



# ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ

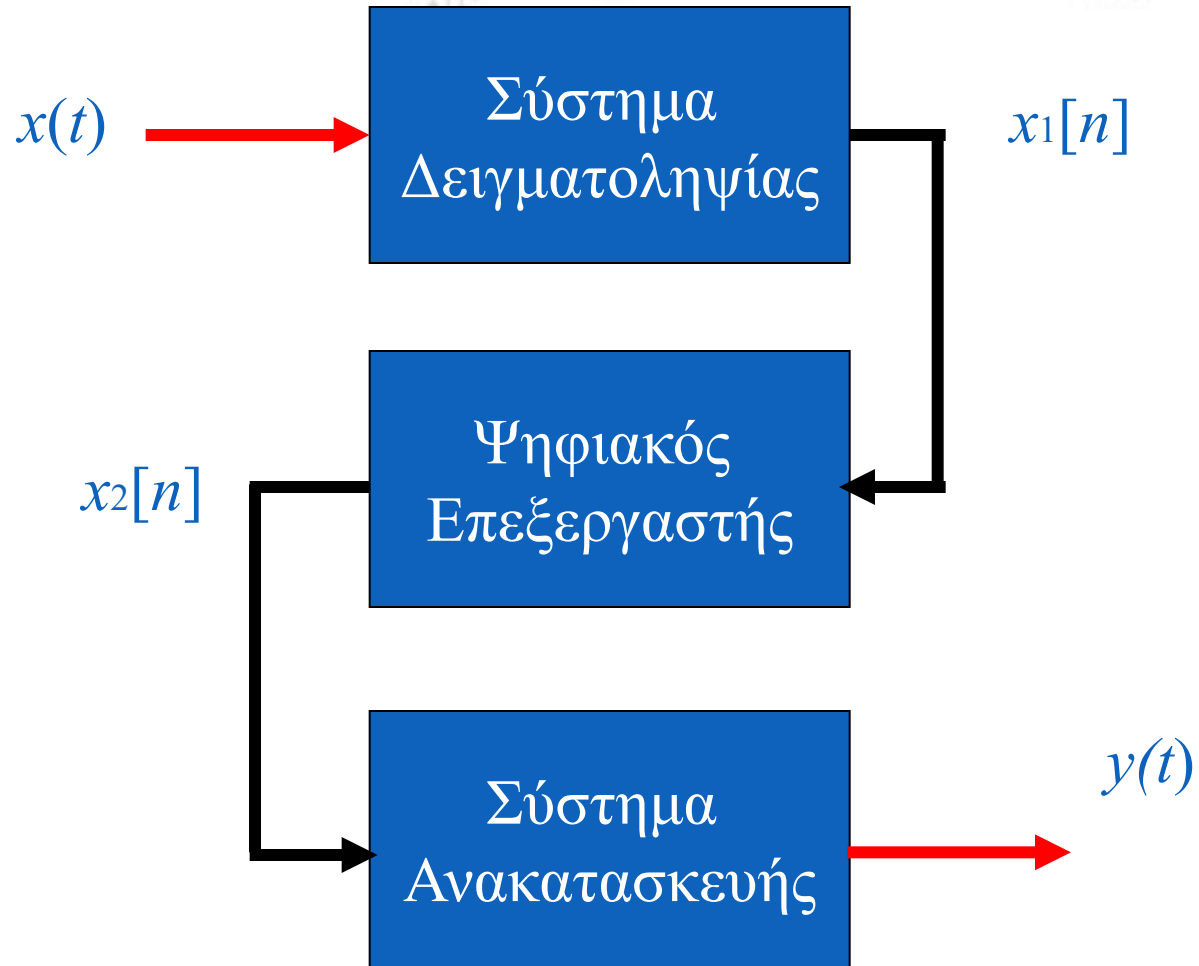
Δειγματοληψία

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης

Πολυτεχνική Σχολή

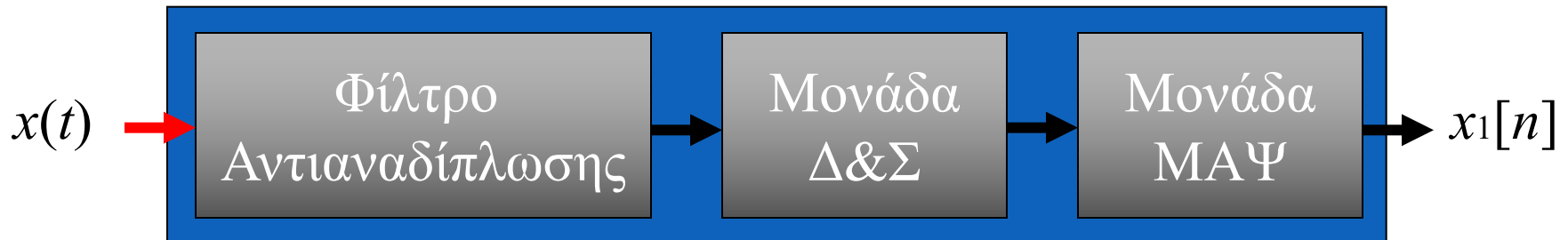
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

# Σύστημα Επεξεργασίας Σημάτων



# Σύστημα Επεξεργασίας Σημάτων

Σύστημα Δειγματοληψίας:



Δειγματοληψία: Ερωτήματα που θα πρέπει να απαντηθούν:

- Ποια είναι η Σχέση Μετασχηματισμού Fourier Αναλογικού & Ψηφιακού Σήματος;
- Κάτω από ποιες προϋποθέσεις ένα σήμα συνεχούς χρόνου μπορεί να ανακατασκευασθεί από τα δείγματά του (Θεώρημα Δειγματοληψίας);
- Τι τρόπο ανακατασκευής προτείνει το Θεώρημα Δειγματοληψίας;

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Harry Nyquist - Claude Shannon

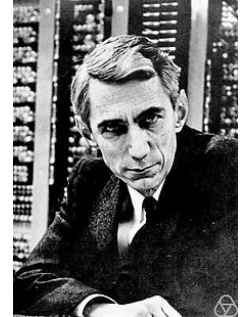
*Δειγματοληψία:*

$x(t)$  : Σήμα Συνεχούς Χρόνου

$x[n]$ : Σήμα Διακριτού Χρόνου

$T_s$  : Περίοδος Δειγματοληψίας

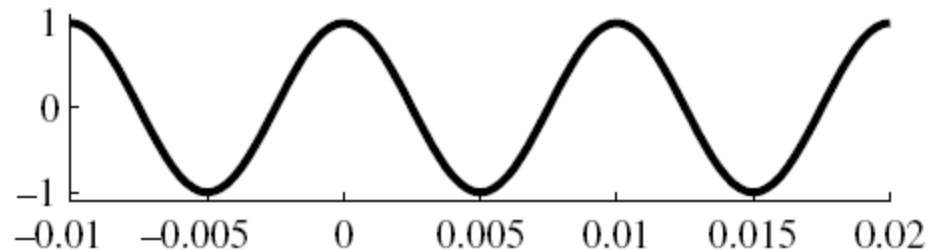
$f_s = \frac{1}{T_s}$  : Συχνότητα Δειγματοληψίας



$$x[n] = x(t) \Big|_{t=nT_s} = x(nT_s)$$

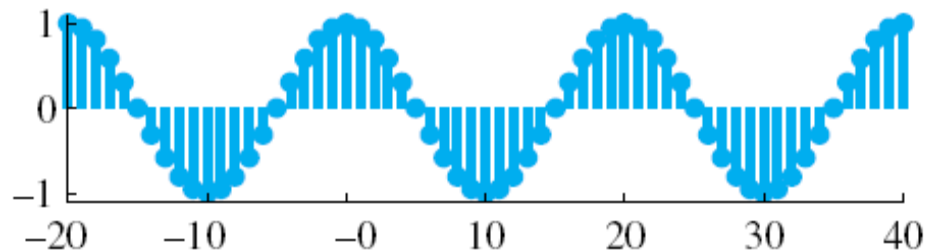
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Σήμα Συνεχούς Χρόνου  $x(t)=\cos(2\pi 100t)$



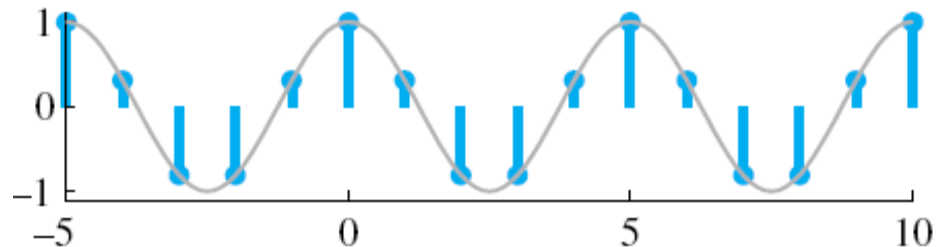
Σήμα Διακριτού Χρόνου:  $x[n]=\cos(2\pi 100nT_s)$

$T_s=0.5 \text{ msec}$



Σήμα Διακριτού Χρόνου:  $x[n]=\cos(2\pi 100nT_s)$

$T_s=2 \text{ msec}$

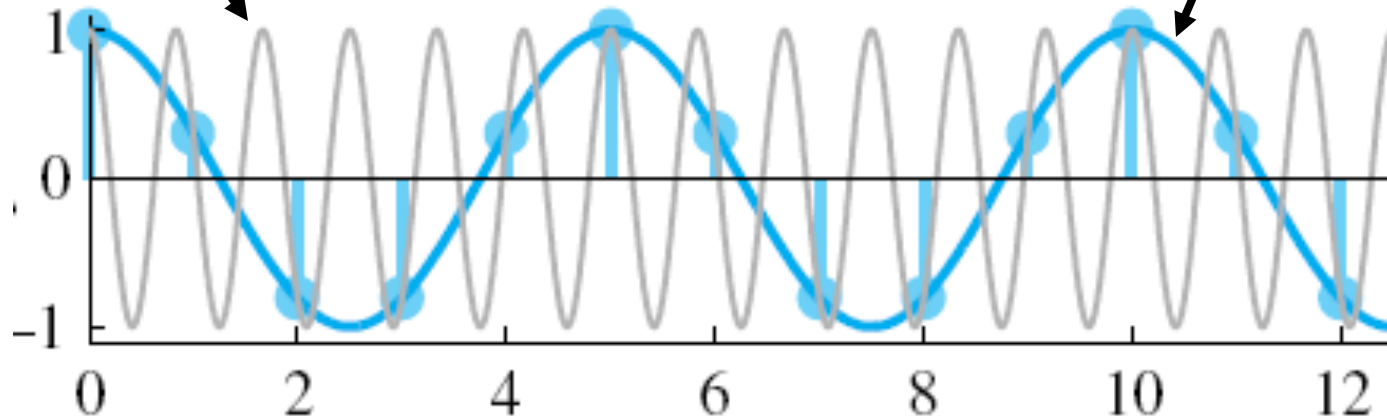


# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων



$f_1=2.4 \text{ Hz}$

$f_2=0.4 \text{ Hz}$



$T_s=1 \text{ sec}$

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων



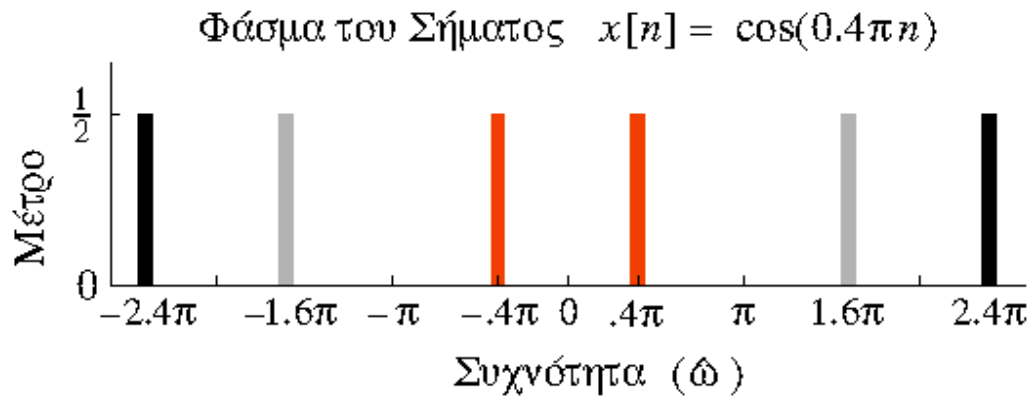
*Ψευδώνυμα Συχνοτήτων:*  $\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_0 + 2\pi\ell, 2\pi\ell - \hat{\omega}_0, \quad (\ell = \text{ακέραιος})$

$$\begin{aligned} A \cos(\hat{\omega}_0 n + \phi) &= A \cos((\hat{\omega}_0 + 2\pi\ell)n + \phi) \\ &= A \cos((2\pi\ell - \hat{\omega}_0)n - \phi) \end{aligned}$$

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων



## Φάσμα Σήματος Διακριτού Χρόνου





# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων



$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

$$x[n] = x(nT_s) = A \cos(2\pi f_0 nT_s + \phi)$$

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων



$$y(t) = A \cos(2\pi(f_0 + \ell f_s)t + \phi)$$

$$\begin{aligned} y[n] &= y(nT_s) = A \cos(2\pi(f_0 + \ell f_s)nT_s + \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 nT_s + 2\pi \ell n f_s T_s + \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 nT_s + 2\pi \ell n + \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 nT_s + \phi) \\ &= x[n] \end{aligned}$$

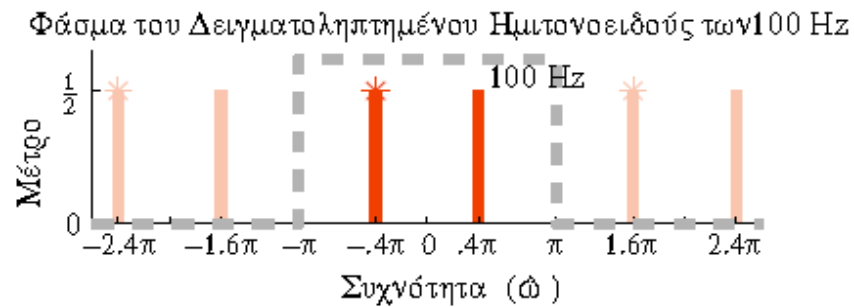
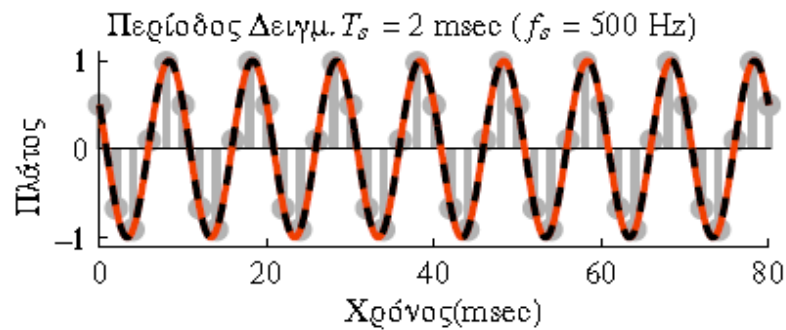
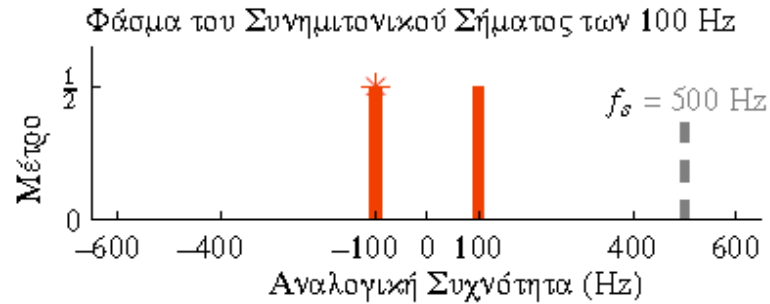
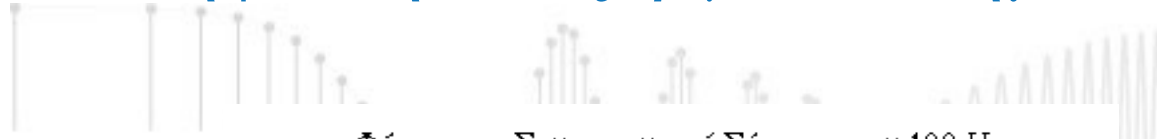
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων



$$w(t) = A \cos(2\pi(-f_0 + \ell f_s)t - \phi)$$

$$\begin{aligned} w[n] &= w(nT_s) = A \cos(2\pi(-f_0 + \ell f_s)nT_s - \phi) \\ &= A \cos(-2\pi f_0 nT_s + 2\pi \ell n f_s T_s - \phi) \\ &= A \cos(-2\pi f_0 nT_s + 2\pi n \ell - \phi) \\ &= A \cos(2\pi f_0 nT_s + \phi) \\ &= x[n] \end{aligned}$$

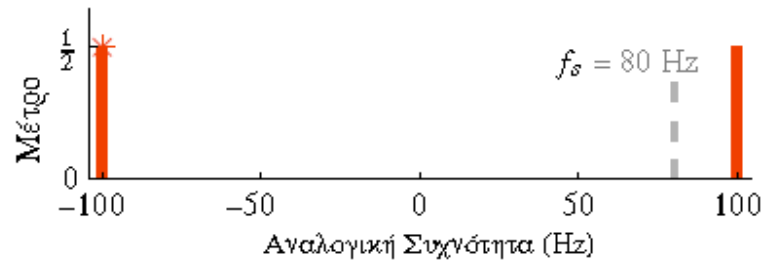
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων



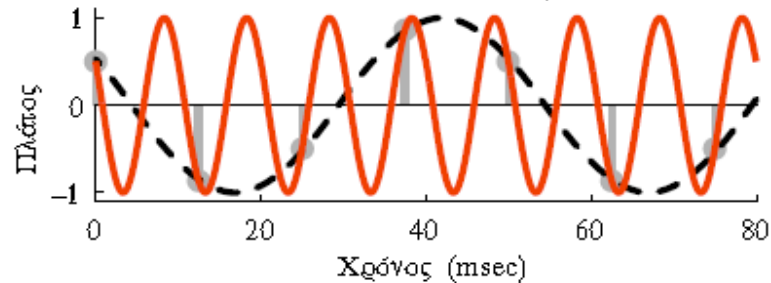
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων



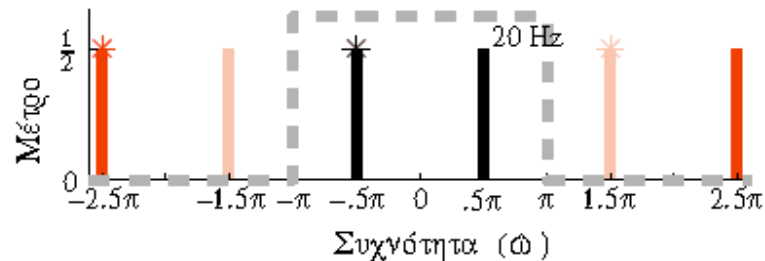
Φάσμα του συνμητητονικού Σήματος των 100 Hz



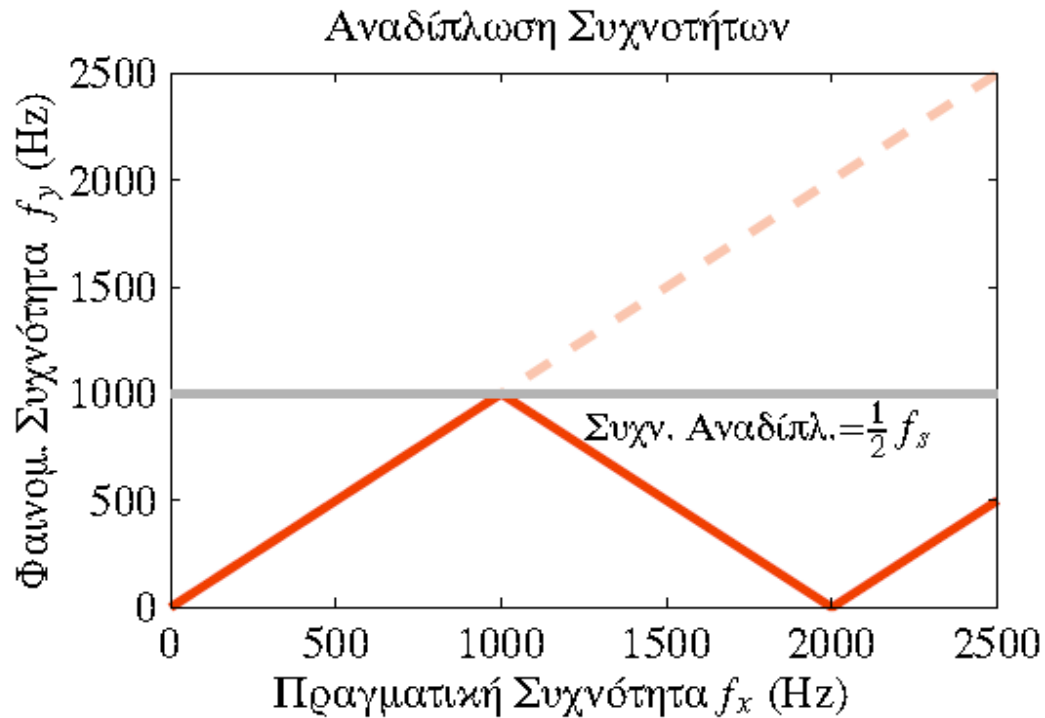
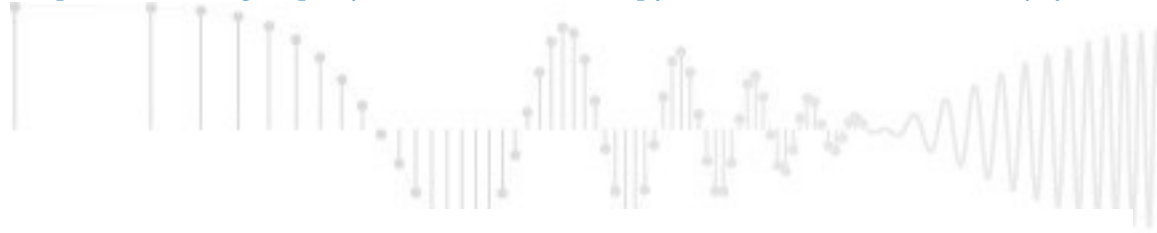
Περίοδος Δειγμ.  $T_s = 12.5 \text{ msec}$  ( $f_s = 80 \text{ Hz}$ )



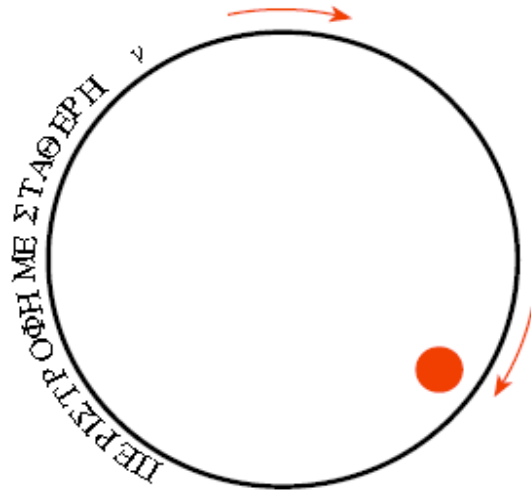
Φάσμα του Δειγματοληπτημένου Ημιτονοειδούς των 100 Hz



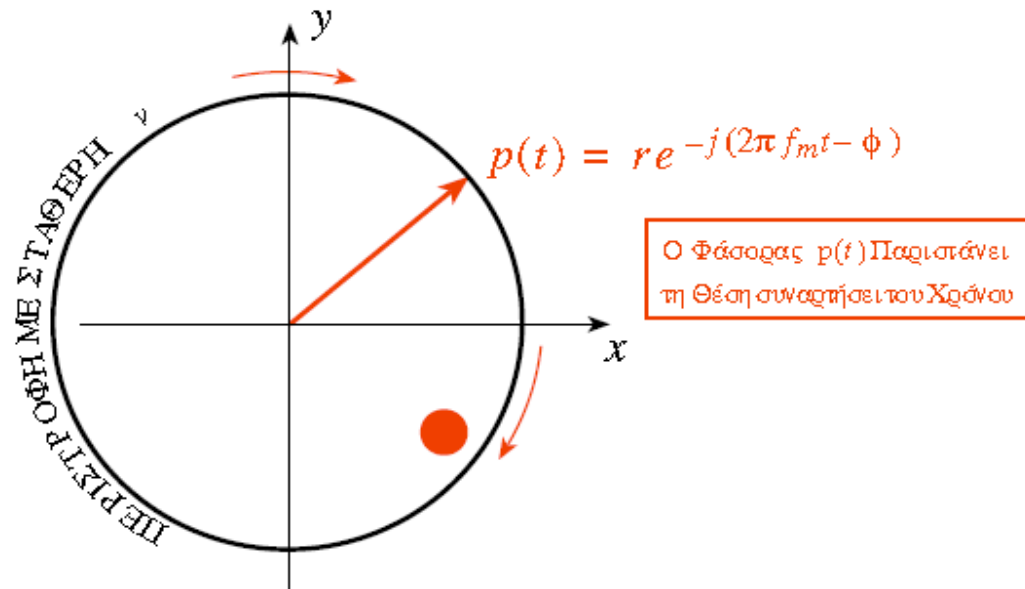
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Δειγματοληψία



# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων



# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

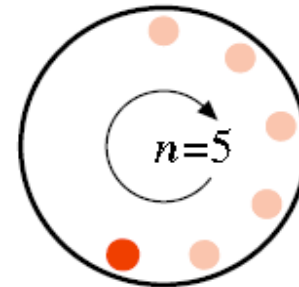
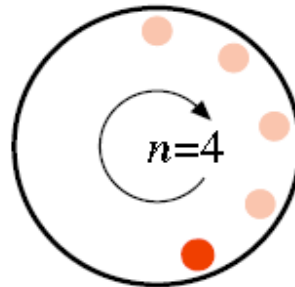
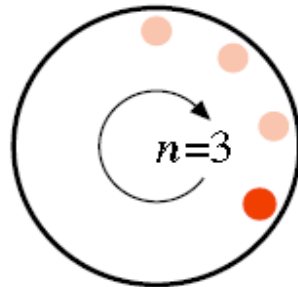
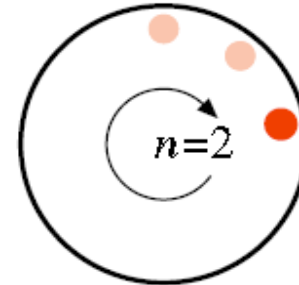
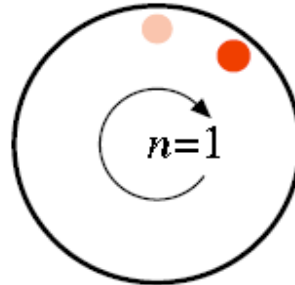
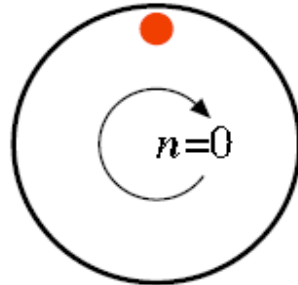


$$p(t) = r e^{-j(2\pi f_m t - \phi)}$$

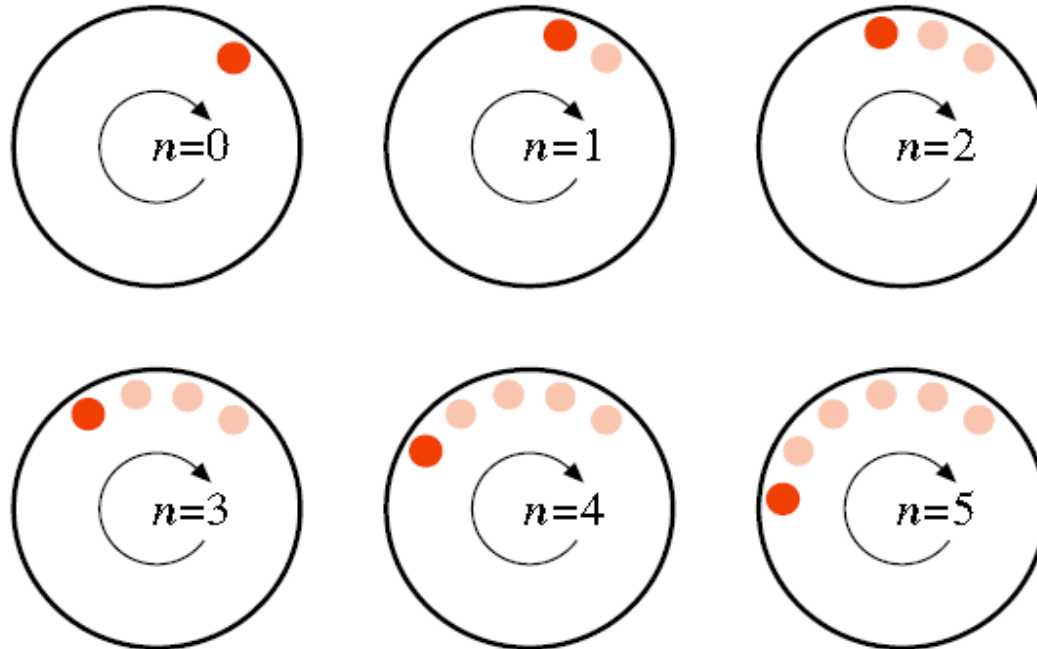
$$p[n] = r e^{-j(2\pi (f_m / f_s) n - \phi)}$$



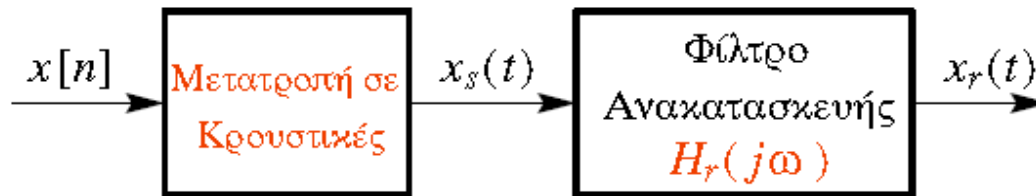
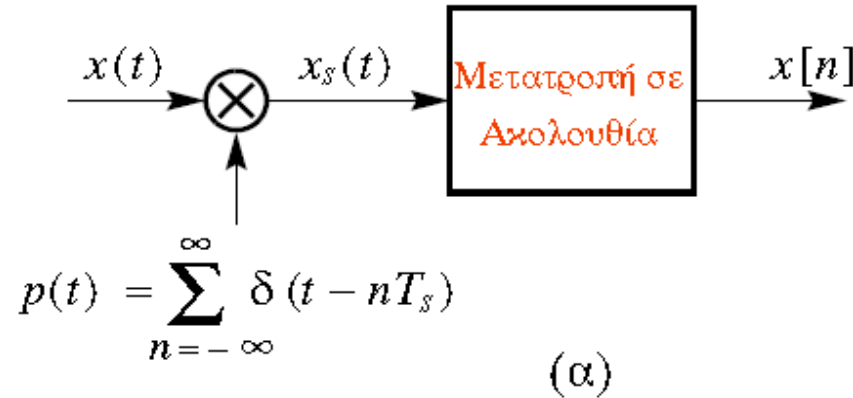
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων



# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων



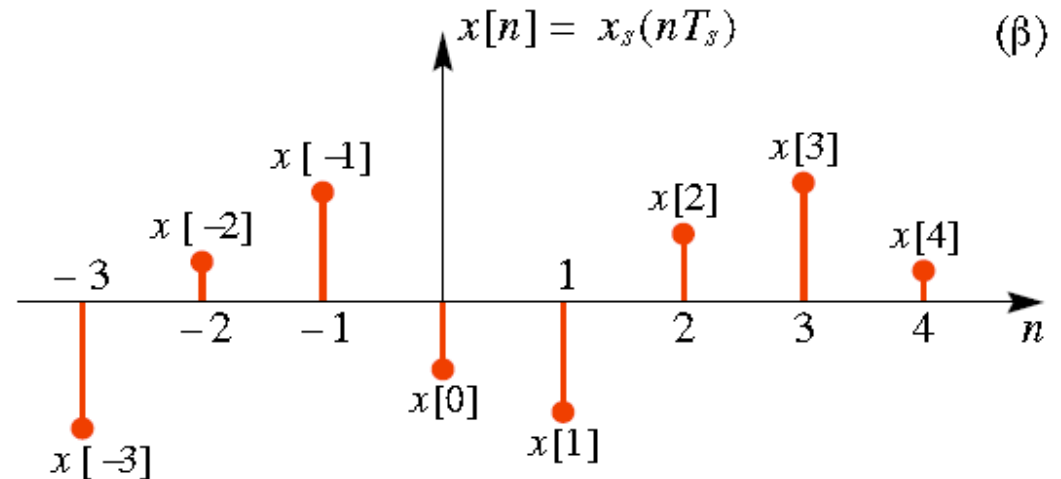
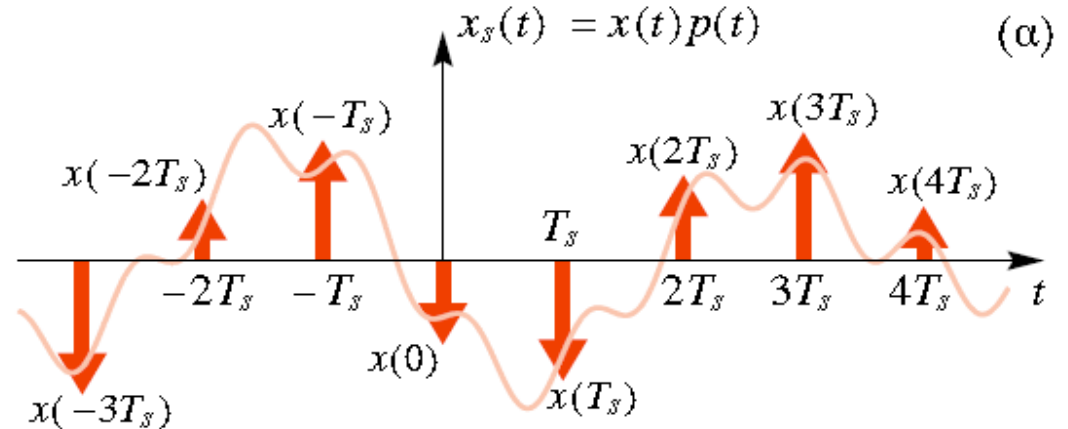
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Δειγματοληψία



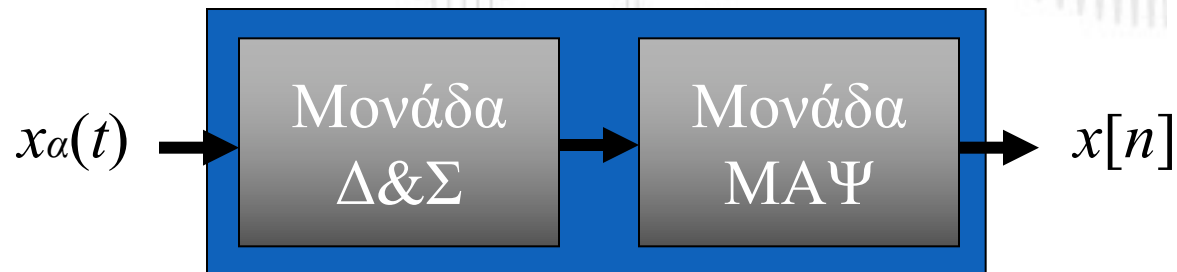
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Δειγματοληψία



$$\begin{aligned}x_s(t) &= x(t)p(t) \\ &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)\end{aligned}$$



# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Δειγματοληψία

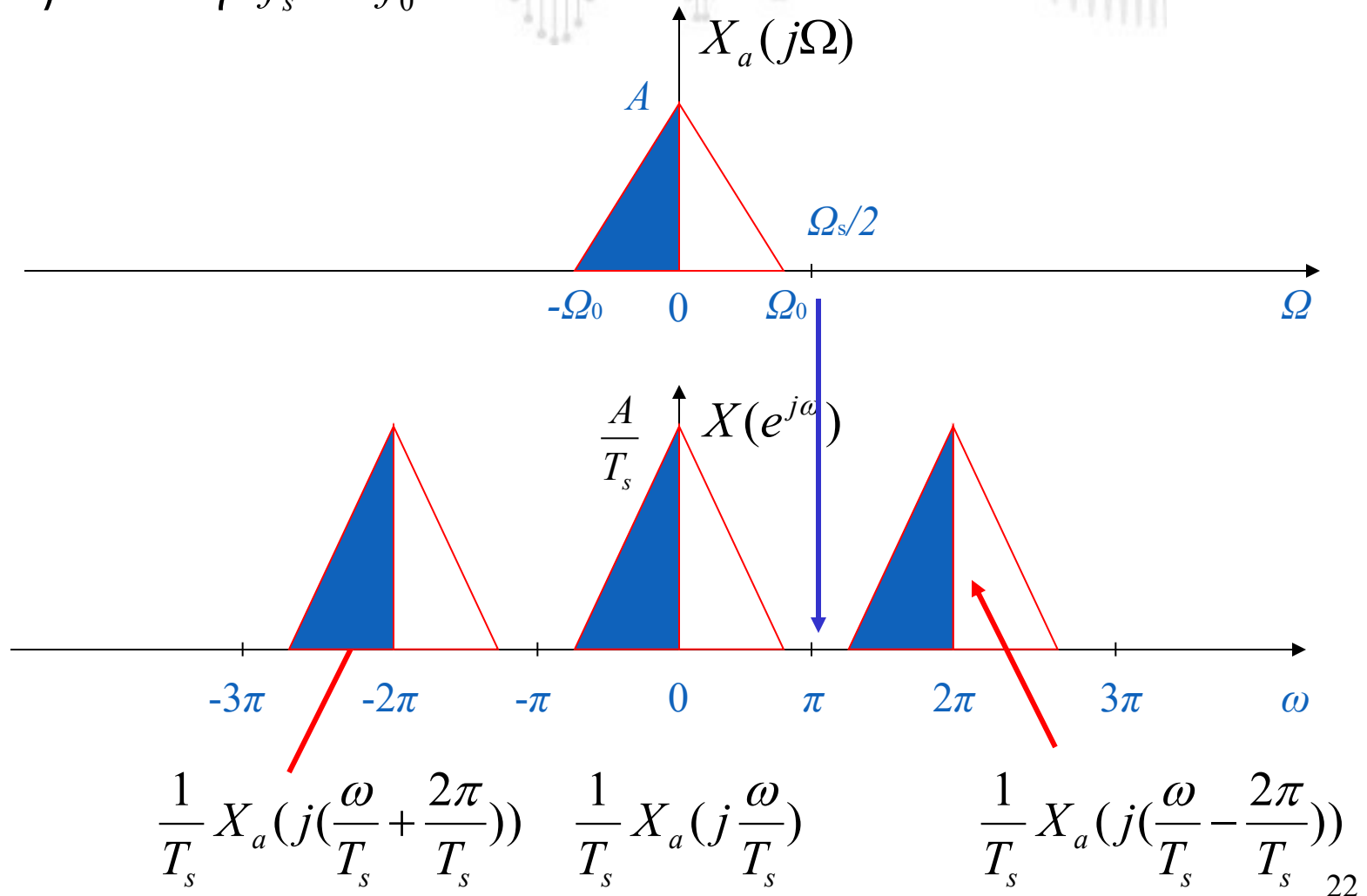


Σχέση ΔΧΜΦ και ΣΧΜΦ:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\left(\frac{\omega}{T_s} - \frac{2k\pi}{T_s}\right)\right)$$

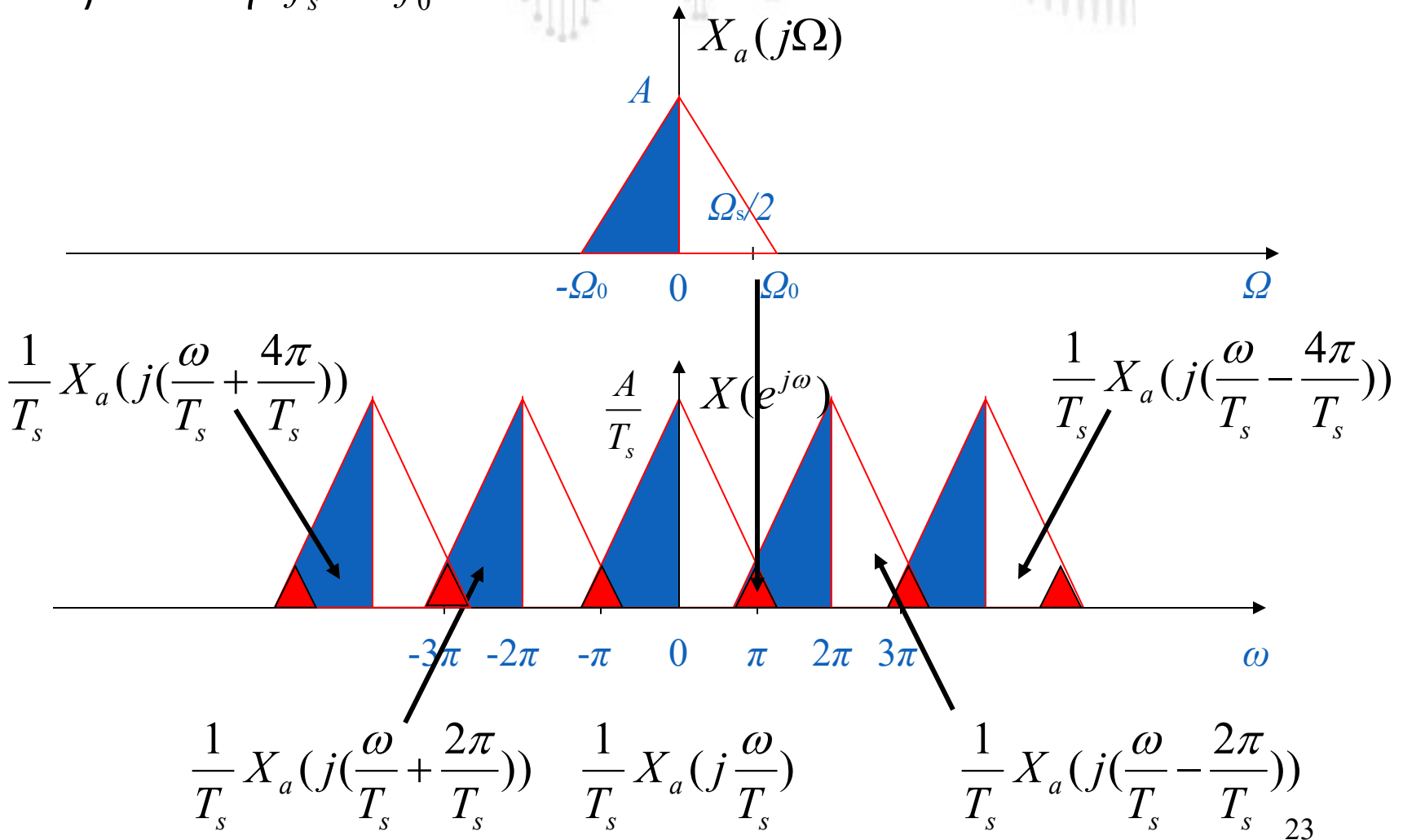
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Δειγματοληψία

Περίπτωση:  $f_s \geq 2f_0$

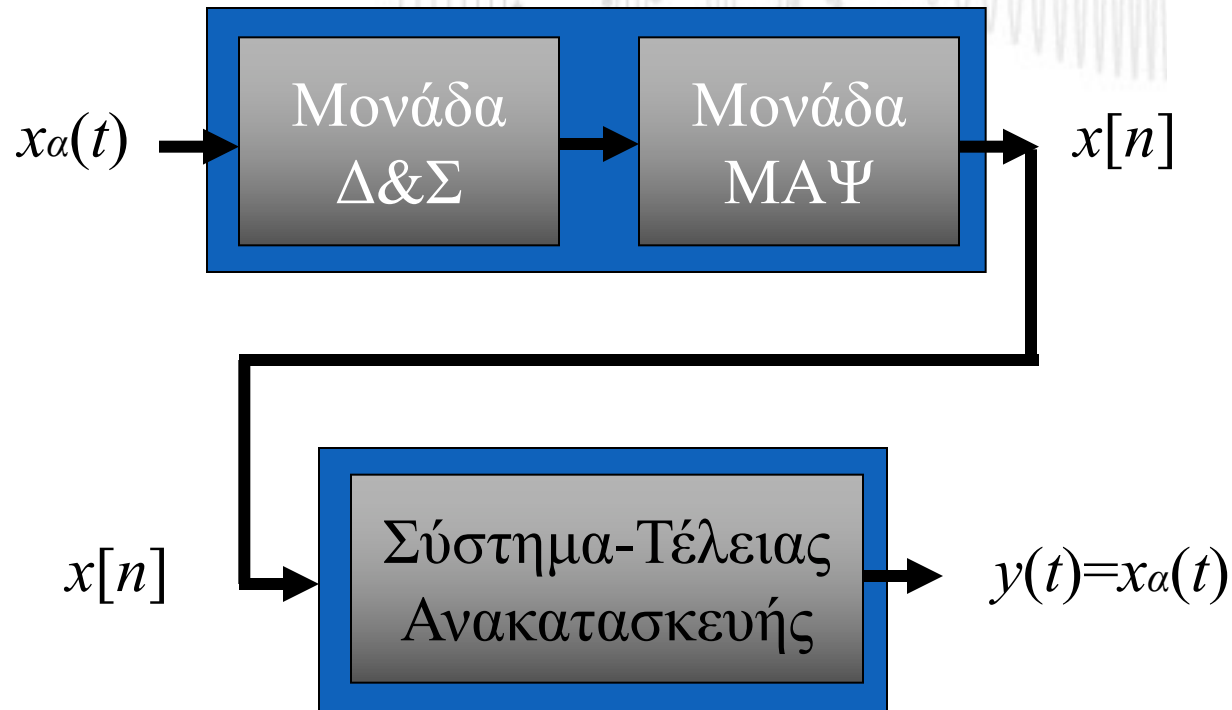


# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Δειγματοληψία

Περίπτωση:  $f_s < 2f_0$



# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

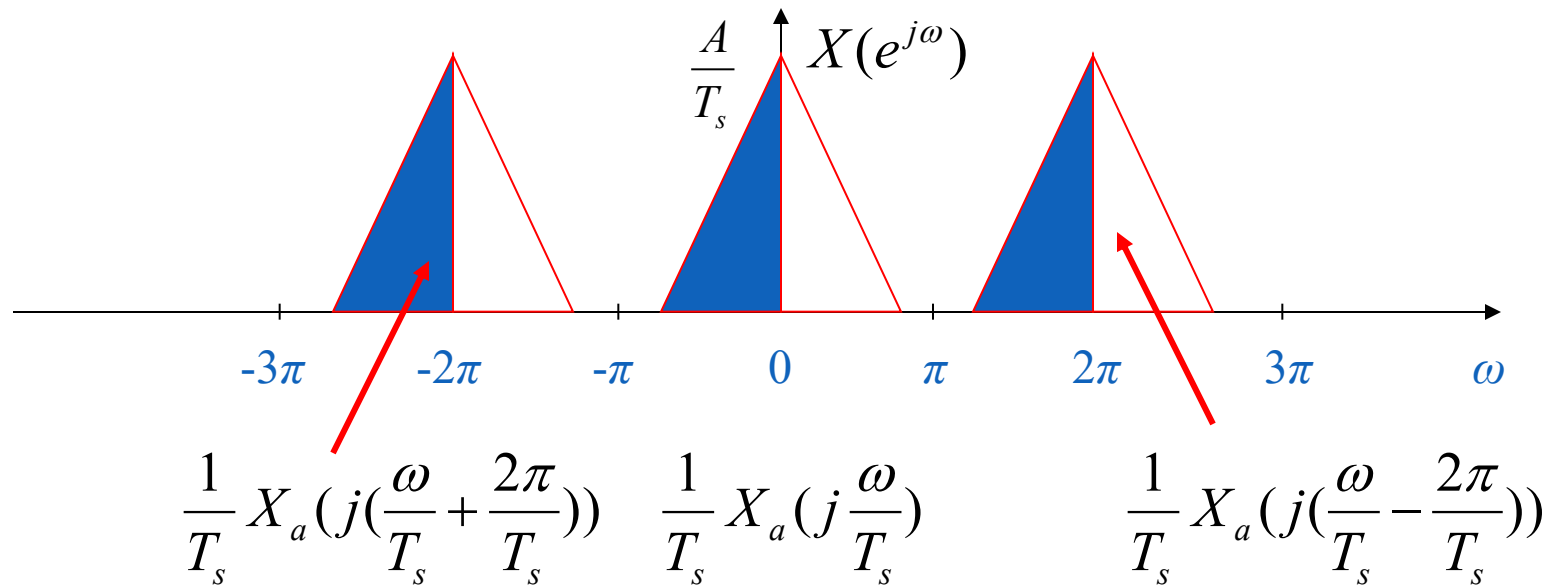


*Βασική Προϋπόθεση:  $f_s \geq 2f_0$*



# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

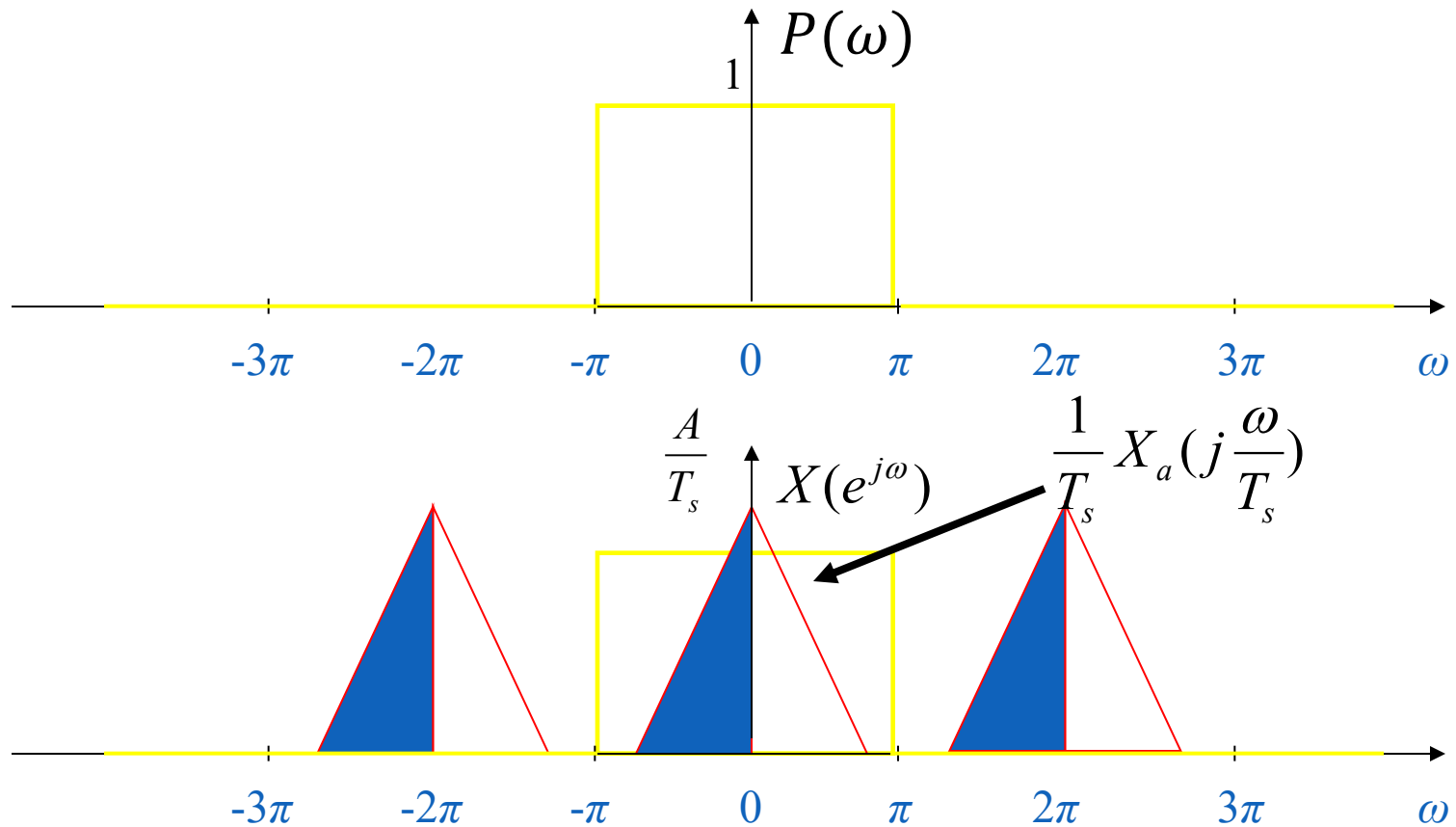
Για την περίπτωση που  $f_s \geq 2f_0$



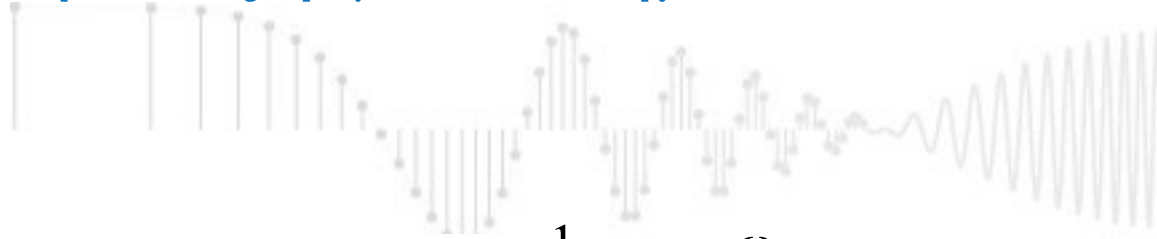
Είναι προφανές ότι ισχύει  $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} X_a\left(j\frac{\omega}{T_s}\right), |\omega| \leq \pi$

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

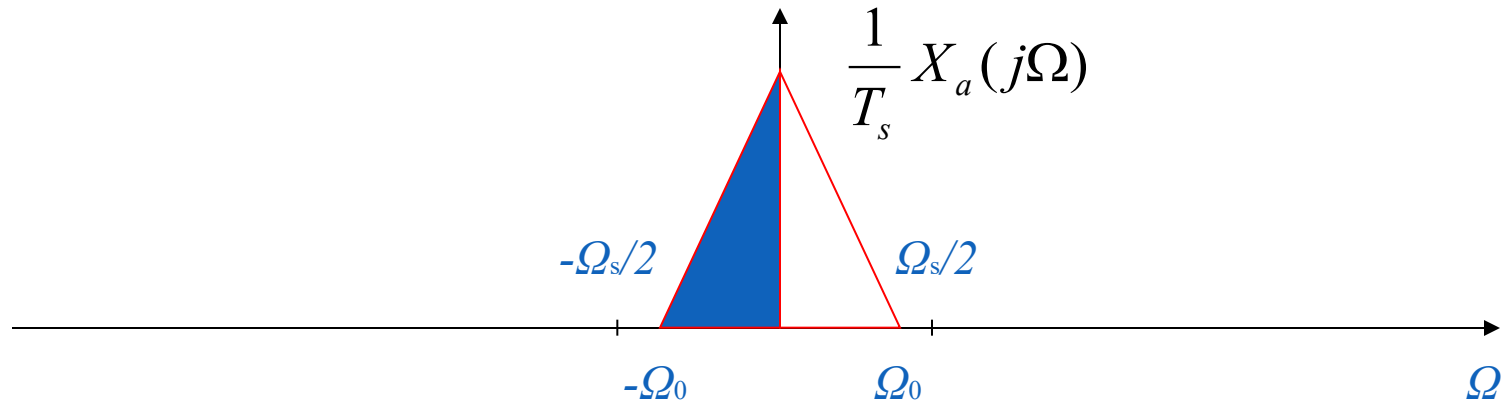
Επομένως αν ορίσουμε την συνάρτηση:  $P(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$



# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή



$$\text{Επομένως: } X(e^{j\omega}) P(\omega) = \frac{1}{T_s} X_a(j\frac{\omega}{T_s})$$



# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

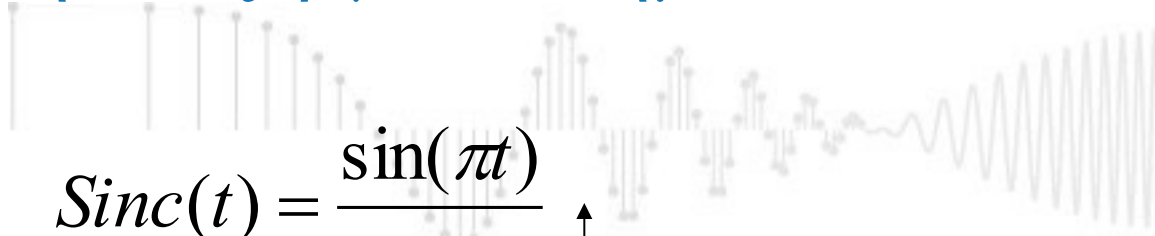
Επομένως:

$$x_a(t) = \text{ICTFT}\{X_a(j\Omega)\} = \text{ICTFT}\{T_s X(e^{j\omega})P(\omega)\}$$

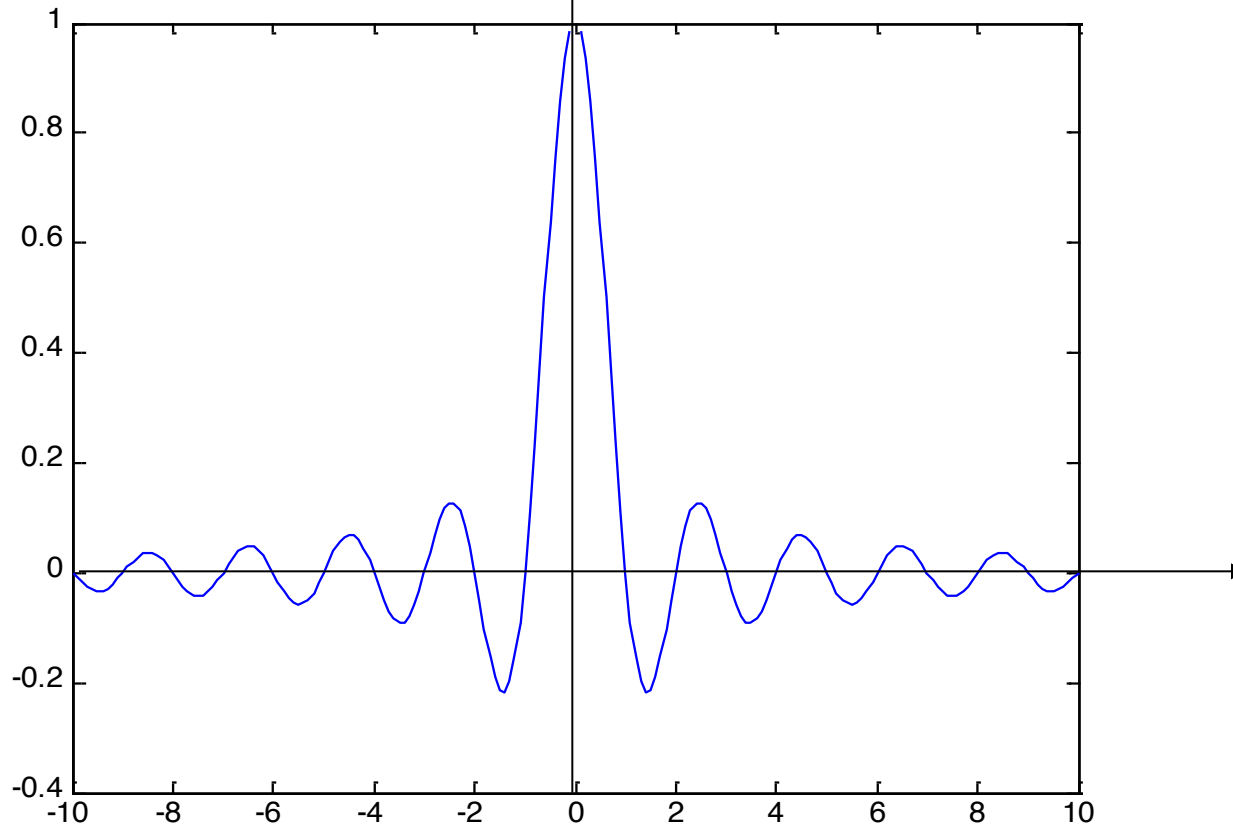
ή ισοδύναμα:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin\left(\left(\frac{t}{T_s} - n\right)\pi\right)}{\left(\frac{t}{T_s} - n\right)\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \text{Sinc}\left(\left(\frac{t}{T_s} - n\right)\right)$$

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή



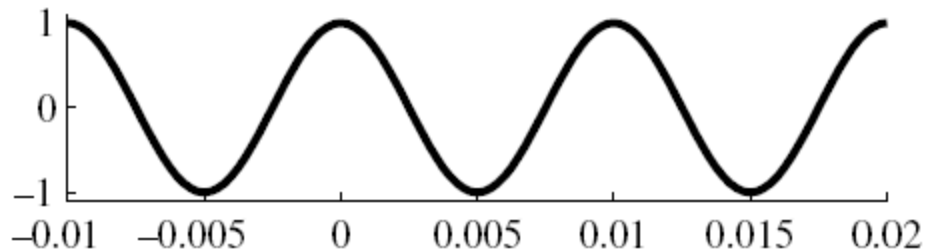
$$\text{Sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



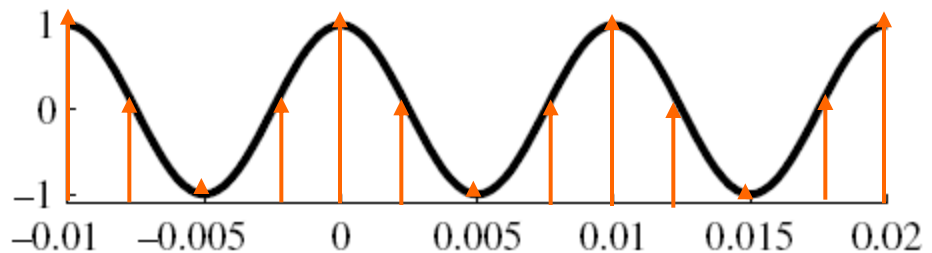
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

## Δειγματοληψία & Διαμόρφωση Αναλογικών Σημάτων

Αρχικό Σήμα:

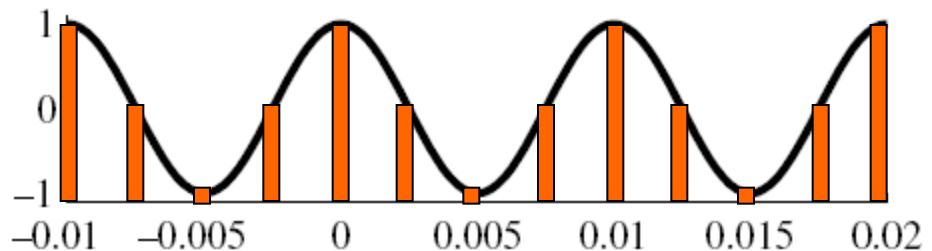


Ιδανική Δειγματοληψία:



Πραγματική Δειγματοληψία

(PAM):

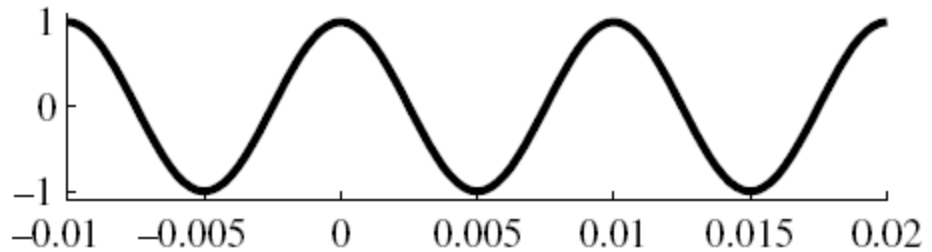


# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

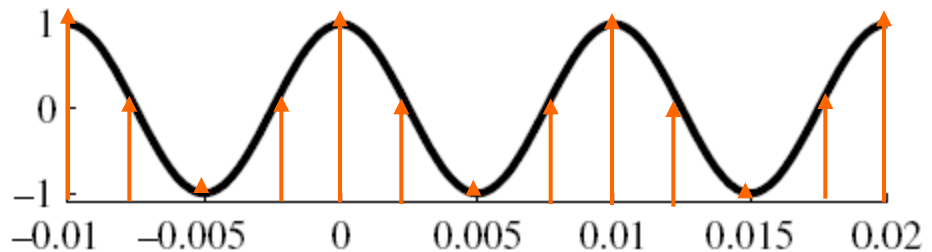
Δειγματα



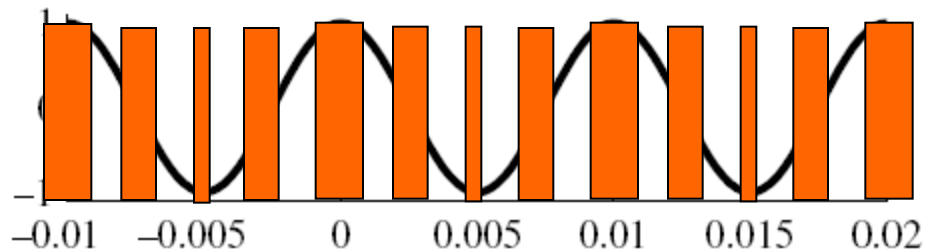
Αρχικό Σήμα:



Ιδανική Δειγματοληψία:



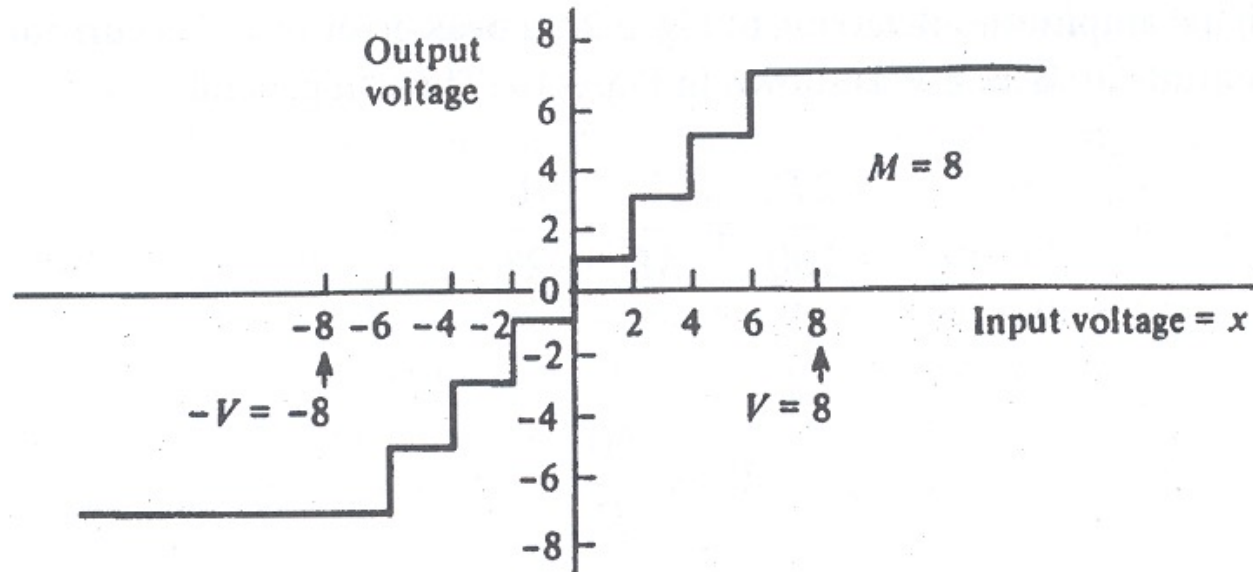
PWM:



# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Δειγματοληψία & Διαμόρφωση Αναλογικών Σημάτων

Χαρακτηριστική Κβαντιστή:

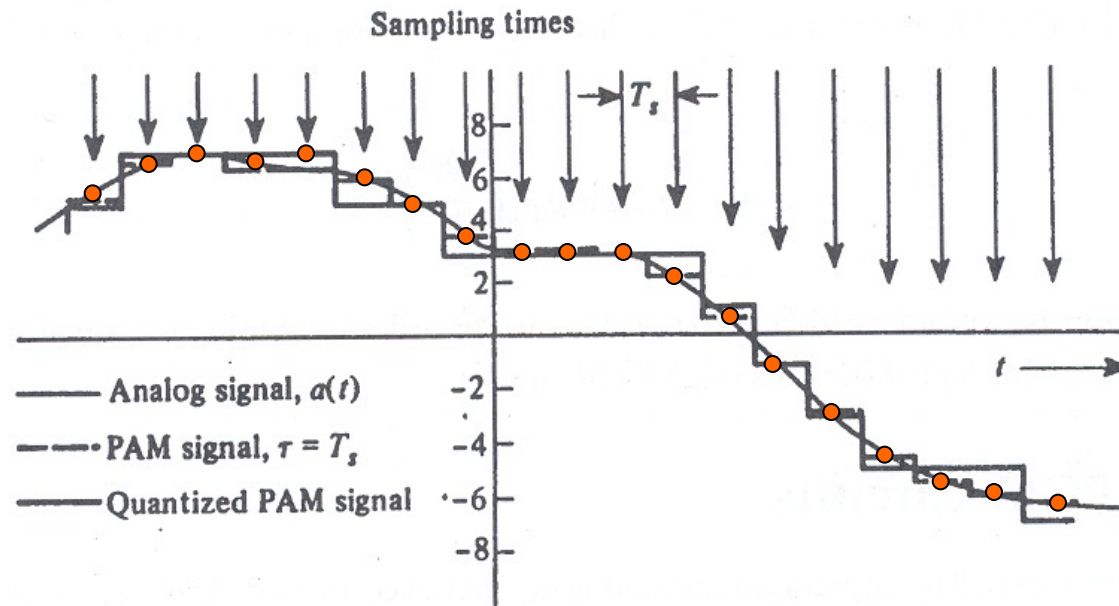




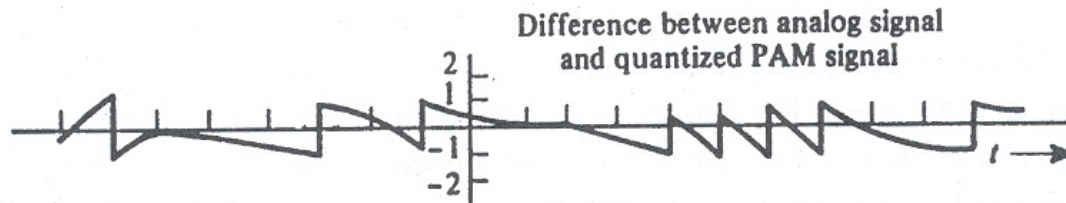
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Δειγματοληψία & Διαμόρφωση Αναλογικών Σημάτων

Αρχικό Σήμα –PAM-QPAM:



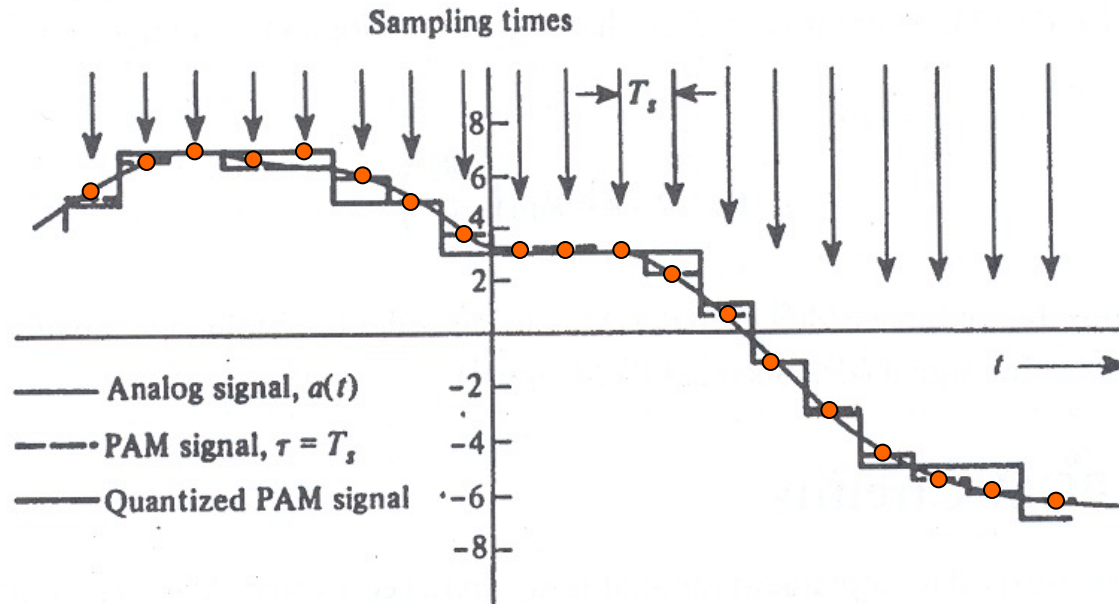
Σφάλμα:



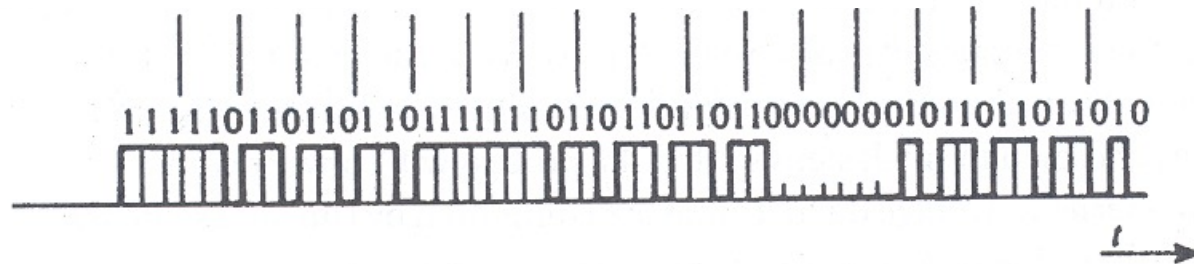
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Δειγματοληψία & Διαμόρφωση Αναλογικών Σημάτων

Αρχικό Σήμα –PAM-QPAM:

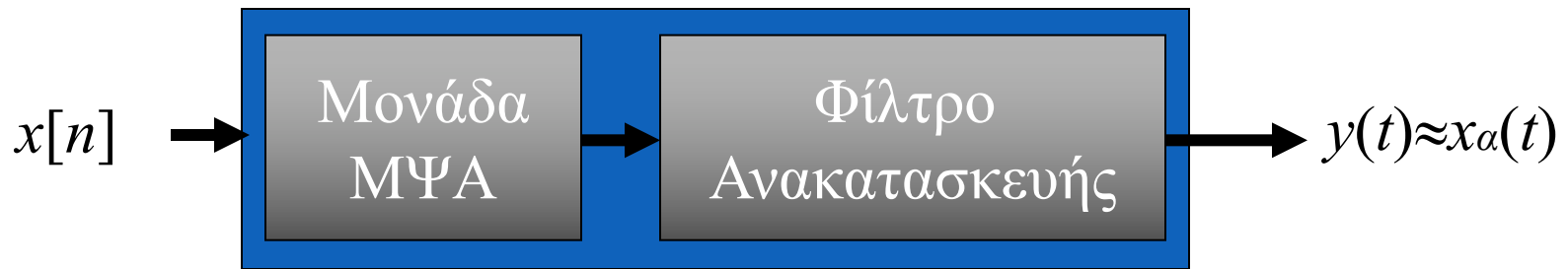


Σήμα PCM:



# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Προσεγγιστική Ανακατασκευή:



$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \phi\left(\frac{t}{T_s} - n\right)$$

όπου  $\phi(t)$  μια συνάρτηση πεπερασμένης χρονικής διάρκειας

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Προσεγγιστική Ανακατασκευή με χρήση *B-spline*:

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 0.5 \\ 1/2, & |t| = 1/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad \Phi_0(j\Omega) = \frac{\sin(\Omega/2)}{\Omega/2}$$

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \phi_0(t) * \phi_0(t) \quad \Phi_1(j\Omega) = \Phi_0^2(j\Omega)$$

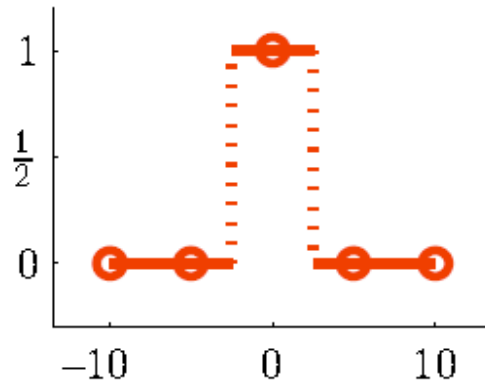
Γενίκευση:

$$\phi_k(t) = \underbrace{\phi_0(t) * \dots * \phi_0(t)}_{k+1} \quad \Phi_k(j\Omega) = \Phi_0^{k+1}(j\Omega)$$

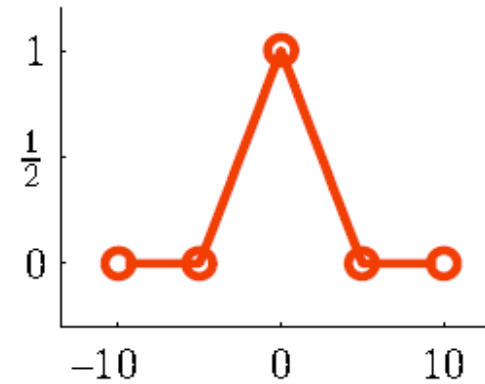
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή



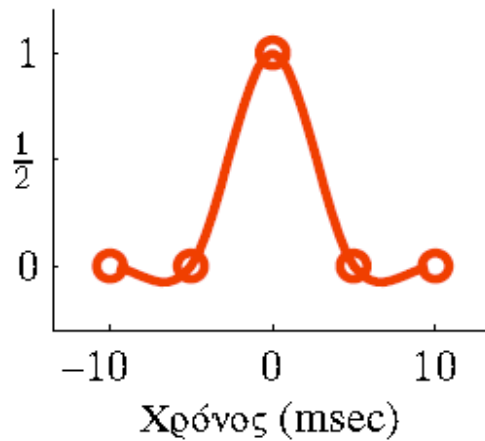
Τετραγωνικός Παλμός



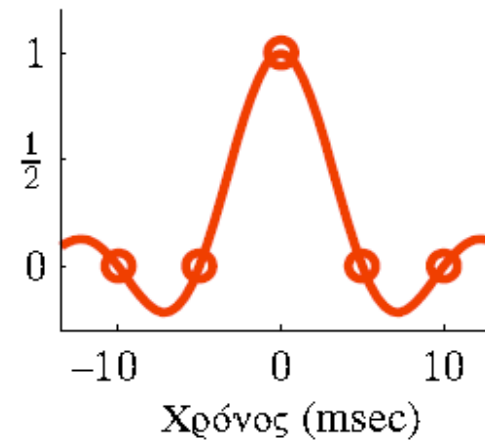
Τριγωνικός Παλμός



Κυβική Spline 2-ης Τάξης



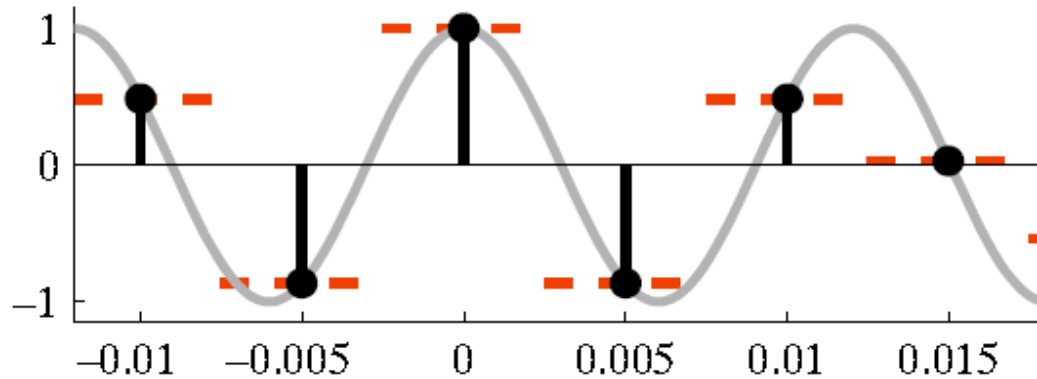
Συνάρτηση sinc



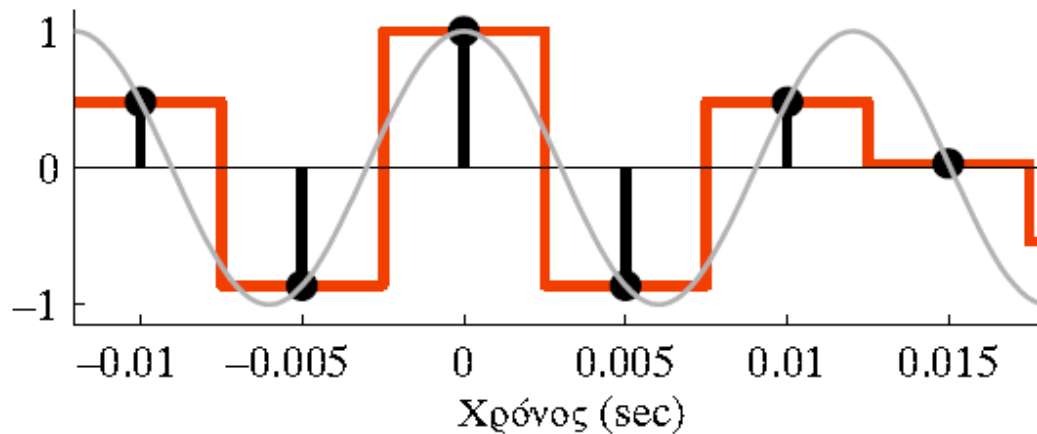
# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή



Ανακατασκευή Μηδενικής-Τάξης:  $f_0 = 83$ ,  $f_s = 200$  Hz

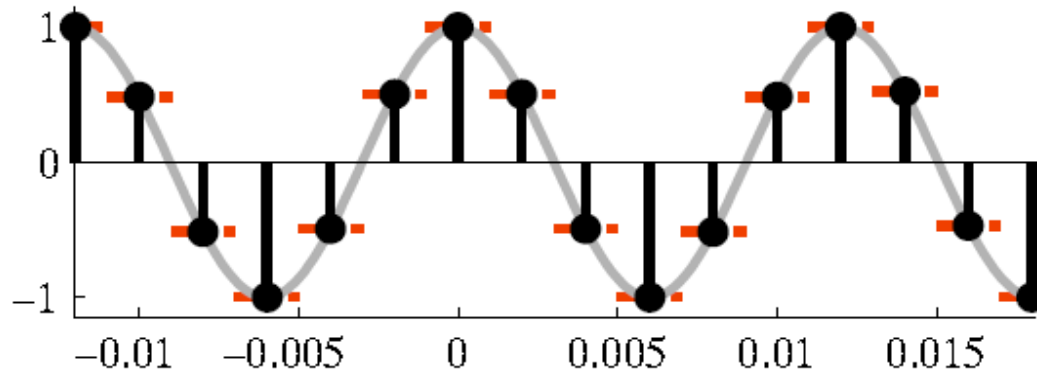


Αρχική και Ανακατασκευασθείσα Κυματομορφή

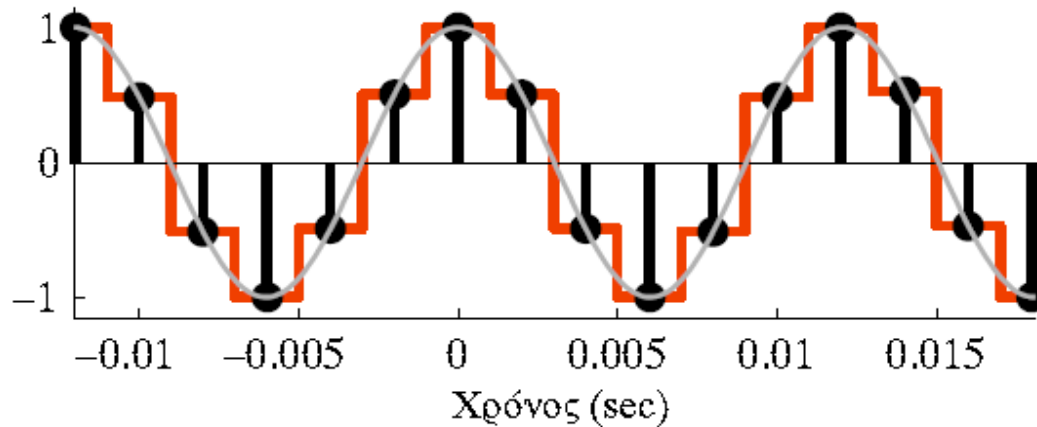


# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Ανακατασκευή Μηδενικής-Τάξης:  $f_0 = 83$ ,  $f_s = 500$  Hz

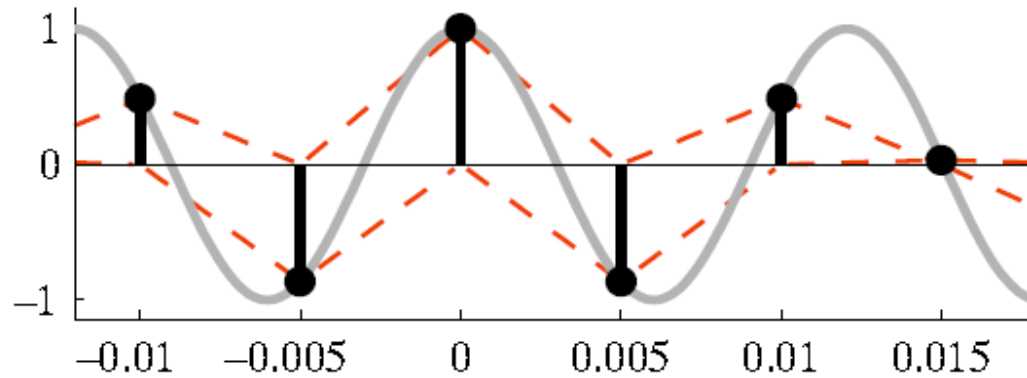


Αρχική και Ανακατασκευασθείσα Κυματομορφή

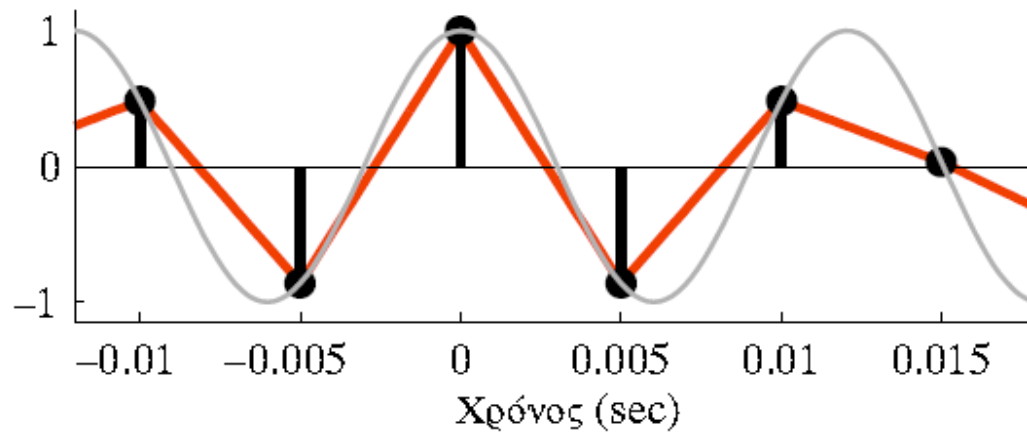


# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Ανακατασκευή Πρώτης-Τάξης:  $f_0 = 83$ ,  $f_s = 200$  Hz



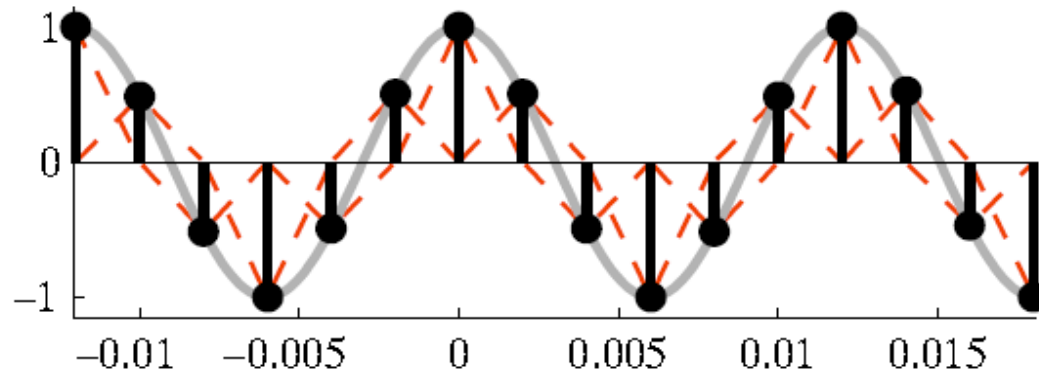
Αρχική και Ανακατασκευασθείσα Κυματομορφή



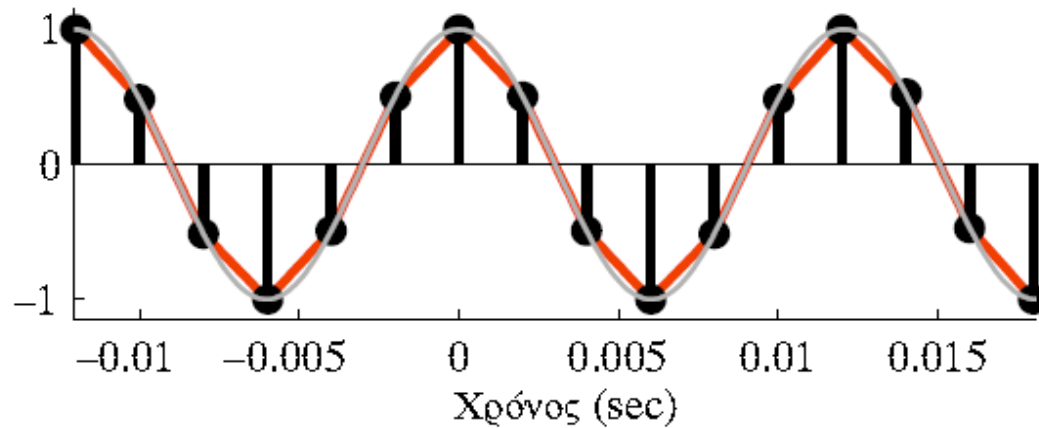


# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Ανακατασκευή Πρώτης-Τάξης:  $f_0 = 83$ ,  $f_s = 500$  Hz

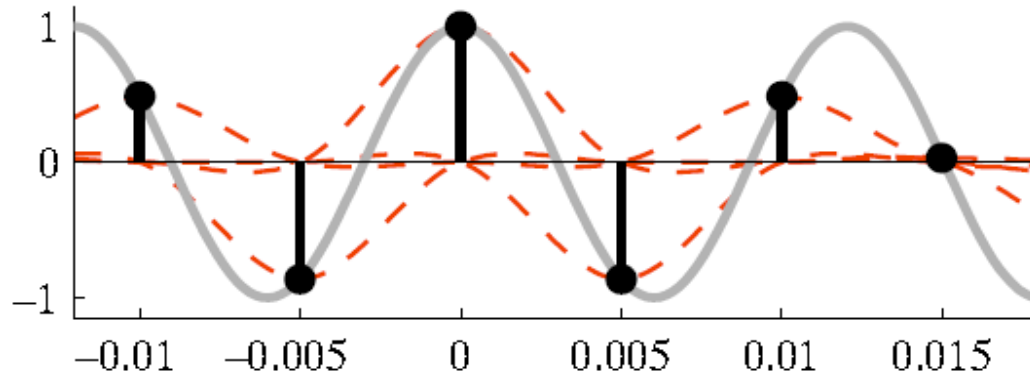


Αρχική και Ανακατασκευασθείσα Κυματομορφή

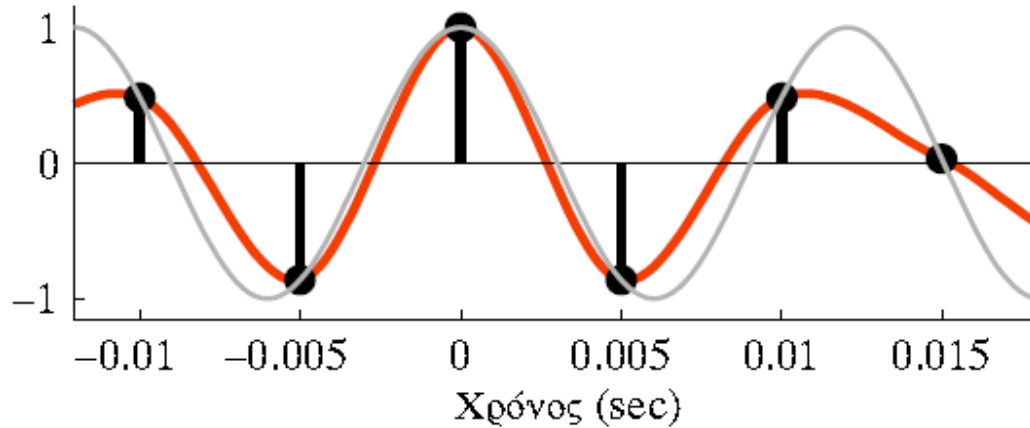


# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Ανακατασκευή με Κυβική-Spline:  $f_0 = 83$ ,  $f_s = 200$  Hz

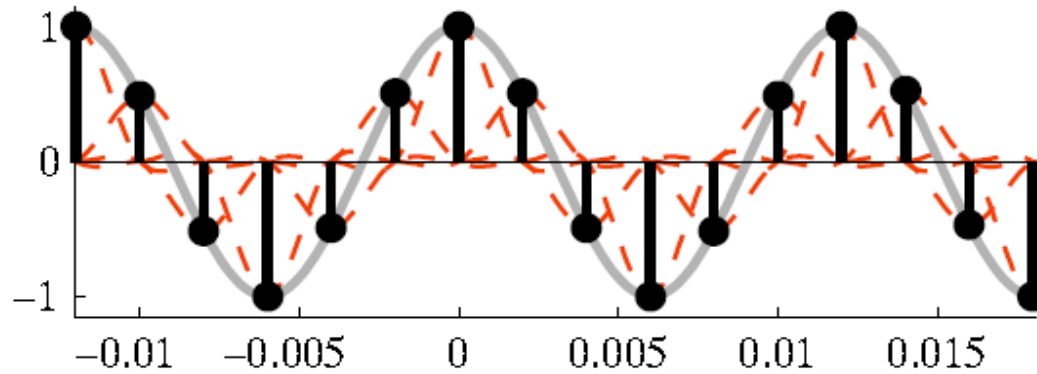


Αρχική και Ανακατασκευασθείσα Κυματομορφή

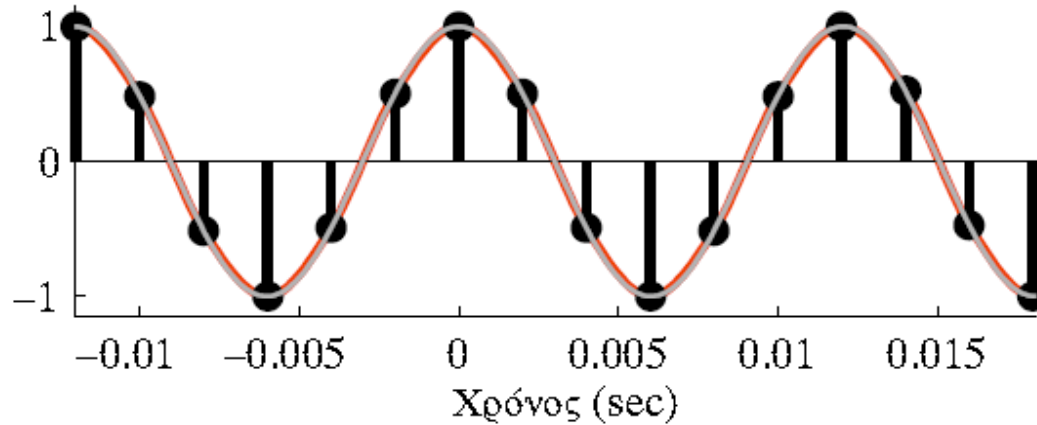


# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

Ανακατασκευή με Κυβική-Spline:  $f_0 = 83$ ,  $f_s = 500$  Hz



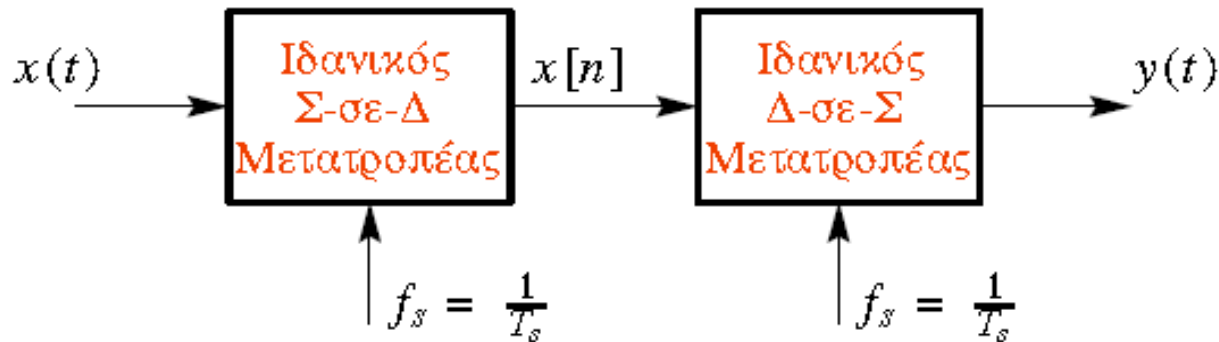
Αρχική και Ανακατασκευασθείσα Κυματομορφή



# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή



*Φαινόμενο Ψευδωνμίας-Αναδίπλωση:*



$$x(t) = \cos(\pi f_s t^2)$$

$$x[n] = \cos(\pi n^2 / f_s)$$

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων-Ανακατασκευή

