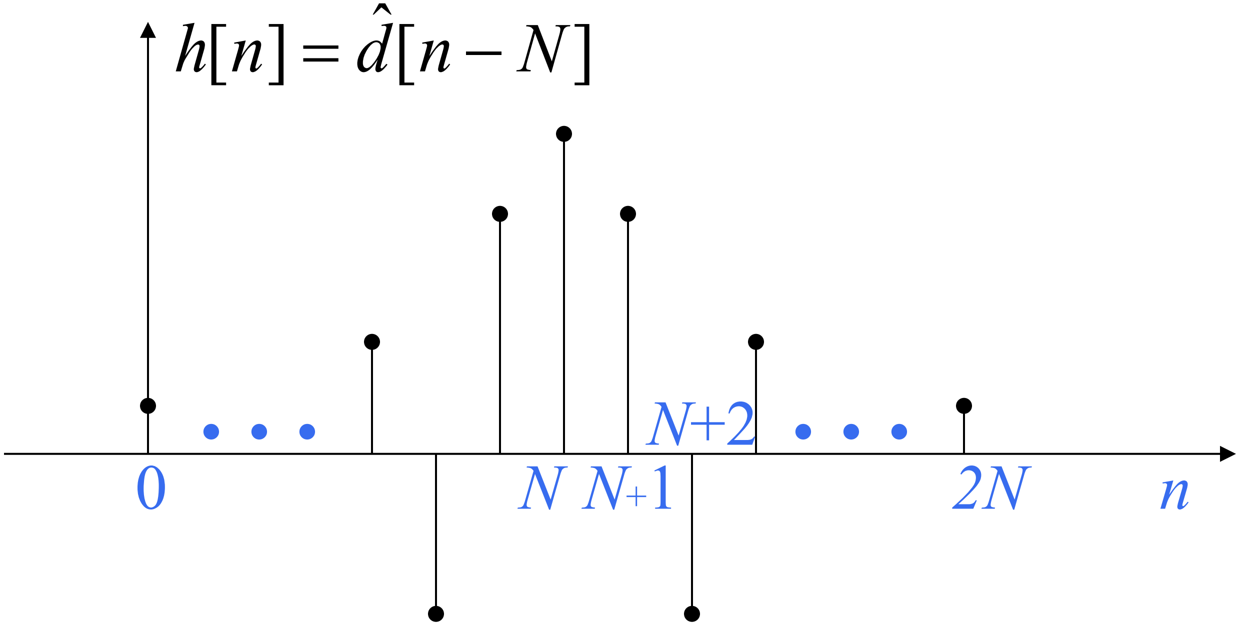
$$\hat{d}[n] = d[n]w[n]$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Σχεδίαση με χρήση ΣειρώνFourier

Εισαγωγή καθυστέρησης, με δεξιά ολίσθηση της ακολουθίας $\hat{d}[n]$ κατά N δείγματα, για αιτιατότητα.

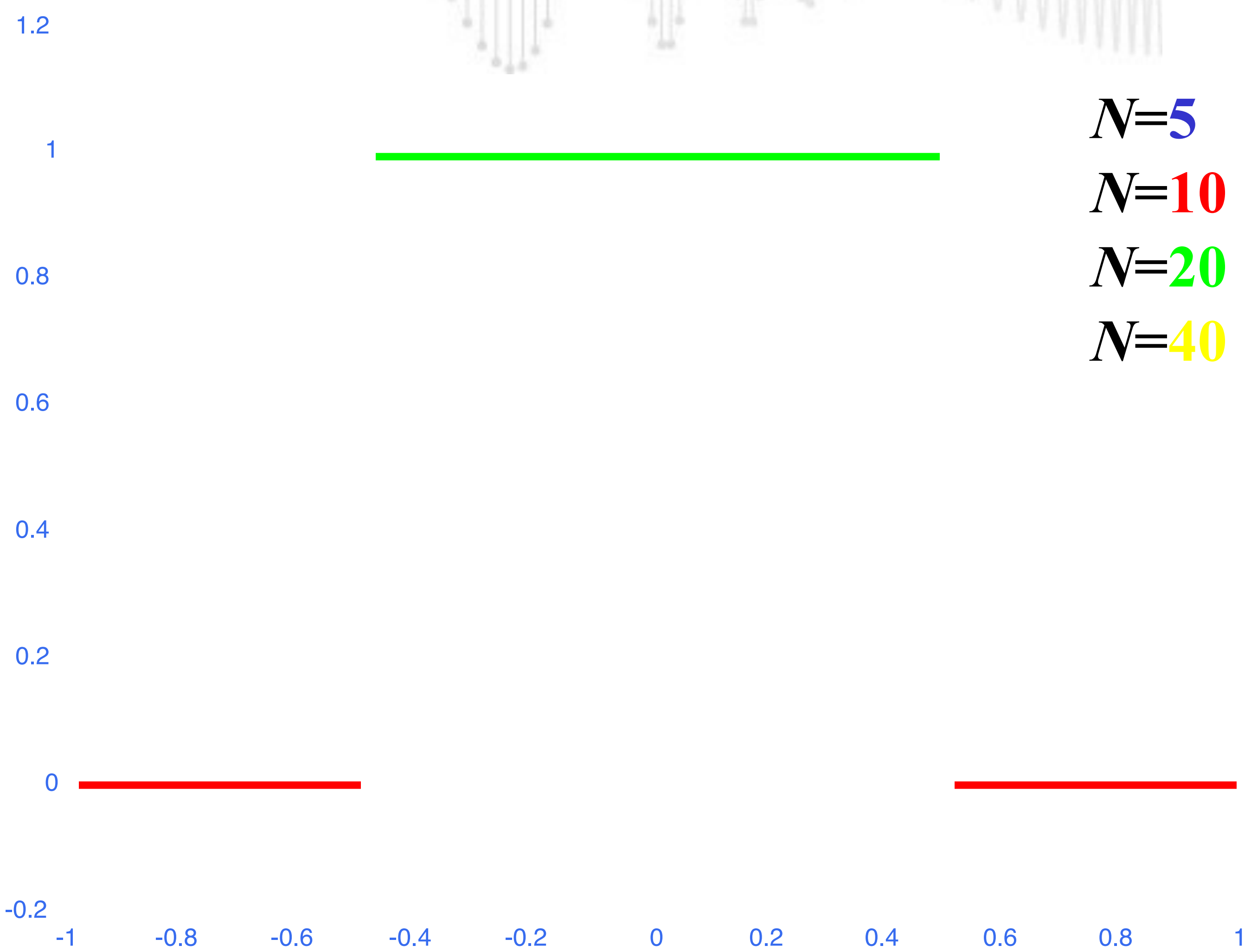


Απόκριση Συχνότητας:

$$H_N(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{2N} h[n] e^{-jn\omega}$$

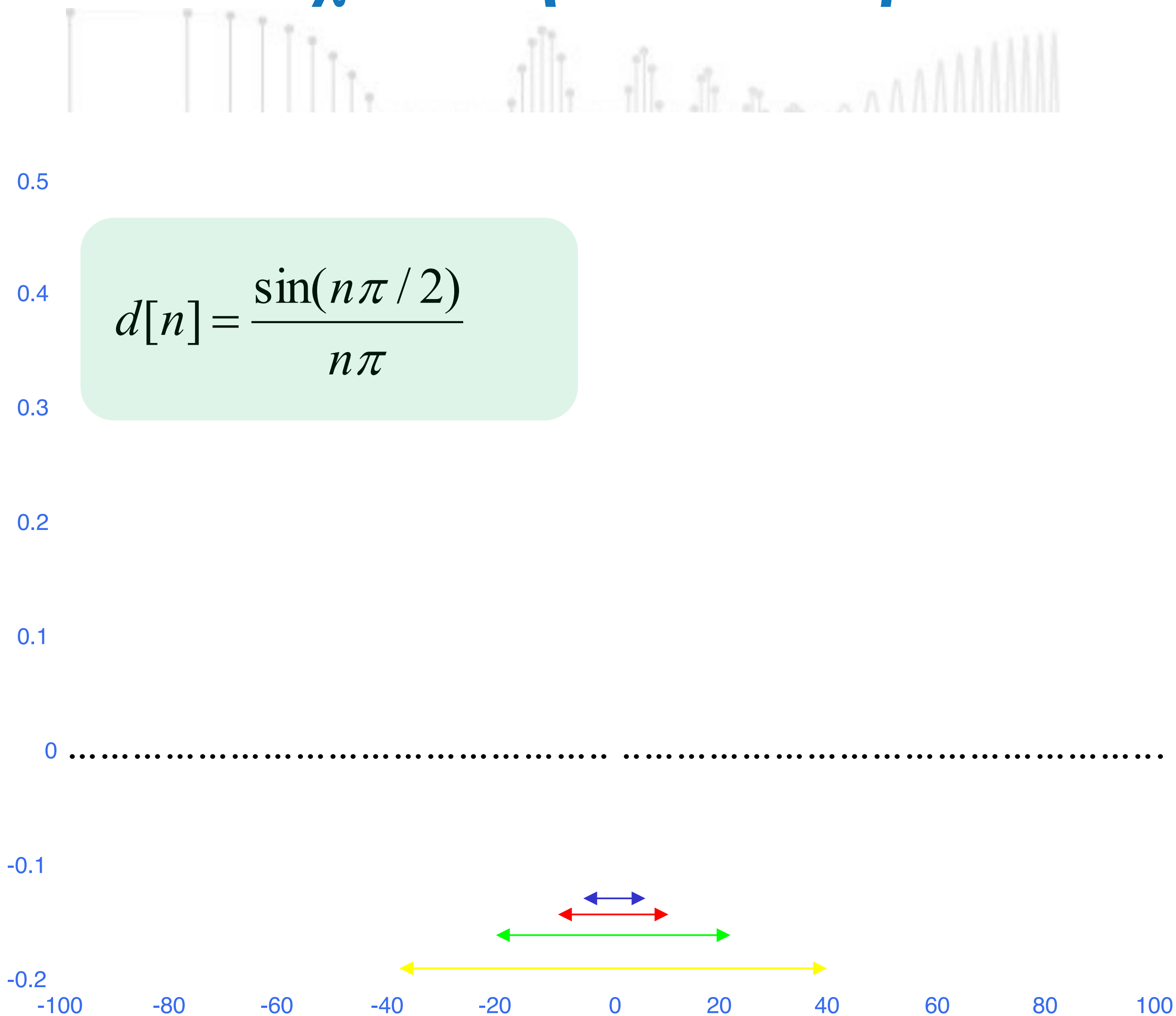
Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Σχεδίαση με χρήση ΣειρώνFourier



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

$$d[n] = \frac{\sin(n\pi / 2)}{n\pi}$$

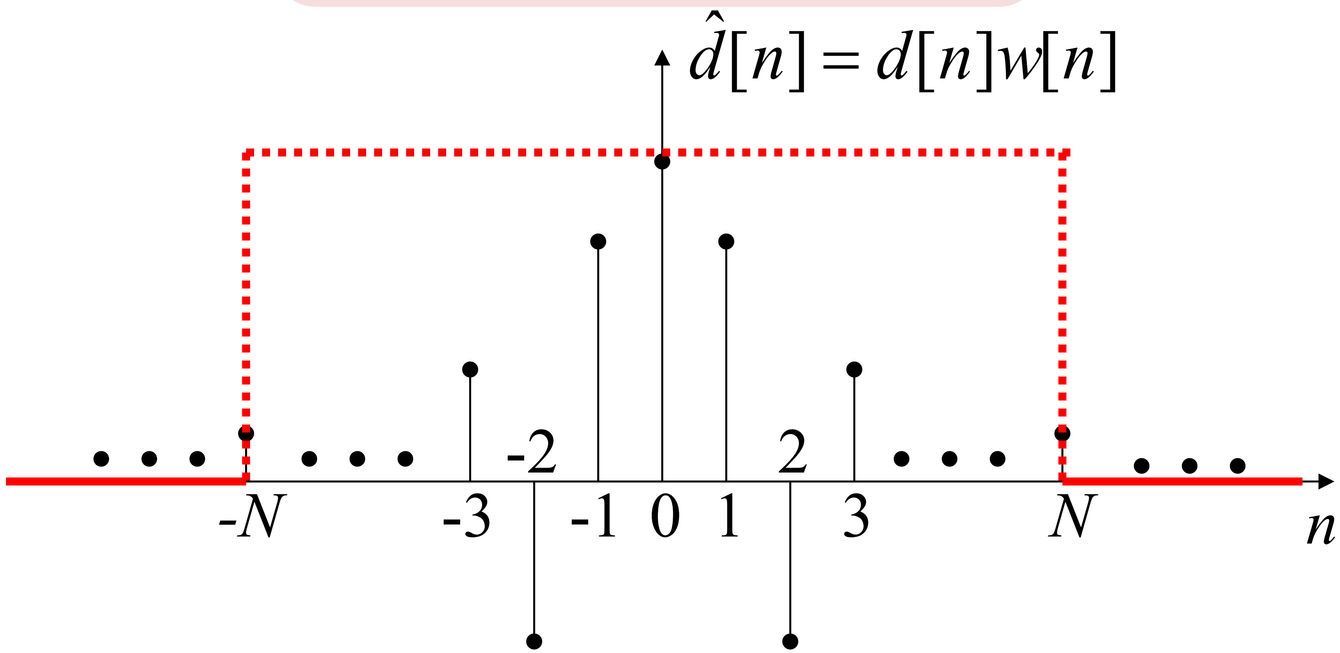


Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Σχεδίαση με χρήση Σειρών Fourier

Περιορισμός της ακολουθίας $d[n]$ με παραθύρωση για τη λύση των προβλημάτων.

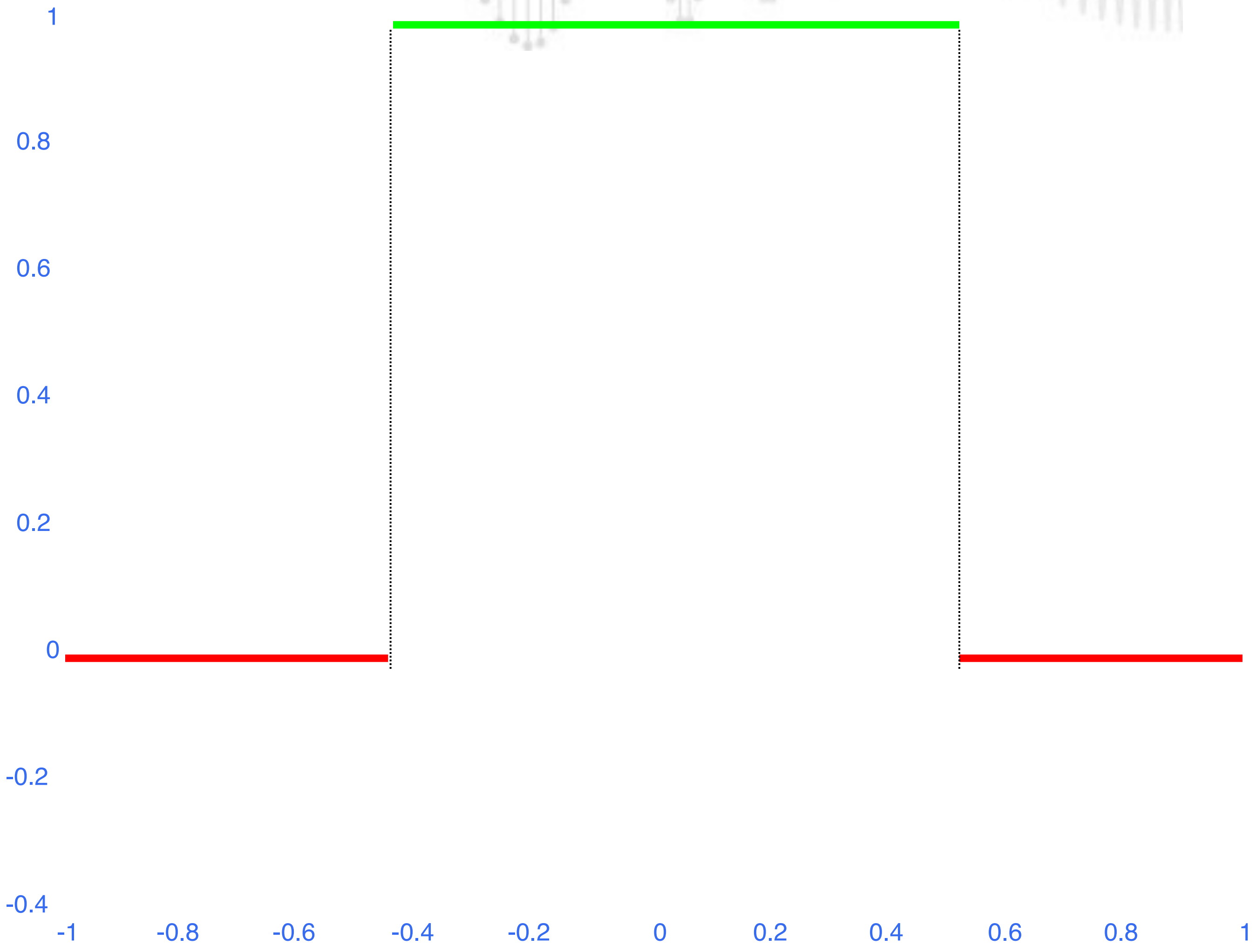
$$w[n] = \begin{cases} 1, & -N \le n \le N \\ & 0 \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Σχεδίαση με χρήση Σειρών Fourier

Πεδίο Συχνοτήτων-Φαινόμενο *Gibbs*

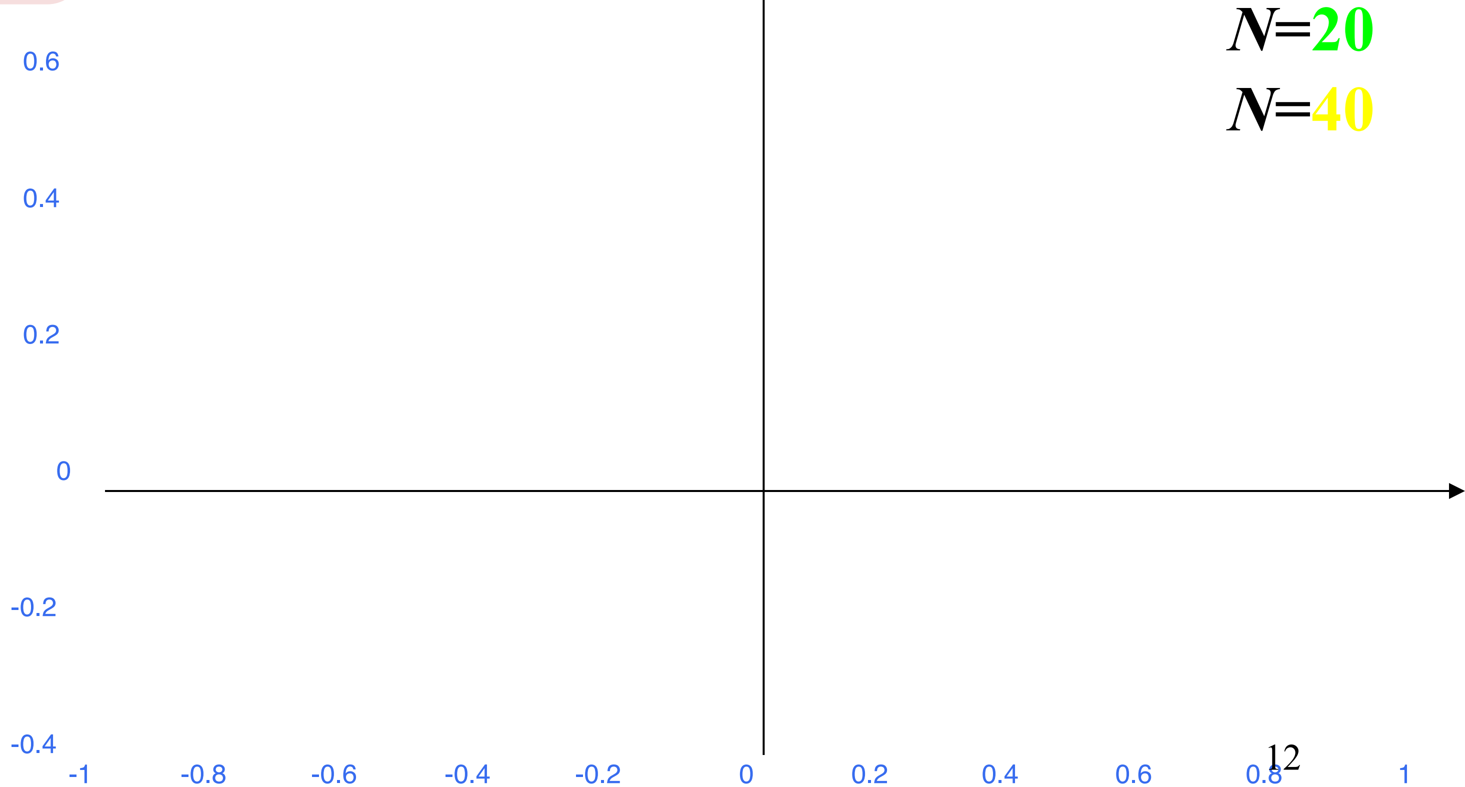


Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Σχεδίαση με χρήση Σειρών Fourier

Πεδίο Συχνοτήτων-Φαινόμενο *Gibbs*

$$R(\omega) = \frac{\sin(N\omega/2)}{N\sin(\omega/2)}$$

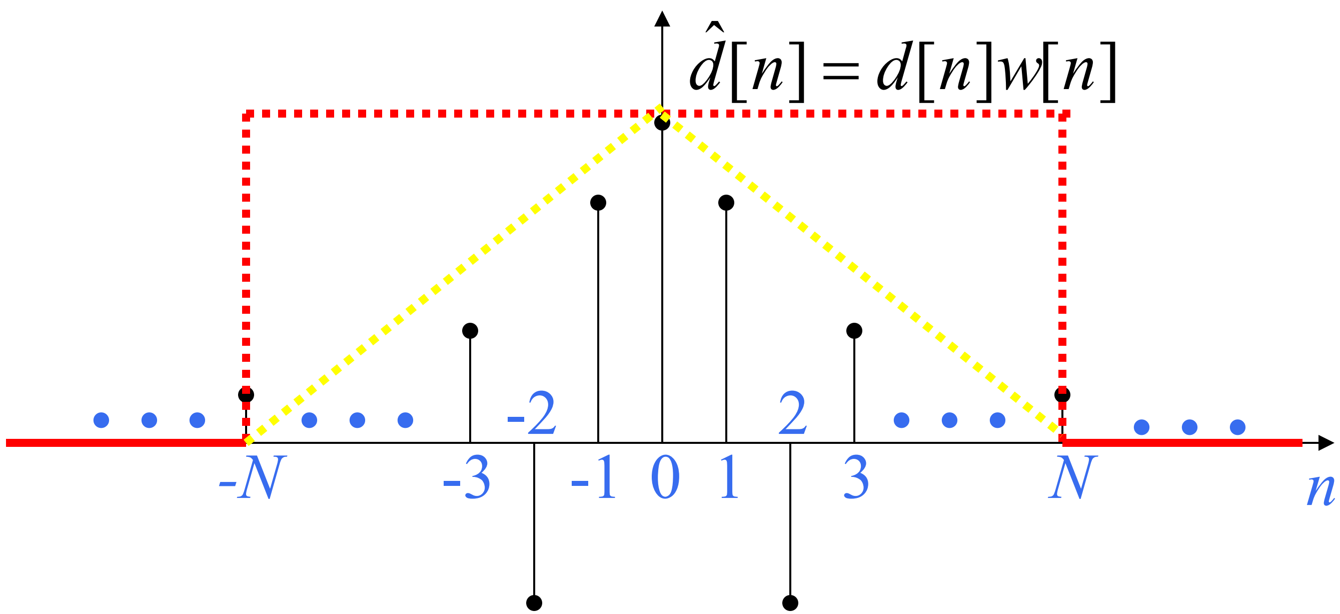


Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Παραθύρωση

$$w[n] = \begin{cases} 1, & -N \le n \le N \\ & 0 \end{cases}$$

$$w[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N}), & -N \le n \le N \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Παραθύρωση

Τετραγωνικό Παράθυρο: $\varpi_n = 1,\ 0 \le n \le L-1$

Τριγωνικό (Bartlett): $\varpi_n = 1 - \left|1 - 2\frac{n+1}{L+1}\right|,\ 0 \le n \le L-1.$

Hanning: $\varpi_n = 0.5 - 0.5\cos 2\pi\frac{n+1}{L+1},\ 0 \le n \le L-1$

Hamming: $\varpi_n = 0.54 - 0.46\cos 2\pi\frac{n+1}{L+1},\ 0 \le n \le L-1.$

Blackman: $\varpi_n = 0.52 - 0.5\cos 2\pi\frac{n+1}{L+1} + 0.08\cos 4\pi\frac{n+1}{L+1},\ 0 \le n \le L-1.$

Kaiser:

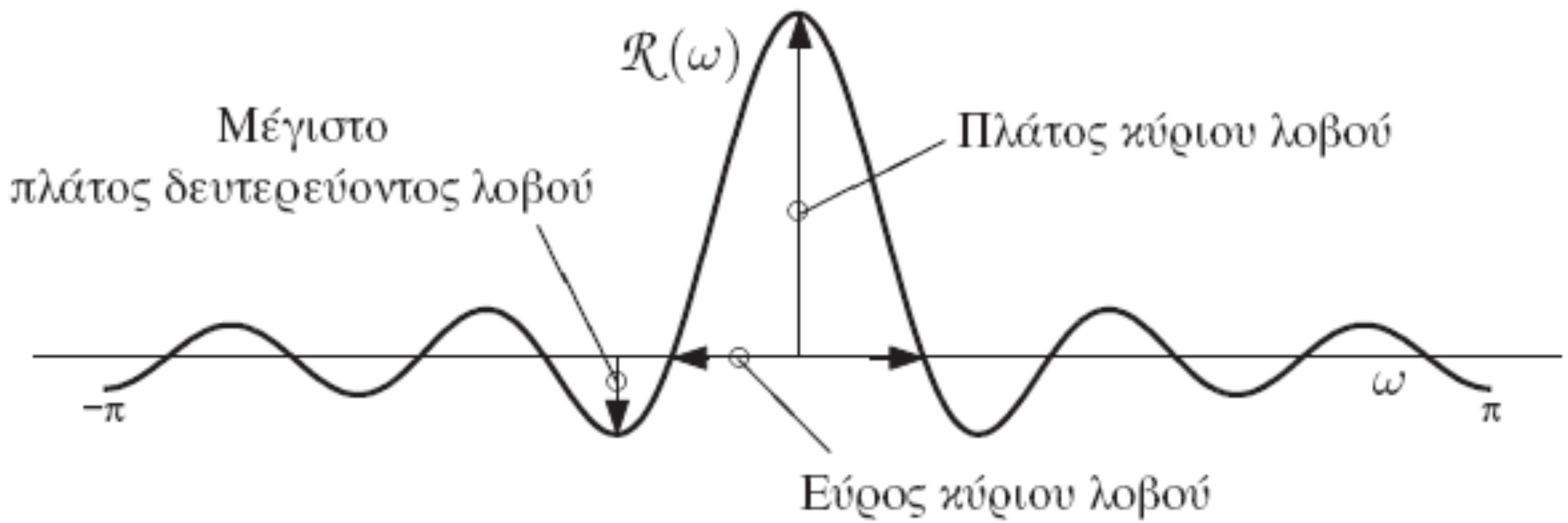
$$\varpi_n = \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(1-2\frac{n}{L-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)},\ 0 \le n \le L-1$$

Chebyshev:

$$\varpi_n = \frac{T_{L-1}(\beta) + 2\sum_{k=1}^{\left[\frac{L-1}{2}\right]} \cos\frac{(2n-L+1)k\pi}{L}\, T_{L-1}\left(\beta\cos\frac{k\pi}{L}\right)}{T_{L-1}(\beta) + 2\sum_{k=1}^{\left[\frac{L-1}{2}\right]} T_{L-1}\left(\beta\cos\frac{k\pi}{L}\right)}$$

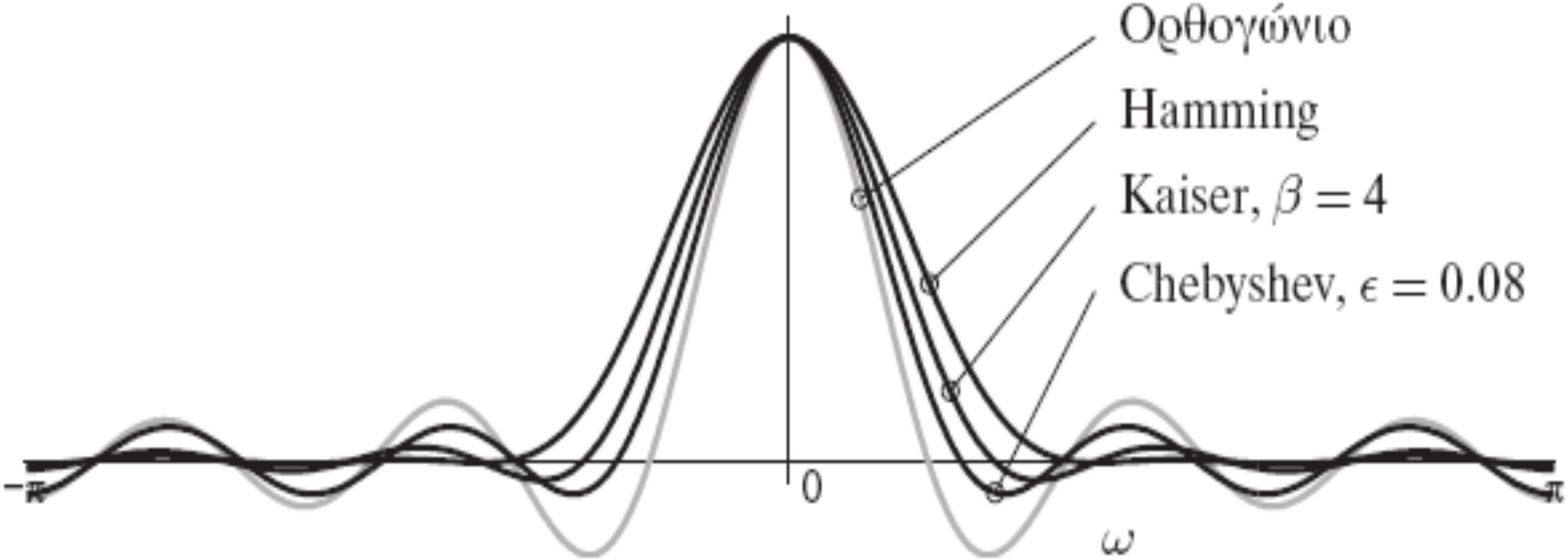
Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Βασικά Συχνοτικά Χαρακτηριστικά Παραθύρων



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Βασικά **Συχνοτικά** Χαρακτηριστικά Παραθύρων

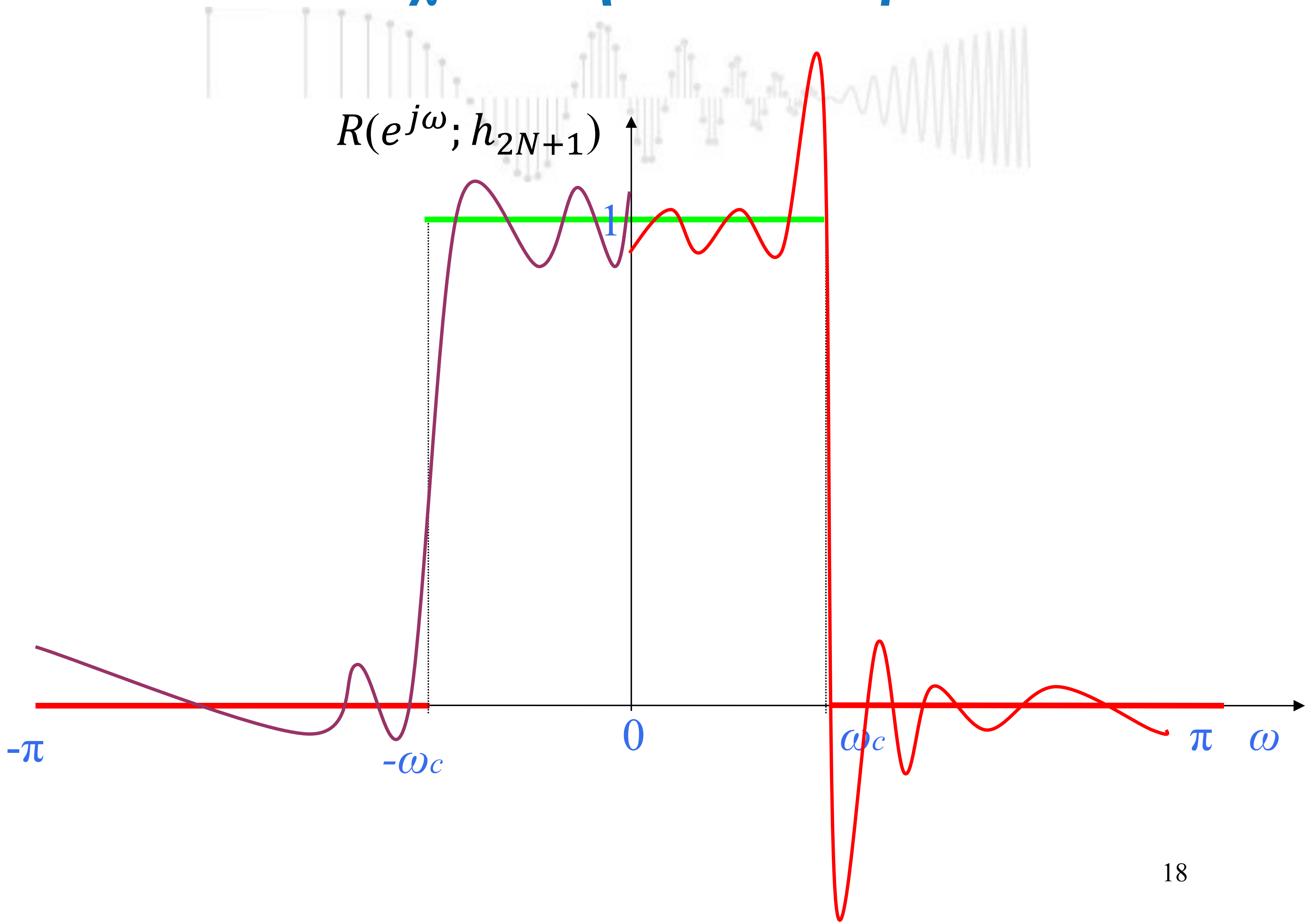


Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Βασικά Συχνοτικά Χαρακτηριστικά Παραθύρων

Παράθυρο	Πλάτος Δευτ. Λοβού	Εύρος Κύριου Λοβού
Ορθογώνιο	2.17×10^{-1}	$\frac{4\pi}{L}$
Bartlett	4.72×10^{-2}	$\frac{8\pi}{L}$
Hanning	2.66×10^{-2}	$\frac{8\pi}{L}$
Hamming	7.33×10^{-3}	$\frac{8\pi}{L}$
Blackman	1.24×10^{-3}	$\frac{12\pi}{L}$
Kaiser	$2.17 \times 10^{-1} \times \frac{\beta}{\sinh \beta}$	$\frac{4}{L}\left[\pi^2 + \beta^2\right]^{1/2}$
Chebyshev	ϵ	$\frac{2}{L}\left[\pi^2 + 4\left(\cosh^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)^2\right]^{1/2}$

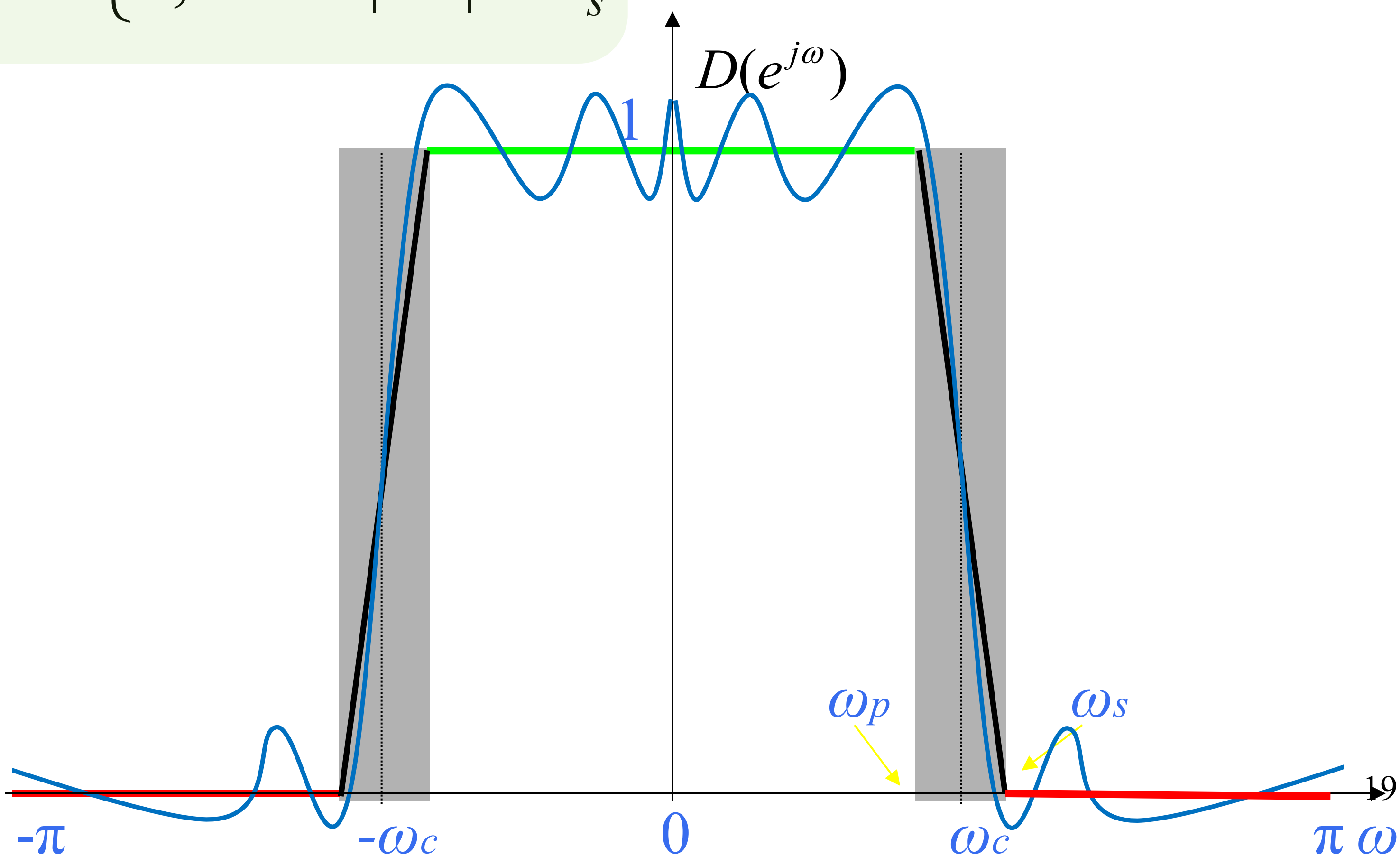
Σχεδίαση FIR Φίλτρων



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Πρακτικές Προδιαγραφές

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_p \\ 0, & \pi \ge |\omega| > \omega_s \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Σχεδίαση με χρήση ΣειρώνFourier

Εξίσωση Σύνθεσης

$$\widetilde{D}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d[n] e^{-jn\omega}$$

Εξίσωση Ανάλυσης

$$d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{D}(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega, \;\; n \in Z$$

Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Το Πρόβλημα Σχεδίασης ως Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

Συνάρτηση Σφάλματος: $\varepsilon(e^{j\omega}; h_{2N+1}) = D\left(e^{j\omega}\right) - R(e^{j\omega}; h_{2N+1})$

Συνάρτηση Κόστους: $$E_p^p(h_{2N+1}) = \int_{-\pi}^{\pi} |\varepsilon(e^{j\omega}; h_{2N+1})\ |^p d\omega$$

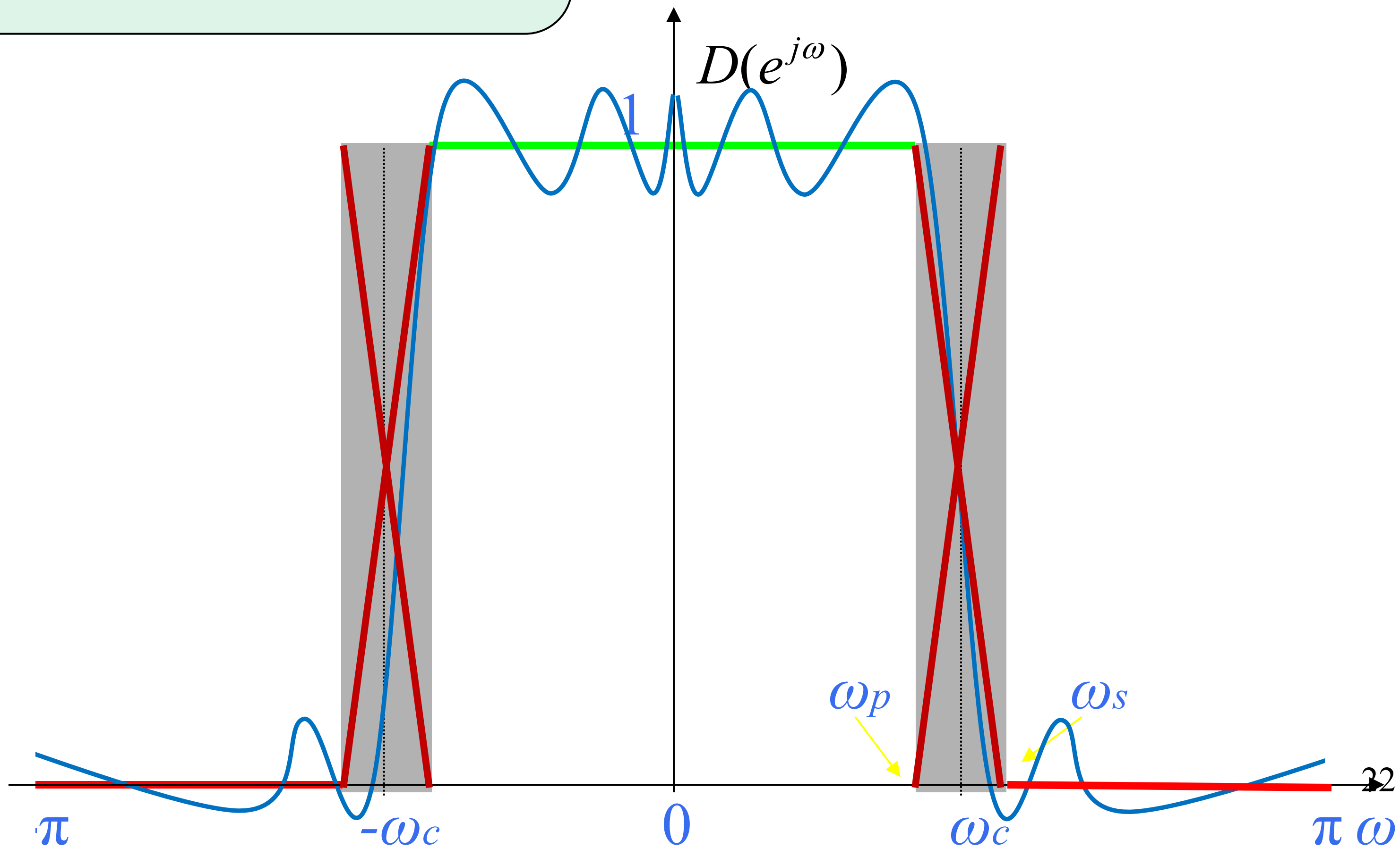
Σκοπός μας η λύση του προβλήματος: $$\min_{h_{2N+1}} E_p^p(h_{2N+1})$$

Η βέλτιστη λύση : $$h_{2N+1}^{*} = \arg\min_{h_{2N+1}} E_p^p(h_{2N+1})$$

Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Το Πρόβλημα Σχεδίασης ως Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

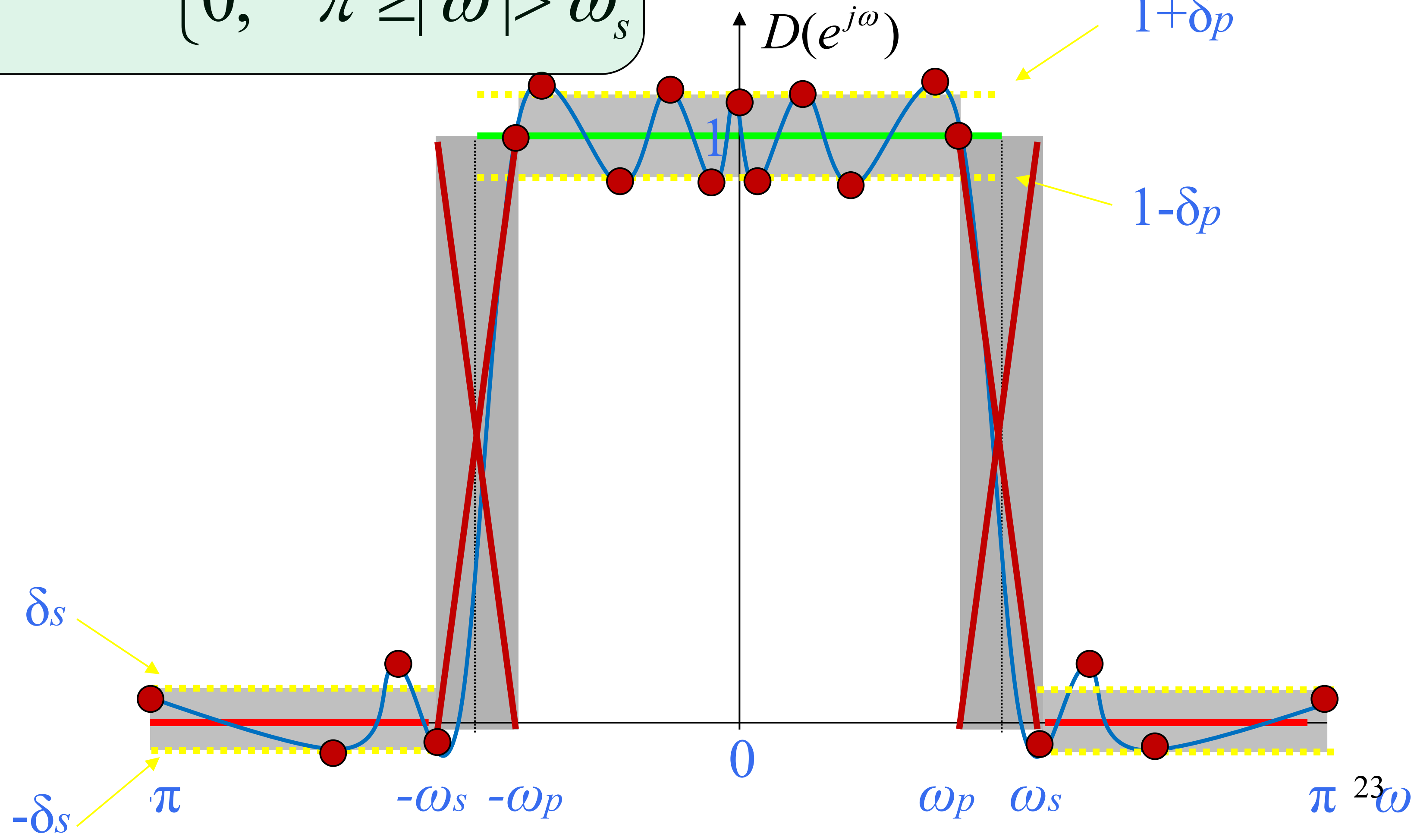
$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_p \\ 0, & \pi \geq |\omega| > \omega_s \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Το Πρόβλημα Σχεδίασης ως Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

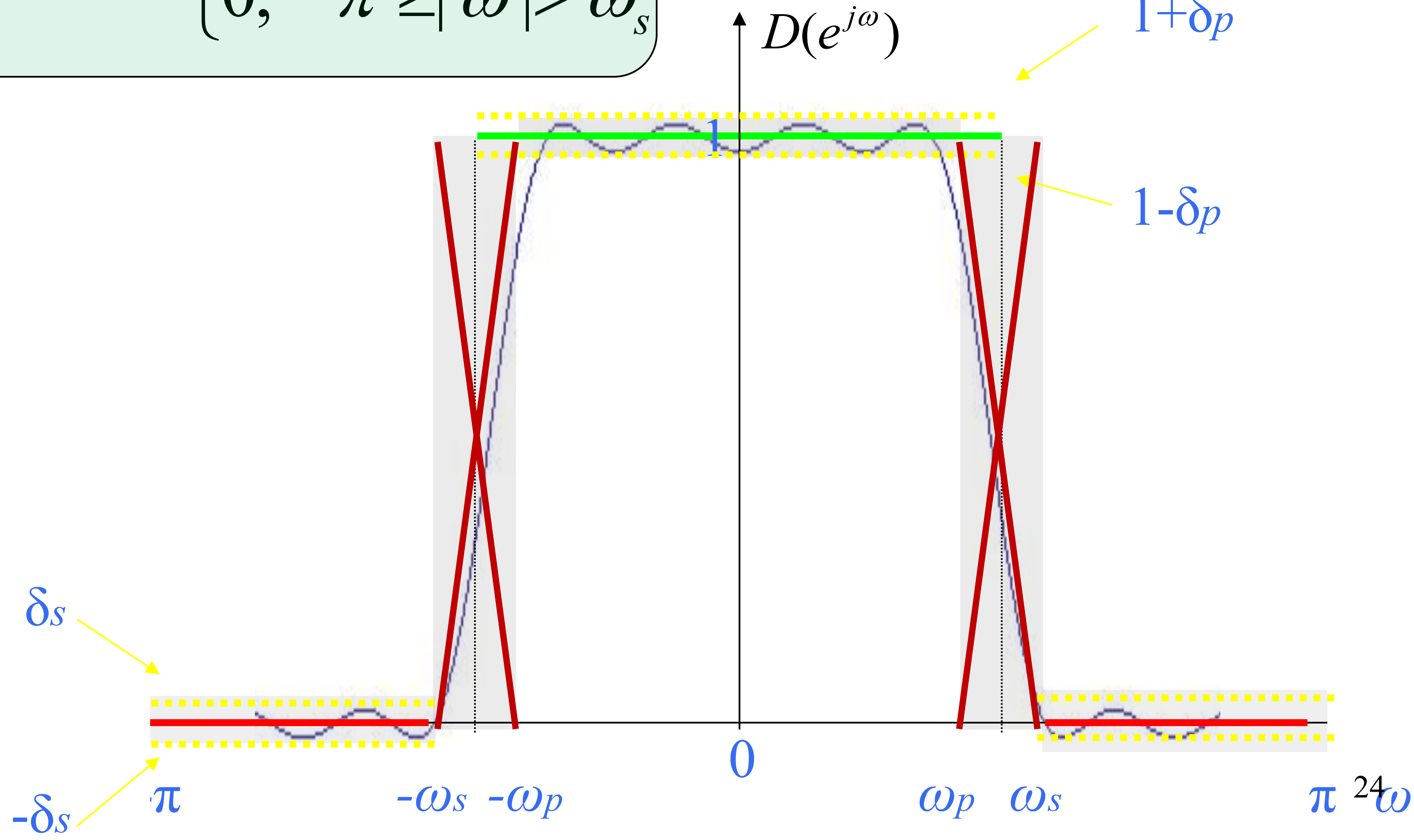
$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_p \\ 0, & \pi \geq |\omega| > \omega_s \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Το Πρόβλημα Σχεδίασης ως Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_p \\ 0, & \pi \geq |\omega| > \omega_s \end{cases}$$



Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Δίνεται το πολυώνυμο

$$D(x) = \sum_{n=0}^{N+1} a_n x^n, \ |x| \leq 1$$

Προσεγγίστε το παραπάνω πολυώνυμο με ένα FIR φίλτρο μήκους 2N+1

Με την έννοια:

- *των ελαχίστων τετραγώνων*
- *του ελάχιστο-μέγιστου*

Για κάθε μια από τις παραπάνω προσεγγίσεις, υπολογίστε το μέγιστο σφάλμα προσέγγισης.

Σχεδίαση FIR Φίλτρων

Πολυώνυμα Chebyshev

$$C_n(x) = \begin{cases} \cos(n\cos^{-1}(x)), & |x| \le 1 \\ \cosh(n\cosh^{-1}(x)), & |x| > 1 \end{cases}$$

Αναδρομική σχέση ορισμού των πολυωνύμων

$$C_0(x) = 1$$

$$C_1(x) = x$$

$$C_{n+1}(x) = 2xC_n(x) - C_{n-1}(x), \; n \ge 2$$