

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

© Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης

Πολυτεχνική Σχολή

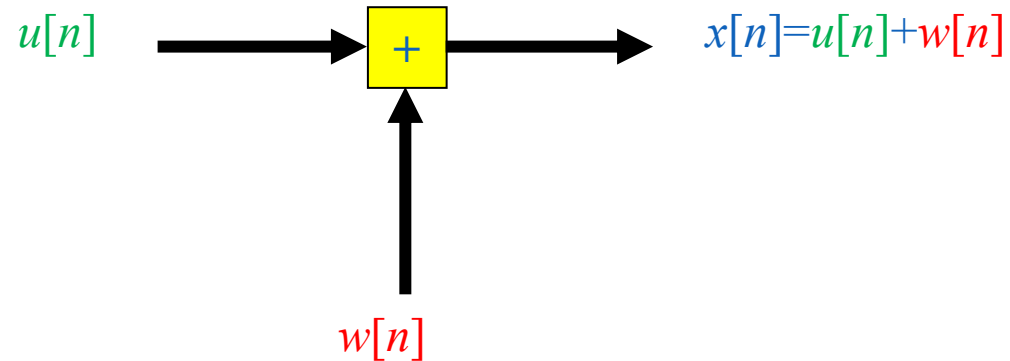
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Βασικό Μοντέλο

“Σήμα Πληροφορίας”

“Παρατηρούμενο Σήμα”

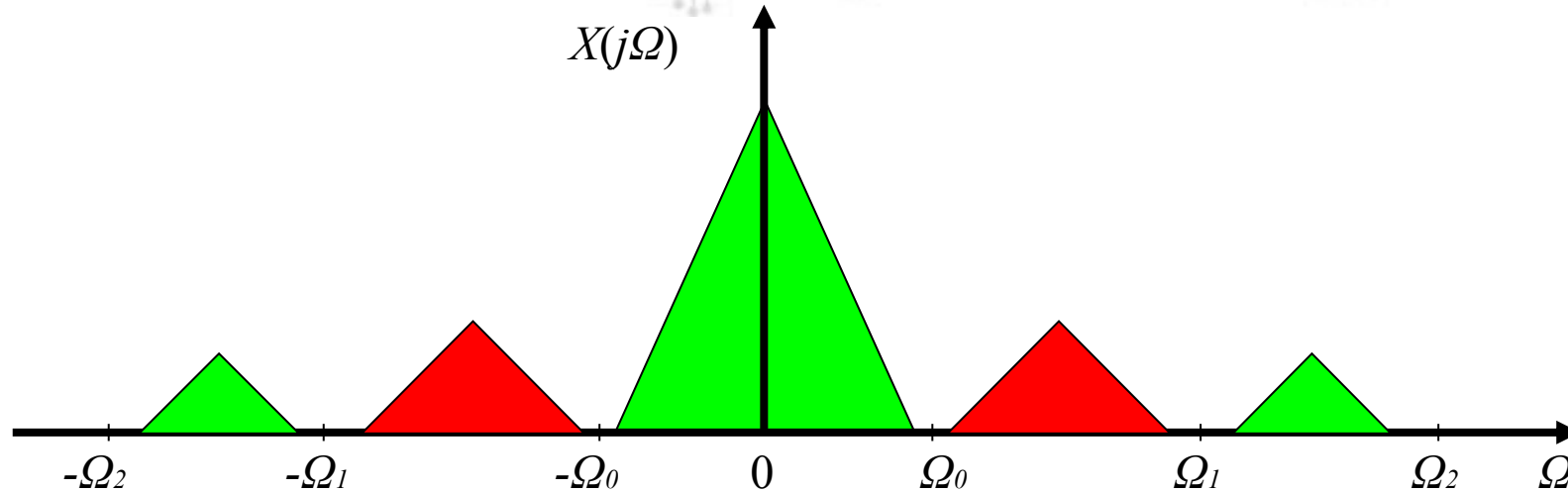


“Θόρυβος”

Σκοπός της Επεξεργασίας: **Η ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗ ΤΟΥ “ΘΟΡΥΒΟΥ”**

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Κλασσική Επεξεργασία Σημάτων:



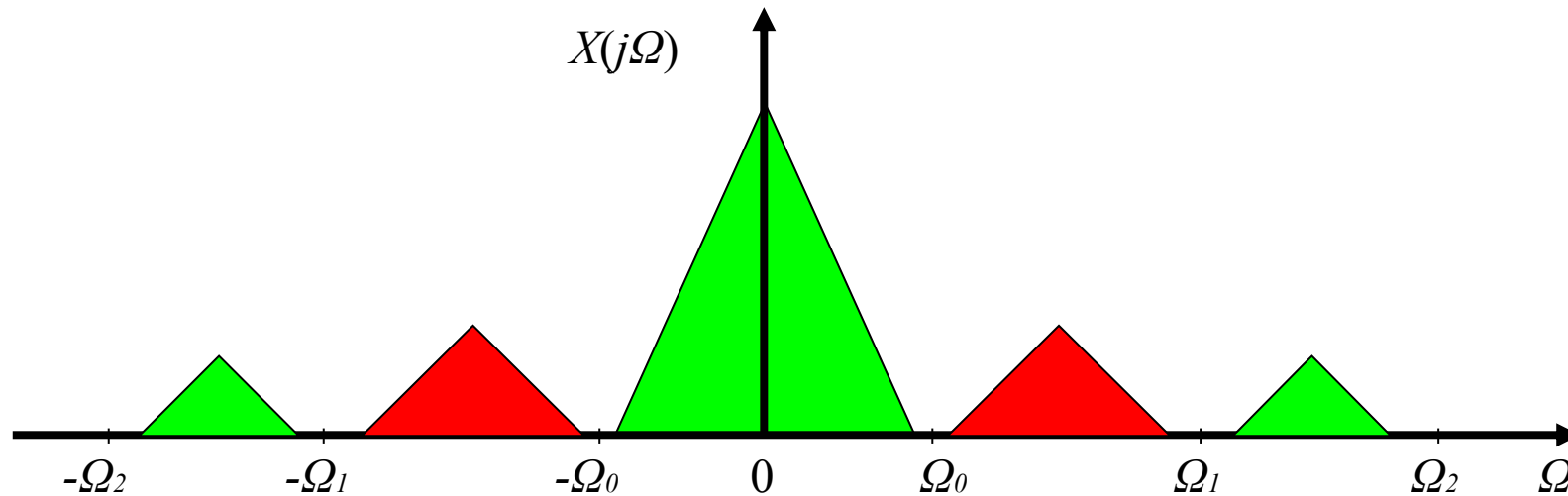
Βασική Υπόθεση: Το Σήμα *Πληροφορίας* και ο *Θόρυβος* δεν περιέχουν κοινές συχνότητες.

Με άλλα λόγια πληροφορία και θόρυβος είναι *διαχωρίσιμα* στο πεδίο της συχνότητας

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Κλασική Επεξεργασία Σημάτων:

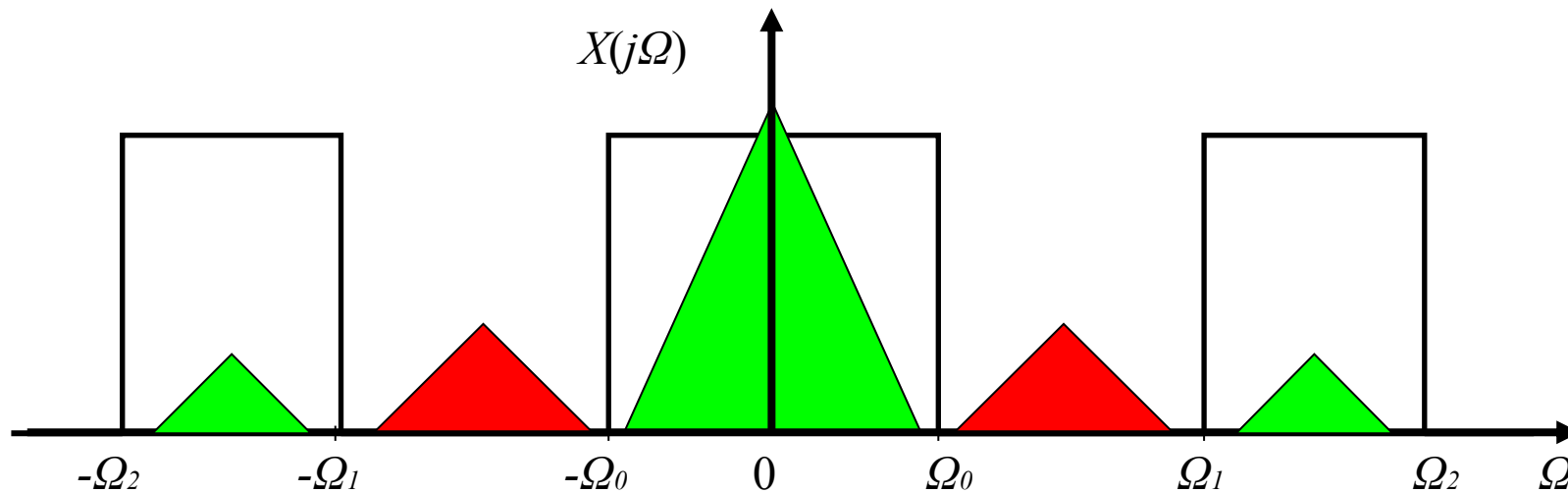
- Περιγραφή στο Πεδίο της Συχνότητας
- Ανάλυση Διαθέσιμου Σήματος σε Μη Επικαλυπτόμενες Συχνοτικές Ζώνες



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

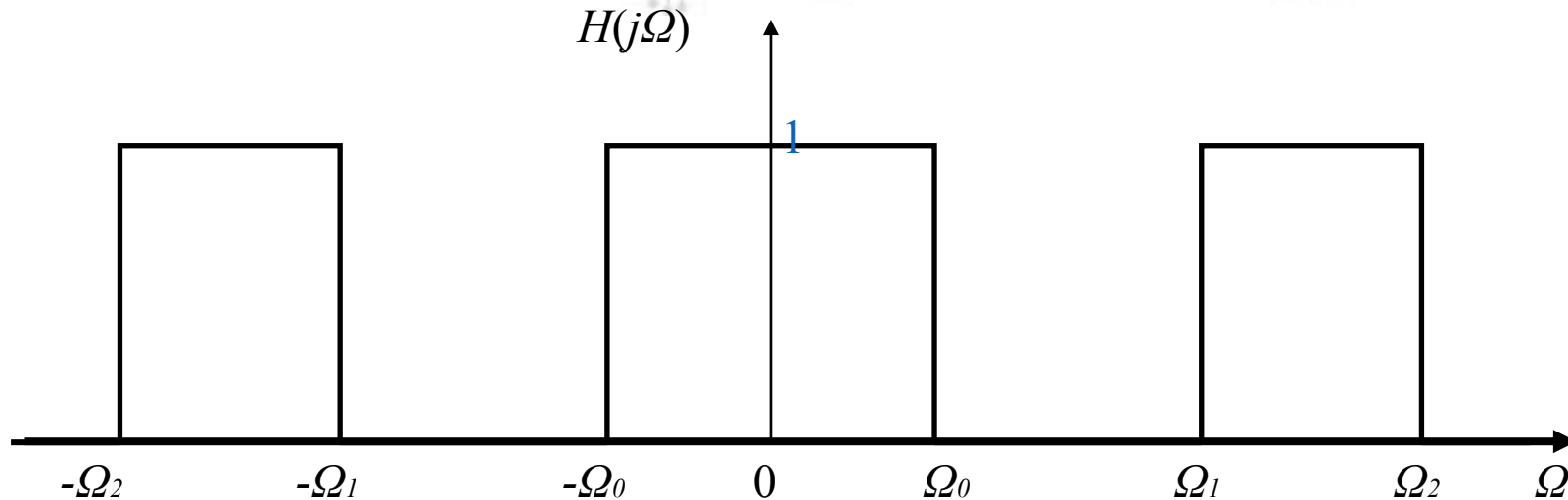
Κλασική Επεξεργασία Σημάτων:

- Η Βασική Υπόθεση επιτρέπει την Απομάκρυνση του «Θορύβου» με τη χρήση «απλών» συστημάτων.



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Κλασική Επεξεργασία Σημάτων: Φίλτρα

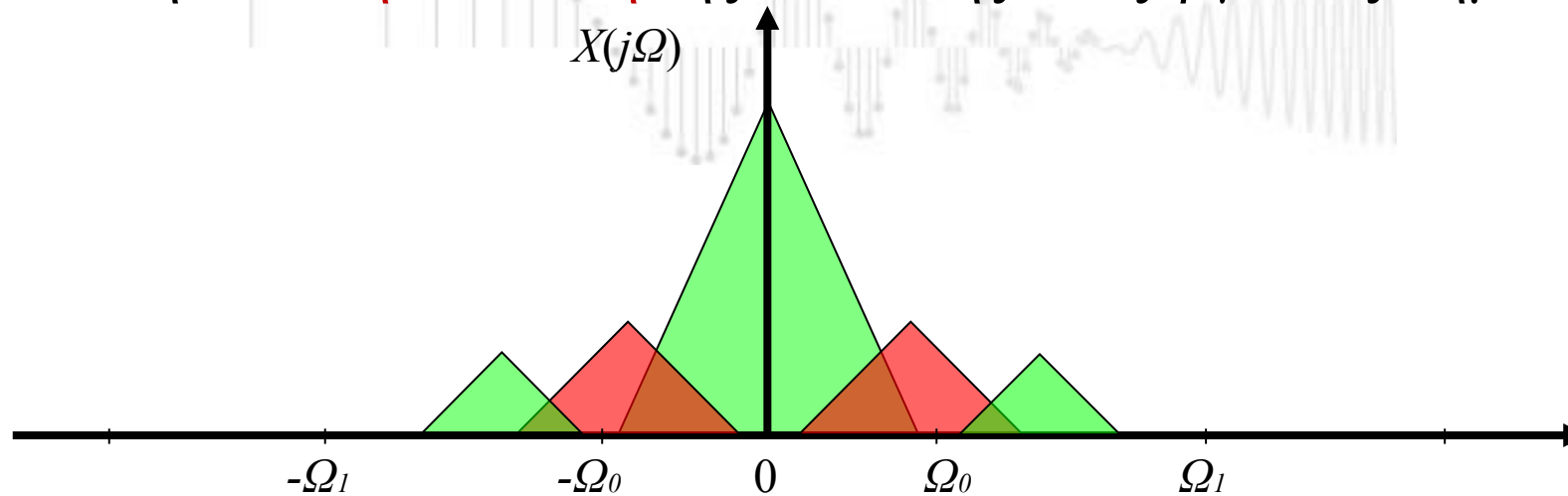


Γραμμικά Φίλτρα: Ερωτήματα που θα πρέπει να έχουν απαντηθεί:

- Τι φίλτρο θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε IIR ή FIR;
- Μπορούμε να βρούμε ένα γραμμικό σύστημα υλοποιήσιμο του οποίου η απόκριση συχνότητας θα έχει την επιθυμητή ιδανική μορφή;
- Αν όχι, τι μπορούμε να κάνουμε;

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Τι συμβαίνει αν η **Βασική Υπόθεση** της Κλασικής Επεξεργασίας Σημάτων **δεν ισχύει**;



Αν δηλαδή, το Σήμα **Πληροφορίας** και ο **Θόρυβος** περιέχουν *κοινές* συχνότητες και επομένως **δεν είναι διαχωρίσιμα** στο πεδίο της συχνότητας, τι μπορούμε να κάνουμε;

Σ' αυτή την περίπτωση η περιγραφή του διαθέσιμου σήματος με την βοήθεια των συχνοτικών ζωνών είναι **ανεπαρκής**.

Χρειαζόμαστε μια **διαφορετική περιγραφή των σημάτων** και μια **διαφορετικού είδους επεξεργασία.....**

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων

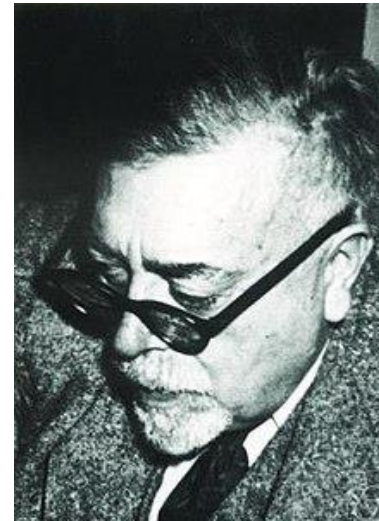
Thomas Bayes
1701-1761



Carl Friedrich Gauss
1777 -1855



Robert Wiener
1894-1964



Rudolf E. Kalman
1930-2016



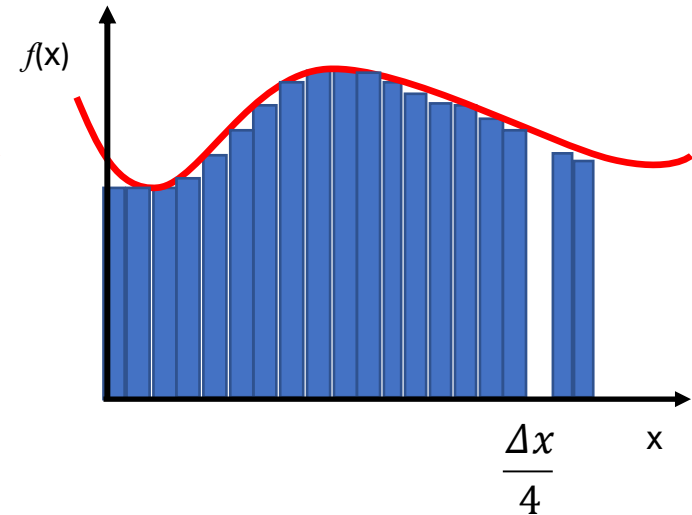
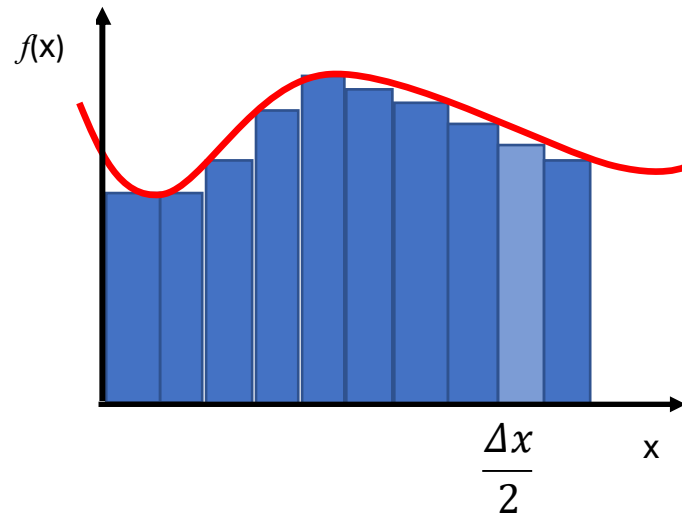
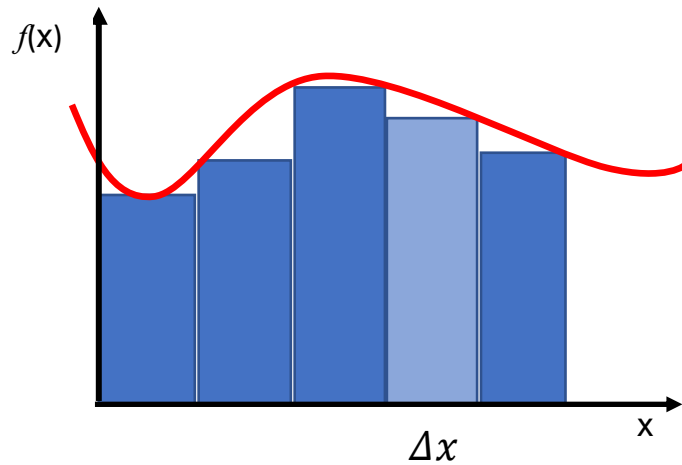
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων:

- Χώρος Πιθανότητας
- Τυχαίες Μεταβλητές
- Πείραμα
- Στατιστικές Πρώτης και Δεύτερης Τάξης
- Στοχαστικά ή Τυχαία Σήματα
- Στασιμότητα και Εργοδικότητα
- Γενίκευση του συχνοτικού περιεχομένου ενός σήματος και ορισμός της πυκνότητας φάσματος.
- Επίδραση Γραμμικού Συστήματος σε Στατιστικές Στοχαστικού Σήματος Βέλτιστο Γραμμικό Φιλτράρισμα.

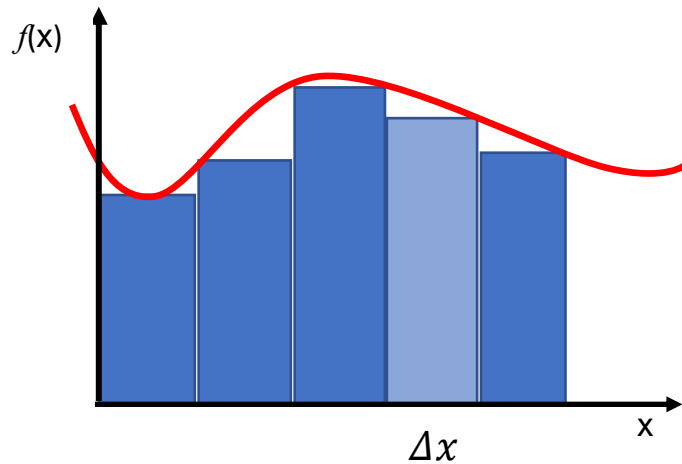
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ολοκλήρωση κατά Riemann



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

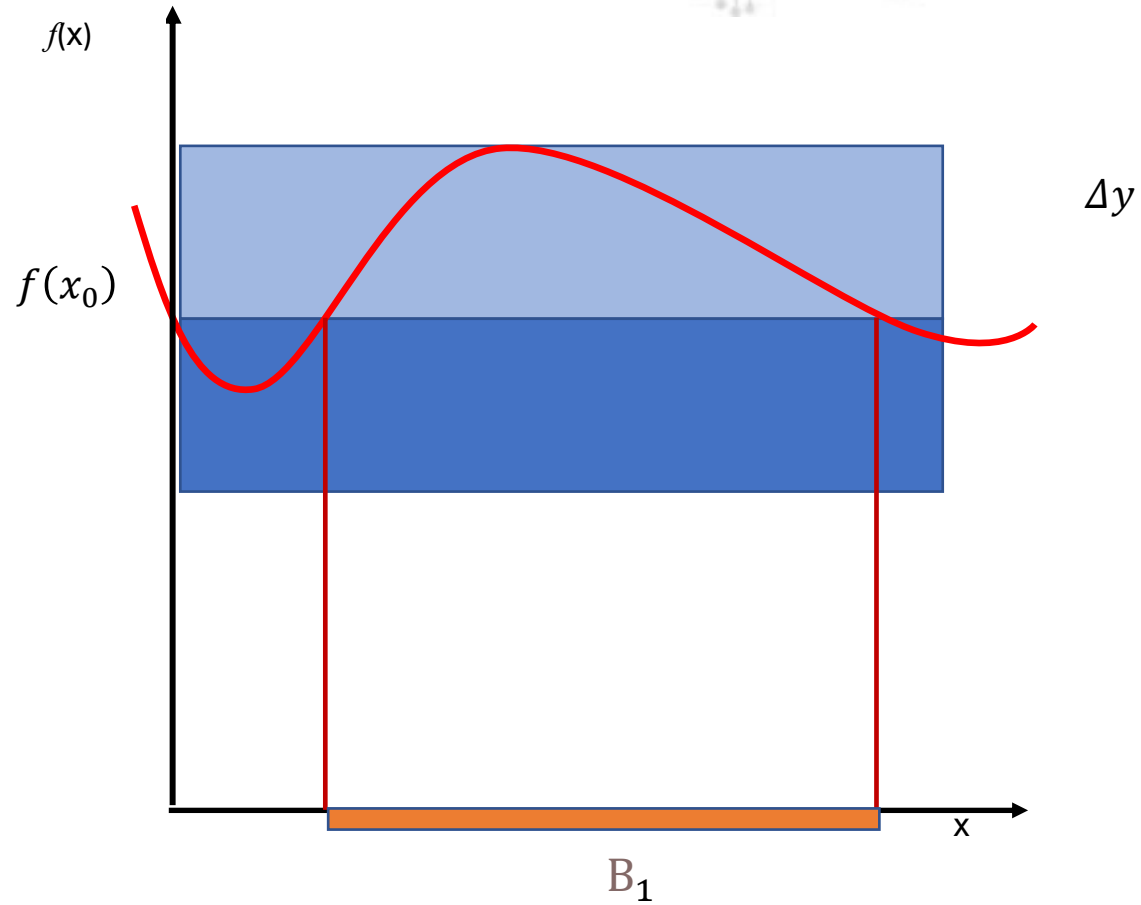
Ολοκλήρωση κατά Riemann



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

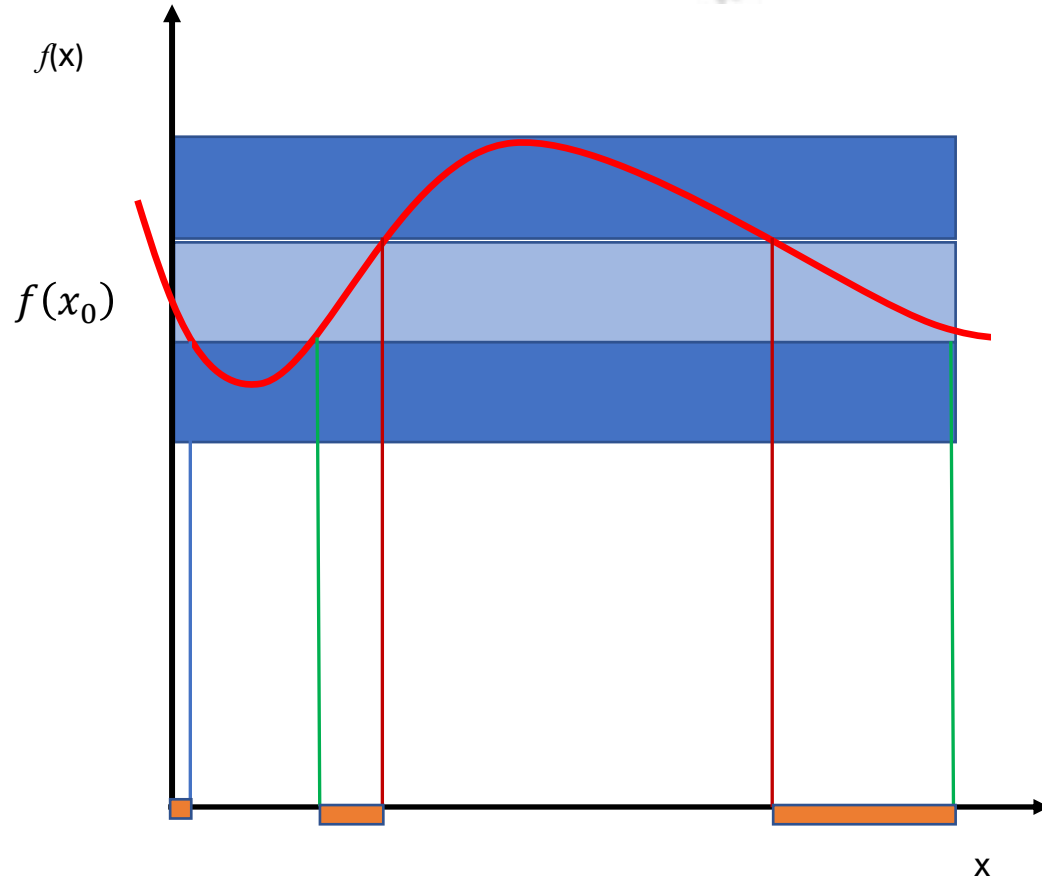
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ολοκλήρωση κατά Lebesgue 1904



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

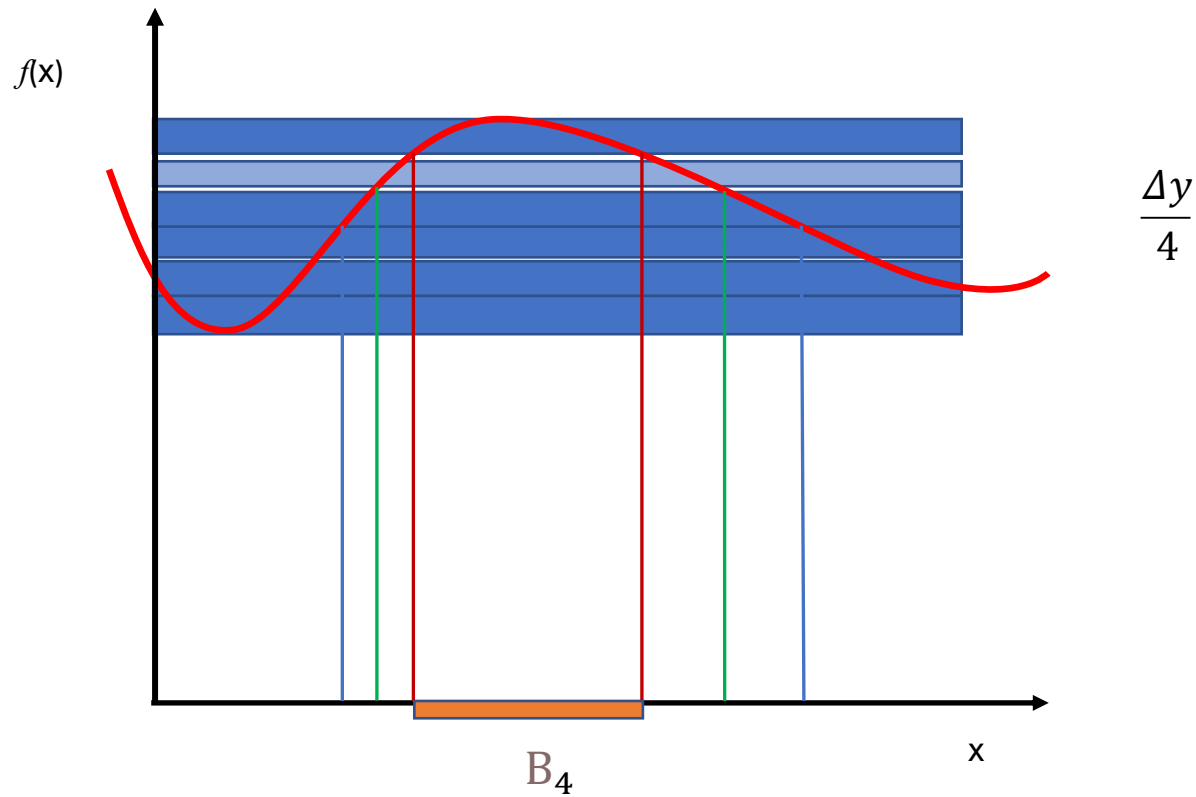
Ολοκλήρωση κατά Lebesgue 1904



$$\left[f(x_0) + \frac{\Delta y}{2} \right] \times \text{Μήκος} \{A_1 \cup A_2 \cup A_3\}$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ολοκλήρωση κατά Lebesgue 1904



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων:

- Χώρος Πιθανότητας
- Τυχαίες Μεταβλητές
- Πείραμα
- Στατιστικές Πρώτης και Δεύτερης Τάξης
- Στοχαστικά ή Τυχαία Σήματα
- Στασιμότητα και Εργοδικότητα
- Γενίκευση του συχνοτικού περιεχομένου ενός σήματος και ορισμός της πυκνότητας φάσματος.
- Επίδραση Γραμμικού Συστήματος σε Στατιστικές Στοχαστικού Σήματος Βέλτιστο Γραμμικό Φιλτράρισμα.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων: Μετασχηματισμοί τ.μ.

$$y(\theta) = a\chi(\theta) + \beta, a > 0$$

$$y(\theta) = a\chi^3(\theta) + \beta, a > 0$$

$$y(\theta) = a\chi^2(\theta) + \beta, a > 0$$

Η $f_\chi(x)$ είναι **γνωστή** πώς μπορούμε να **βρούμε** την $f_y(y)$;

Γενίκευση;

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων: ροπές (moments)

Στοχαστικός Μέσος Όρος: $\mu_\chi = \mathbb{E}_{f_\chi}[\chi(\theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\chi(x) dx$

Διασπορά: $\sigma_\chi^2 = \mathbb{E}_{f_\chi}[(\chi(\theta) - \mu_\chi)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_\chi)^2 f_\chi(x) dx$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων: ροπές (moments) Fourier Transform

Αν $\chi(\theta)$ μία τ. μ. με σ. π. π. $f_\chi(x)$ τι είναι:

$$\eta \quad \mathbb{E}_{f_\chi} [e^{j\Omega\chi(\theta)\Omega}];$$

$$\eta \quad \frac{d^n \mathbb{E}_{f_\chi} [e^{j\Omega\chi(\theta)\Omega}]}{d\Omega^n} \Big|_{\Omega=0};$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων: Πείραμα \ Υλοποιήσεις

Πείραμα: Η διαδικασία δημιουργίας Υλοποιήσεων...

Στοχαστικός Μέσος Όρος: $\mu_\chi = \mathbb{E}_{f_\chi}[\chi(\theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\chi(x) dx$

Διασπορά: $\sigma_\chi^2 = \mathbb{E}_{f_\chi}[(\chi(\theta) - \mu_\chi)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_\chi)^2 f_\chi(x) dx$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων: NMA

Ας υποθέσουμε N iid τ.μ. $\chi_k(\theta)$, $k=1,2,\dots,N$

Αριθμητικός Μέσος Όρος N i.i.d. τ.μ. $\chi_k(\theta)$: $m(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_k(\theta)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{f_\chi} [\mu_\chi - m(N)] = 0$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{f_\chi} [(\mu_\chi - m(N))^2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_\chi^2}{N} = 0$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων: Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Αν $\chi_k(\theta)$, $k = 1, 2, \dots, N$ i.i.d. τ. μ. με σ. π. π. $f_\chi(x)$

- με στοχαστική μέση τιμή μ_χ και
- τυπική απόκλιση σ_χ

Δημιουργούμε την τ. μ. : $z(N) = \frac{m(N) - \mu_\chi}{\frac{\sigma_\chi}{\sqrt{N}}}$

με $m(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_k(\theta)$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων: Πείραμα\Υλοποιήσεις

Πείραμα: Η διαδικασία δημιουργίας Υλοποιήσεων

$$\theta_1 \rightarrow \chi(\theta_1)$$

$$\theta_2 \rightarrow \chi(\theta_2)$$

$$\theta_3 \rightarrow \chi(\theta_3)$$

$$\theta_4 \rightarrow \chi(\theta_4)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\theta_N \rightarrow \chi(\theta_N)$$

Πώς μπορούμε να
χρησιμοποιήσουμε
τις υλοποιήσεις μίας
τυχαίας μεταβλητής;

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων: Πείραμα \ Υλοποιήσεις

Πείραμα: Η διαδικασία δημιουργίας Υλοποιήσεων...

Στοχαστικός Μέσος Όρος: $\mu_{\chi} = \mathbb{E}_{f_{\chi}}[\chi(\theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\chi}(x) dx$

Αριθμητικός Μέσος Όρος: $m_{\chi}(N) = \hat{\mu}_{\chi} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(\theta_n)$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων: Πείραμα \ Υλοποιήσεις

Πείραμα: Η διαδικασία δημιουργίας Υλοποιήσεων: NMA

Αριθμητικός Μέσος Όρος: $m_{\chi}(N) = \hat{\mu}_{\chi} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi(\theta_k)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{f_{\chi}} [\mu_{\chi} - m_{\chi}(N)] = 0$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{f_{\chi}} [(\mu_{\chi} - m_{\chi}(N))^2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{\chi}^2}{N} = 0$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων

Στοχαστικός Μέσος Όρος

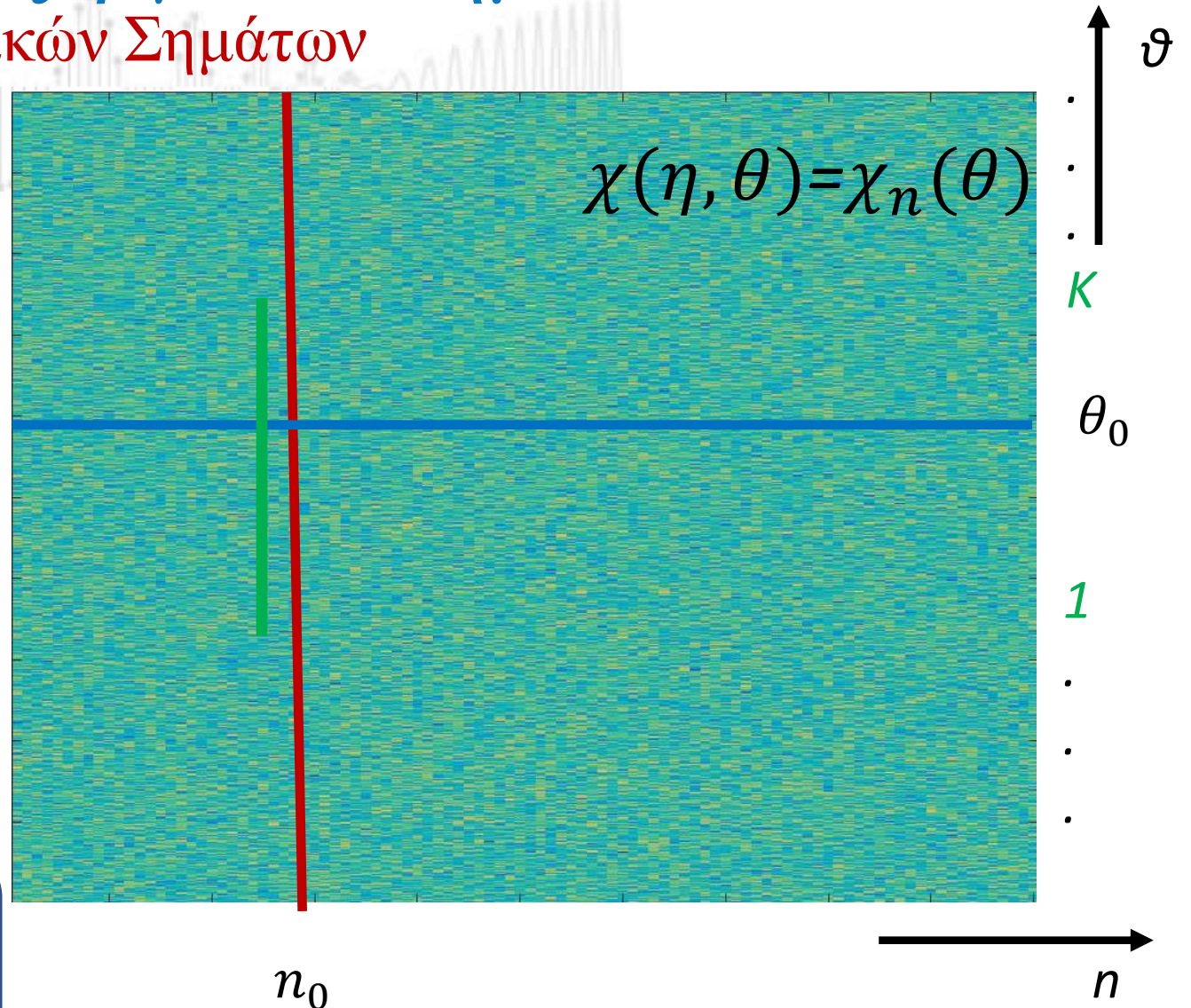
$$\mu_{\chi_{n_0}} = \mathbb{E}_{f_{\chi_{n_0}}} [\chi_{n_0}(\theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\chi_{n_0}}(x) dx$$

Αριθμητικός Μέσος Όρος

$$m_{\chi_{n_0}}(K) = \hat{\mu}_{\chi_{n_0}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_{n_0}(\theta_k)$$

Χρονικός Μέσος Όρος

$$m_{\chi}(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n(\theta_0)$$



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων

Έστω $f_{\chi_{n_0}}(x)$ η σππ της στοχαστικής διαδικασίας $\chi(\eta, \theta) = \chi_n(\theta)$ τη χρονική στιγμή n_0

Αν η $f_{\chi_{n_0}}(x)$ της στοχαστικής διαδικασίας δεν εξαρτάται από τον χρόνο, δηλαδή:

$$f_{\chi_{n_0}}(x) = f_{\chi}(x)$$

η διαδικασία είναι **ισχυρώς στάσιμη** πρώτης τάξης

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων

Στοχαστικός Μέσος Όρος διαδικασίας την χρονική στιγμή n_0

$$\mu_{\chi_{n_0}} = \mathbb{E}_{f_{\chi_{n_0}}} [\chi_{n_0}(\theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\chi_{n_0}}(x) dx$$

Αν ο **Στοχαστικός Μέσος Όρος**, $\mu_{\chi_{n_0}}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\chi(\eta, \theta) = \chi_n(\theta)$ δεν εξαρτάται από τον χρόνο, δηλαδή:

$$\mu_{\chi_{n_0}} = \mu_{\chi}$$

η διαδικασία είναι **ασθενώς στάσιμη πρώτης τάξης**

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων

Έστω $f_{\chi_{n_0}\chi_{n_1}}(x_1, x_2; n_0, n_1)$ η από κοινού σππ της στοχαστικής διαδικασίας $\chi(\eta, \theta) = \chi_n(\theta)$ τις χρονικές στιγμές n_0, n_1 .

Αν η $f_{\chi_{n_0}\chi_{n_1}}(x_1, x_2; n_0, n_1)$ δεν εξαρτάται από τις απόλυτες χρονικές στιγμές αλλά μόνο από την διαφορά τους, δηλαδή:

$$f_{\chi_{n_0}\chi_{n_1}}(x_1, x_2; n_0, n_1) = f_{\chi_1\chi_2}(x_1, x_2; n_1 - n_0)$$

η διαδικασία είναι **ισχυρώς στάσιμη** δεύτερης τάξης

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων

Έστω $r_{\chi_{n_0}\chi_{n_1}}(n_0, n_1)$ η ακολουθία ετεροσυσχέτισης των τ.μ. $\chi_{n_0}(\theta)$, $\chi_{n_1}(\theta)$ της στοχαστικής διαδικασίας $\chi(\eta, \theta) = \chi_n(\theta)$ τις χρονικές στιγμές n_0, n_1 .

Αν η $r_{\chi_{n_0}\chi_{n_1}}(n_0, n_1)$ δεν εξαρτάται από τις απόλυτες χρονικές στιγμές αλλά μόνο από την διαφορά τους, δηλαδή:

$$r_{\chi_{n_0}\chi_{n_1}}(n_0, n_1) = r_{\chi_{n_0}\chi_{n_1}}(n_1 - n_0)$$

η διαδικασία είναι **ασθενώς στάσιμη δεύτερης τάξης**.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων

Χρονικός Μέσος Όρος Στοχαστικής διαδικασίας βασιζόμενος σε N δείγματα της υλοποίησης θ_0

$$m_{\chi}(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n(\theta_0)$$

Αν ο Χρονικός Μέσος Όρος $m_{\chi}(N)$ της στοχαστικής διαδικασίας $\chi(\eta, \theta) = x_n(\theta)$ αποτελεί εκτίμηση του Στοχαστικού Μέσου Όρου, δηλαδή:

$$m_{\chi}(N) = \hat{\mu}_{\chi_{n_0}}$$

η διαδικασία είναι εργοδική πρώτης τάξης.

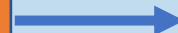
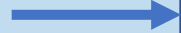
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Κλασσική Επεξεργασία Σημάτων

Σήμα Εισόδου

Σήμα Εξόδου

x_n



y_n

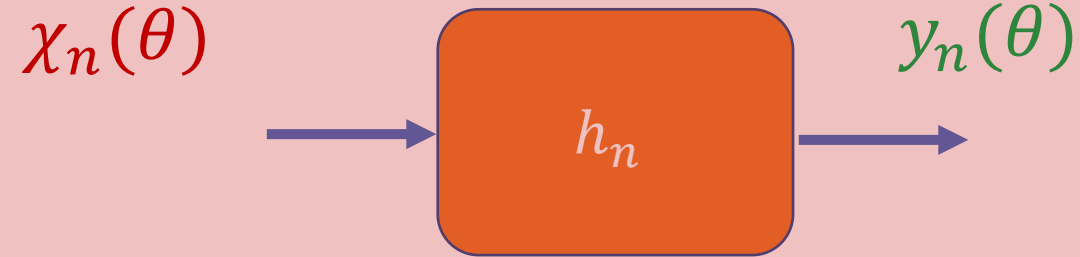
$$\textcolor{red}{X}(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) = \textcolor{green}{Y}(e^{j\omega})$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων

Στοχαστική Διαδικασία Εισόδου

Στοχαστική Διαδικασία Εξόδου



$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2 = \Phi_{yy}(e^{j\omega})$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Σήμα Εισόδου

Σήμα Εξόδου

x_n

y_n



$$X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})$$

Παρατηρήσεις

Στοχαστική Διαδικασία Εξόδου

$x_n(\theta)$

$y_n(\theta)$



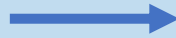
$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2 = \Phi_{yy}(e^{j\omega})$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

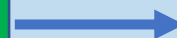
Τα ΓΧΑ Συστήματα σαν **Μοντέλα Γένεσης** ΑΣ 2-ης τάξης Στοχαστικών Διαδικασιών

Παρατηρήσεις

$x_n(\theta)$



h_n



$y_n(\theta)$

Στοχαστική Διαδικασία Εξόδου

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2 = \Phi_{yy}(e^{j\omega})$$

Λευκός Θόρυβος

$w_n(\theta)$



h_n



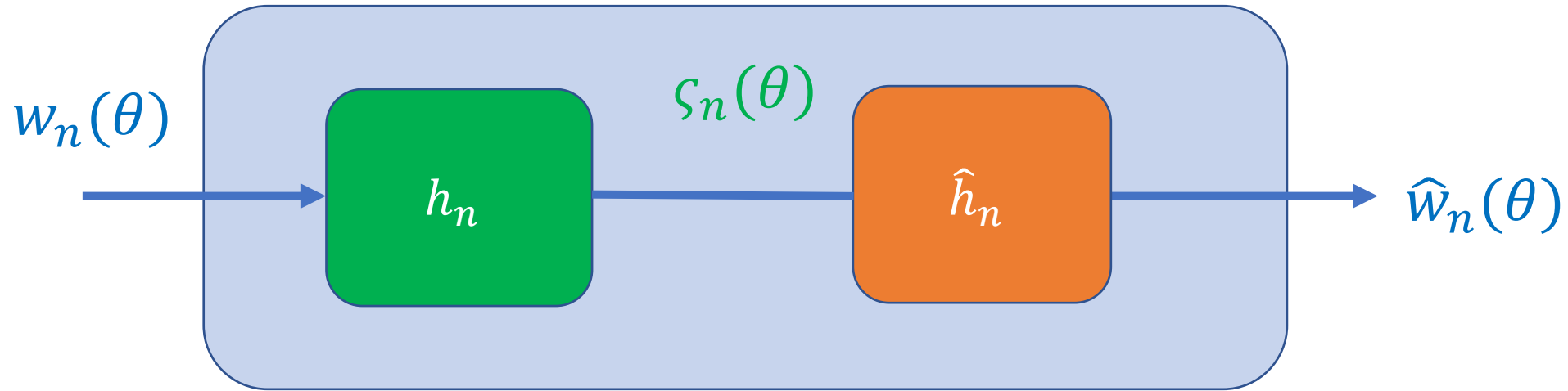
$y_n(\theta)$

Στοχαστική Διαδικασία Εξόδου

$$\sigma_w^2 |H(e^{j\omega})|^2 = \Phi_{yy}(e^{j\omega})$$

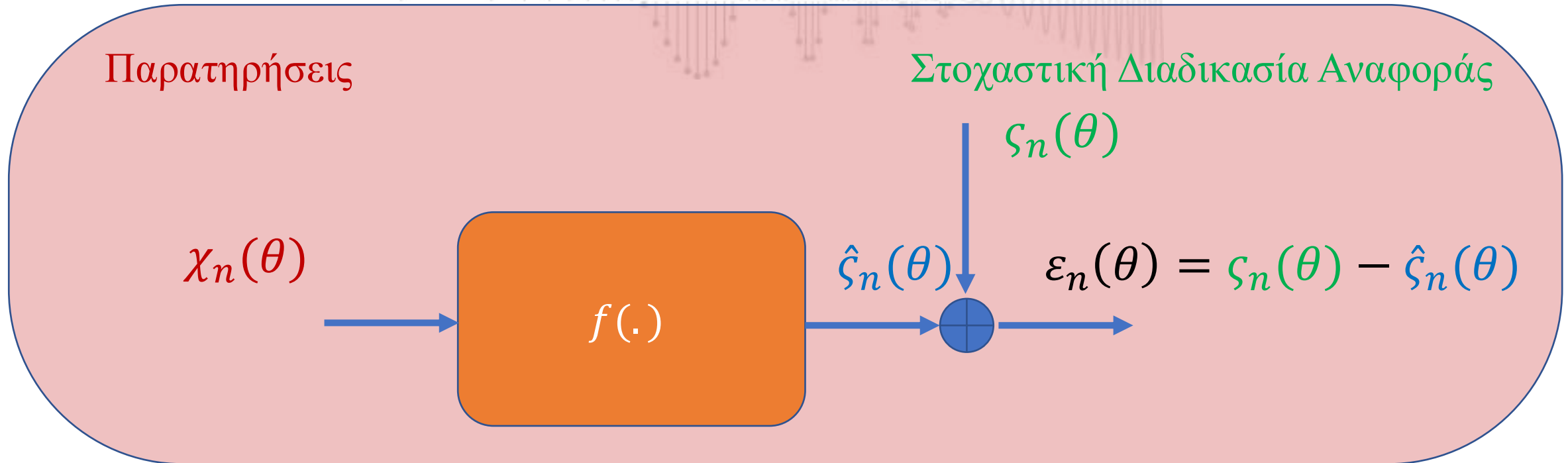
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων: Whitening



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων: Βέλτιστο Φίλτρο

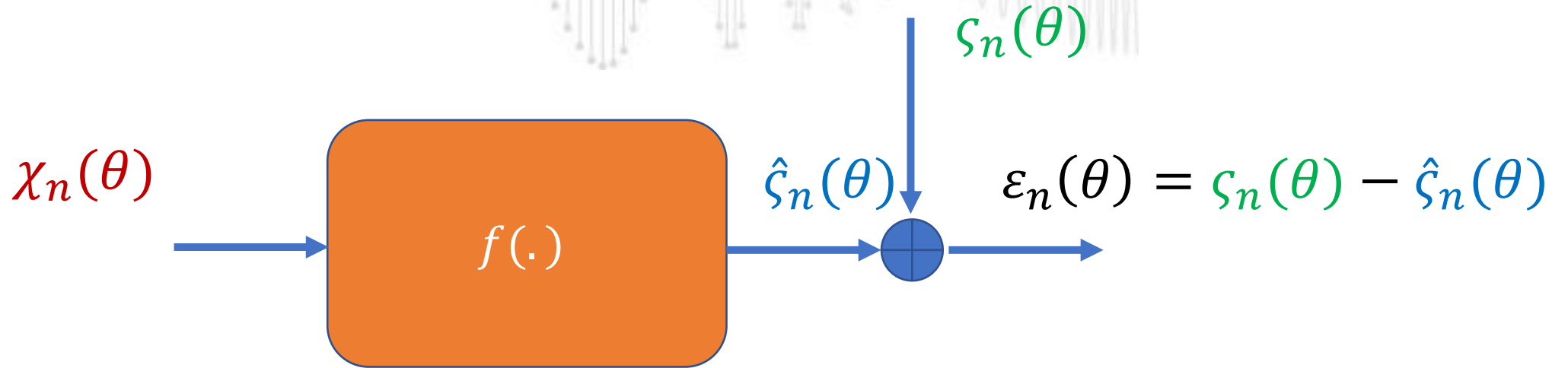


Συνάρτηση κόστους: $\mathbb{E}[\varepsilon_n(\theta)^2]$

$$\mathbb{E}[\varepsilon_n(\theta)^2] = \mathbb{E}[(\varsigma_n(\theta) - \hat{\varsigma}_n(\theta))^2] = \mathbb{E}[(\varsigma_n(\theta) - f(x_n(\theta)))^2]$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων: Βέλτιστο Φίλτρο

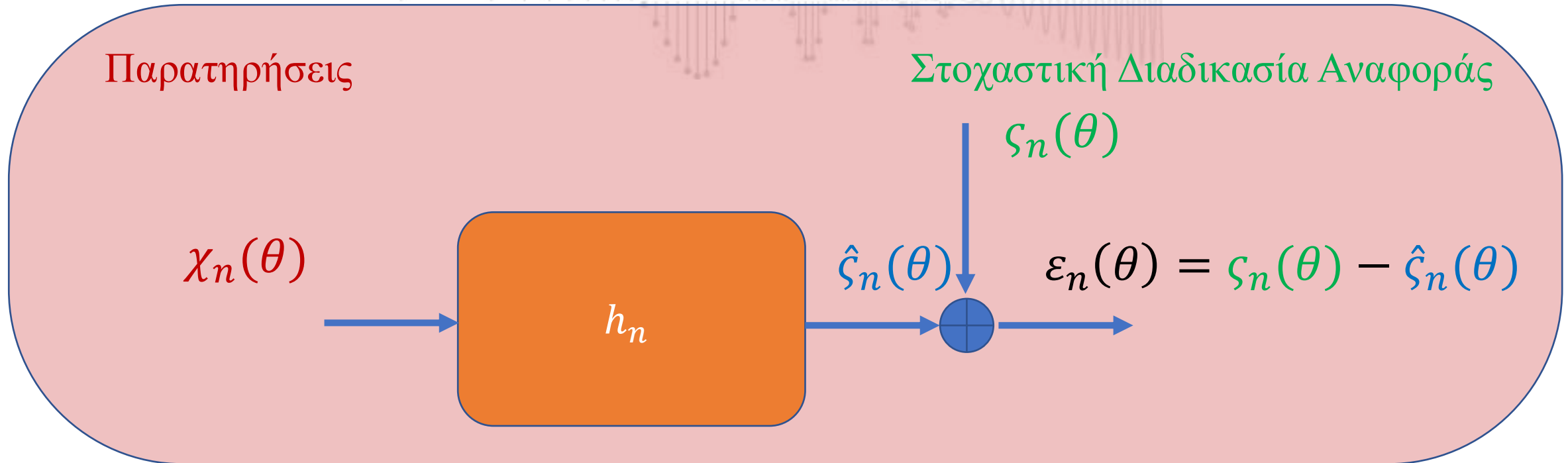


Συνάρτηση κόστους: $\mathbb{E}[\varepsilon_n(\theta)^2]$ και ελαχιστοποίησή της:

$$\min_f \mathbb{E}[(\zeta_n(\theta) - f(x_n(\theta)))^2]$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων: Φίλτρο Wiener

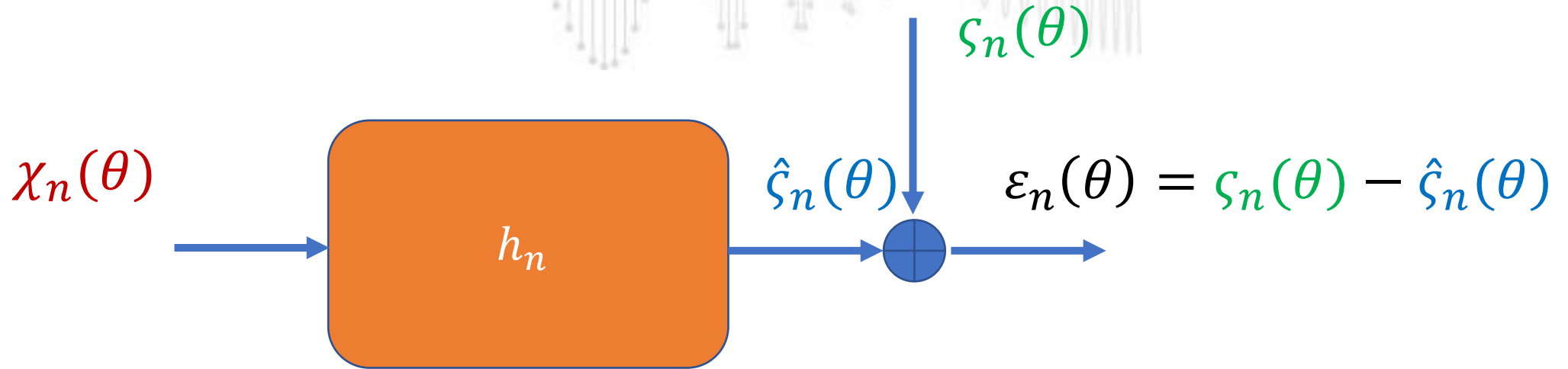


Συνάρτηση κόστους: $\mathbb{E}[\varepsilon_n(\theta)^2]$

$$\mathbb{E}[\varepsilon_n(\theta)^2] = \mathbb{E}[(\varsigma_n(\theta) - \hat{\varsigma}_n(\theta))^2] = \mathbb{E}[(\varsigma_n(\theta) - h_n * x_n(\theta))^2]$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων: Φίλτρο Wiener-WH

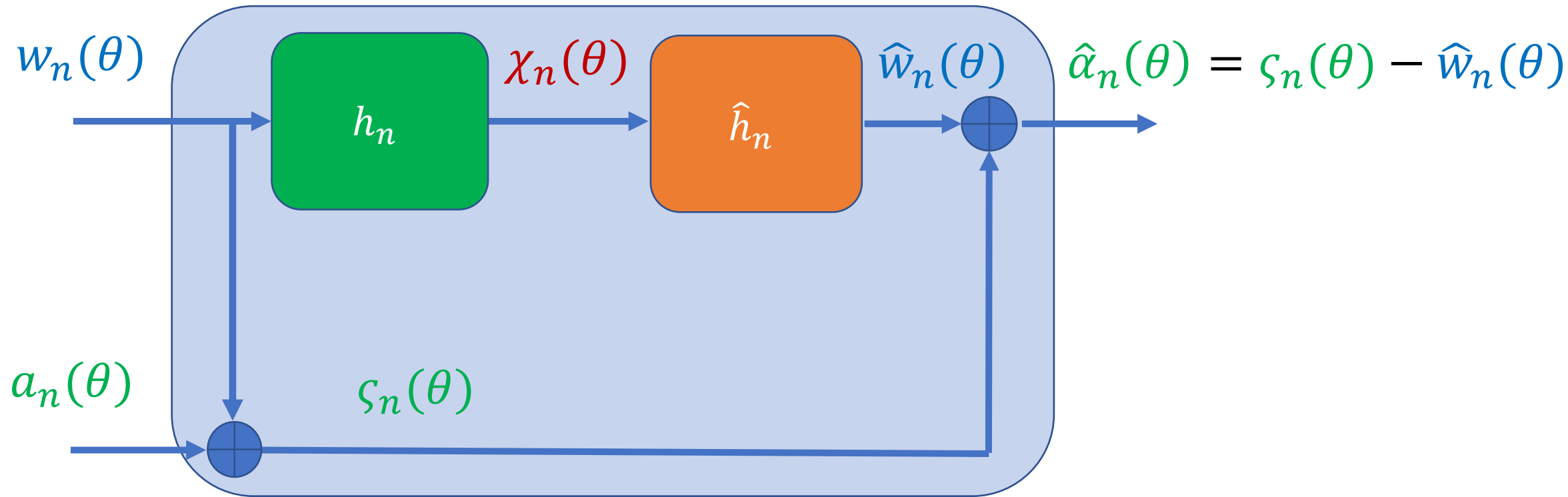


Συνάρτηση κόστους: $\mathbb{E}[\varepsilon_n(\theta)^2]$ και ελαχιστοποίησή της:

$$\min_{h_n} \mathbb{E}[(\xi_n(\theta) - h_n * x_n(\theta))^2]$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

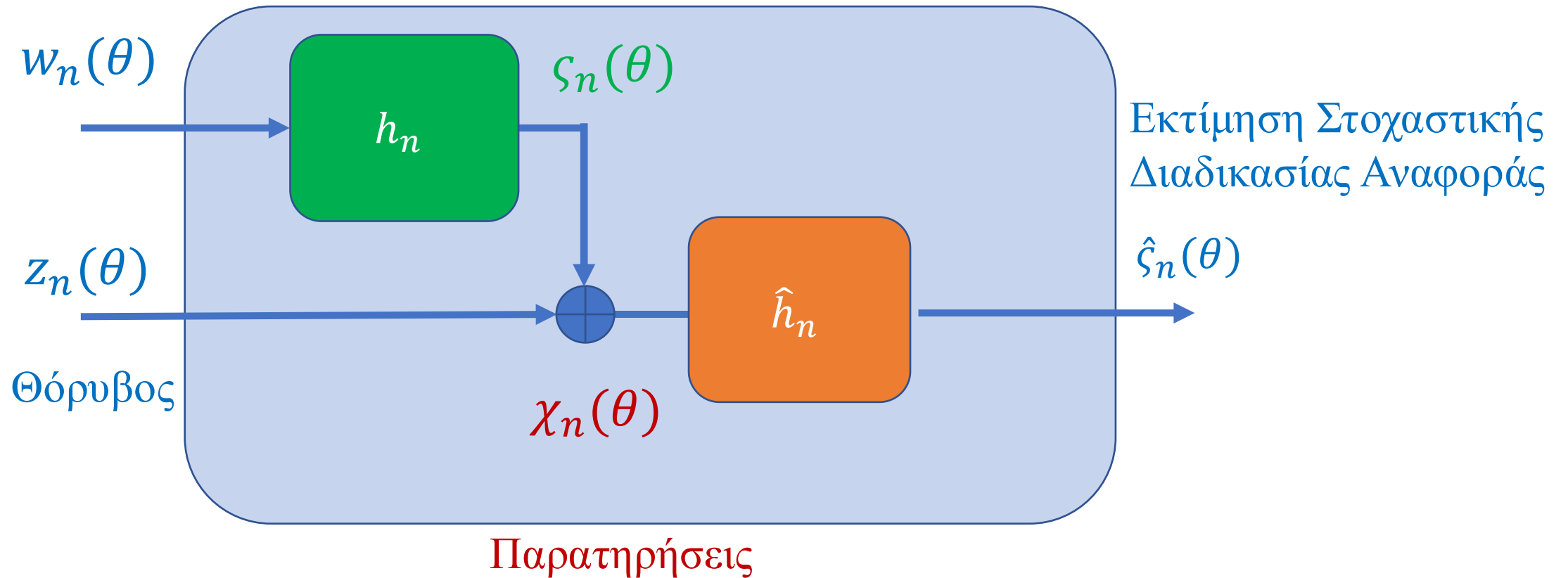
Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων: Φίλτρο Wiener



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

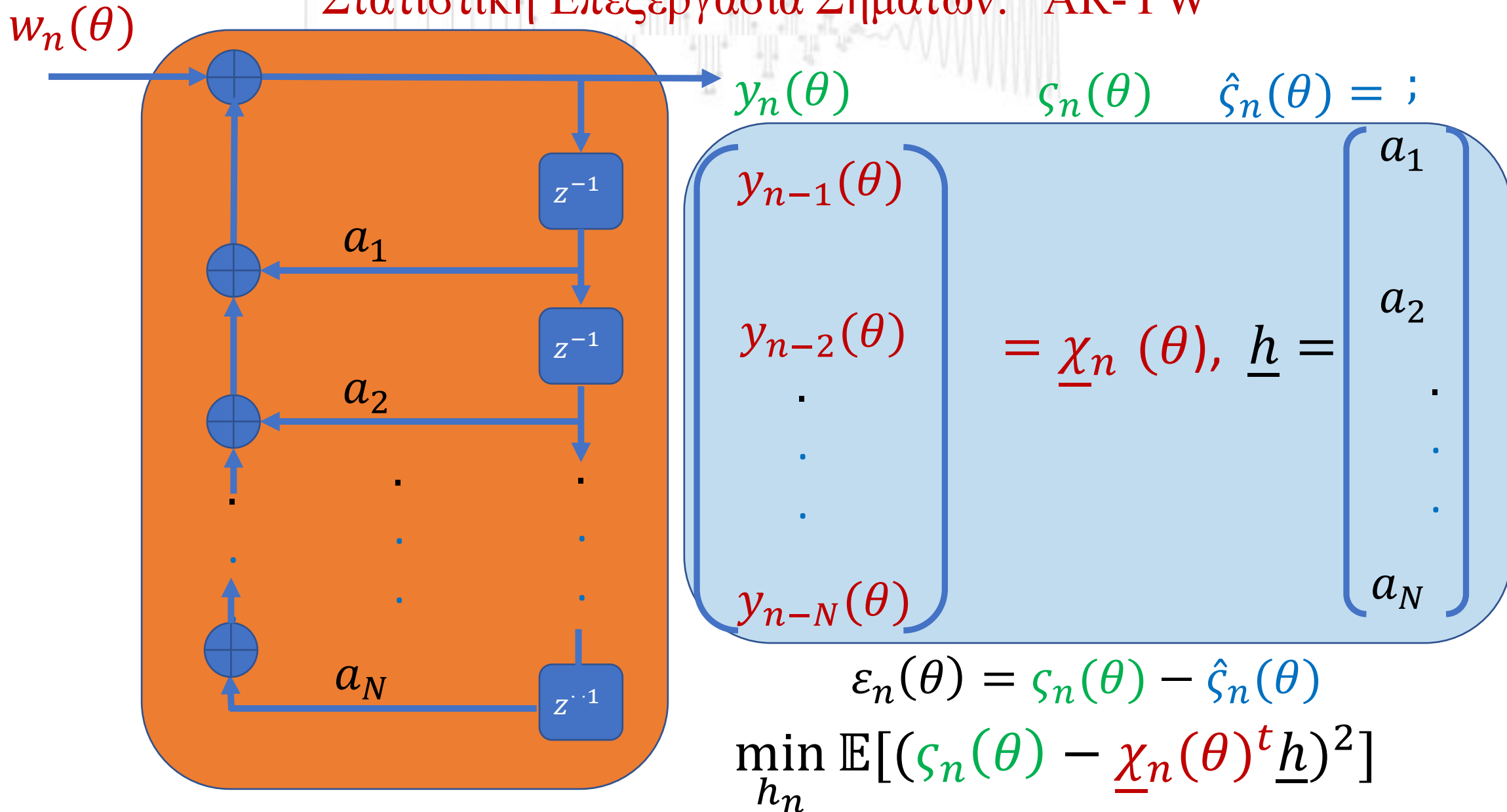
Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων: Demo

Στοχαστική Διαδικασία Αναφοράς



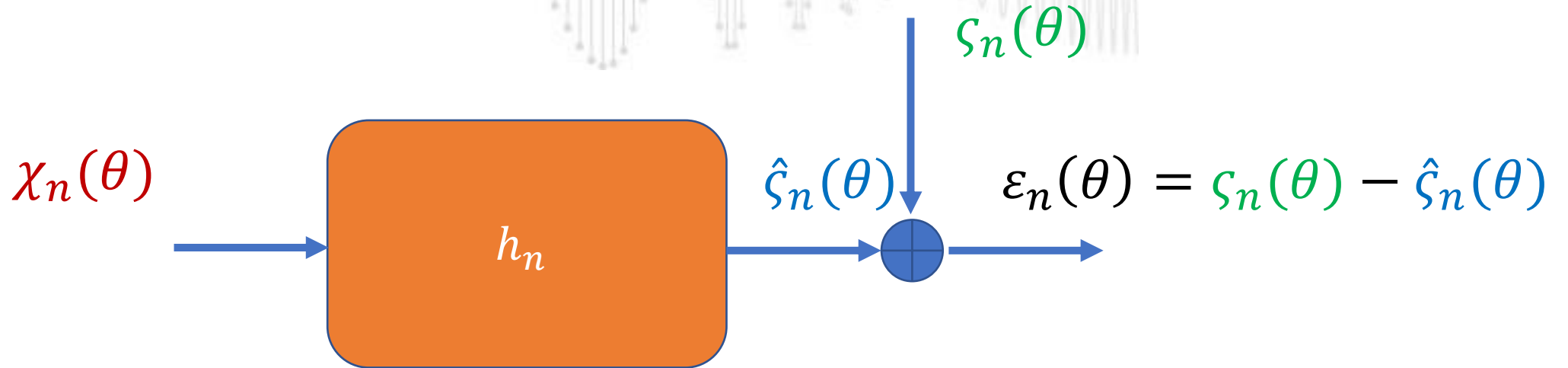
Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων: AR-YW



Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων: Φίλτρο Wiener



Συνάρτηση κόστους: $\mathbb{E}[\varepsilon_n(\theta)^2]$ και ελαχιστοποίησή της:

$$\min_{h_n} \mathbb{E}[(\xi_n(\theta) - h_n * x_n(\theta))^2]$$

Πως θα λύσουμε το πρόβλημα της απληστίας του Φίλτρου Wiener;