



ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

© Μετασχηματισμός-Z

Εμμανουήλ Ζ. Φαράκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Μετασχηματισμός - z



- *Συνεχούς Χρόνου Μετασχηματισμός Fourier*

$$F\{x(t)\} = X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$$

- *Διακριτού Χρόνου Μετασχηματισμός Fourier*

$$F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$

Μετασχηματισμός - z



- *Απόκριση Συχνότητας Συστήματος Συνεχούς Χρόνου*

$$F\{h(t)\} = H(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\Omega t} dt$$

- *Απόκριση Συχνότητας Συστήματος Διακριτού Χρόνου*

$$F\{h[n]\} = H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-jn\omega}$$

Μετασχηματισμός - z



•Ορισμός:

$$Z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=N_0}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z = re^{j\omega}$$

•Αν $N_0 = -\infty$, τότε έχουμε τον **Αμφίπλευρο** Μετασχηματισμό-z

•Αν $N_0 = 0$, τότε έχουμε το **Μονόπλευρο** Μετασχηματισμό-z

Αμφίπλευρος Μετασχηματισμός -z

$$Z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z = re^{j\omega}$$

• Σχέση Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier και Μετασχηματισμού-z

$$F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = F\{x[n]\} = X(e^{j\omega})$$

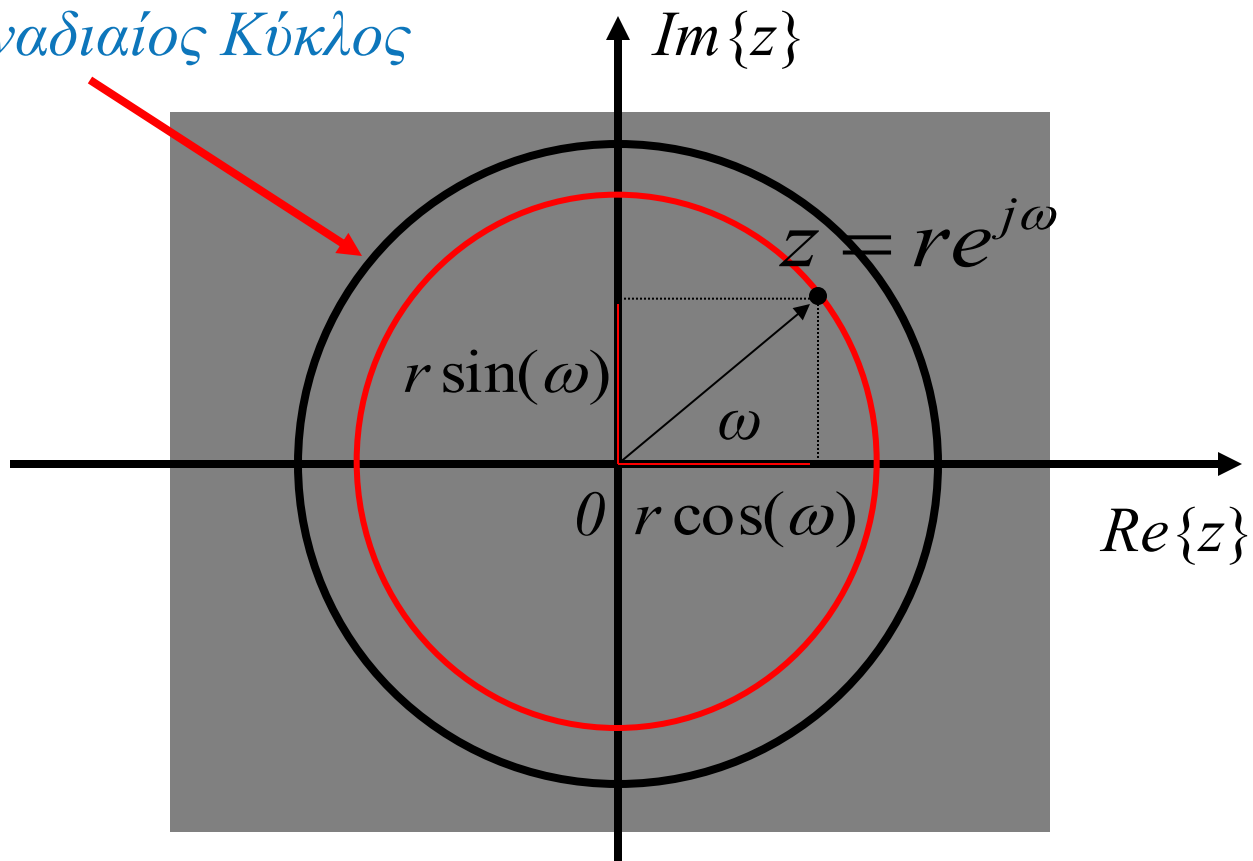
$$X(re^{j\omega}) = F\{x[n]r^{-n}\}$$

Μετασχηματισμός - z



Μιγαδικό Επίπεδο-z

Μοναδιαίος Κύκλος



Μετασχηματισμός - z



Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού

$$x_1[n] = a^n u[n] \quad \overset{z}{\longleftrightarrow} \quad X_1(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

$$x_2[n] = -a^n u[-(n+1)] \quad \overset{z}{\longleftrightarrow} \quad X_2(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|$$

Μετασχηματισμός - z

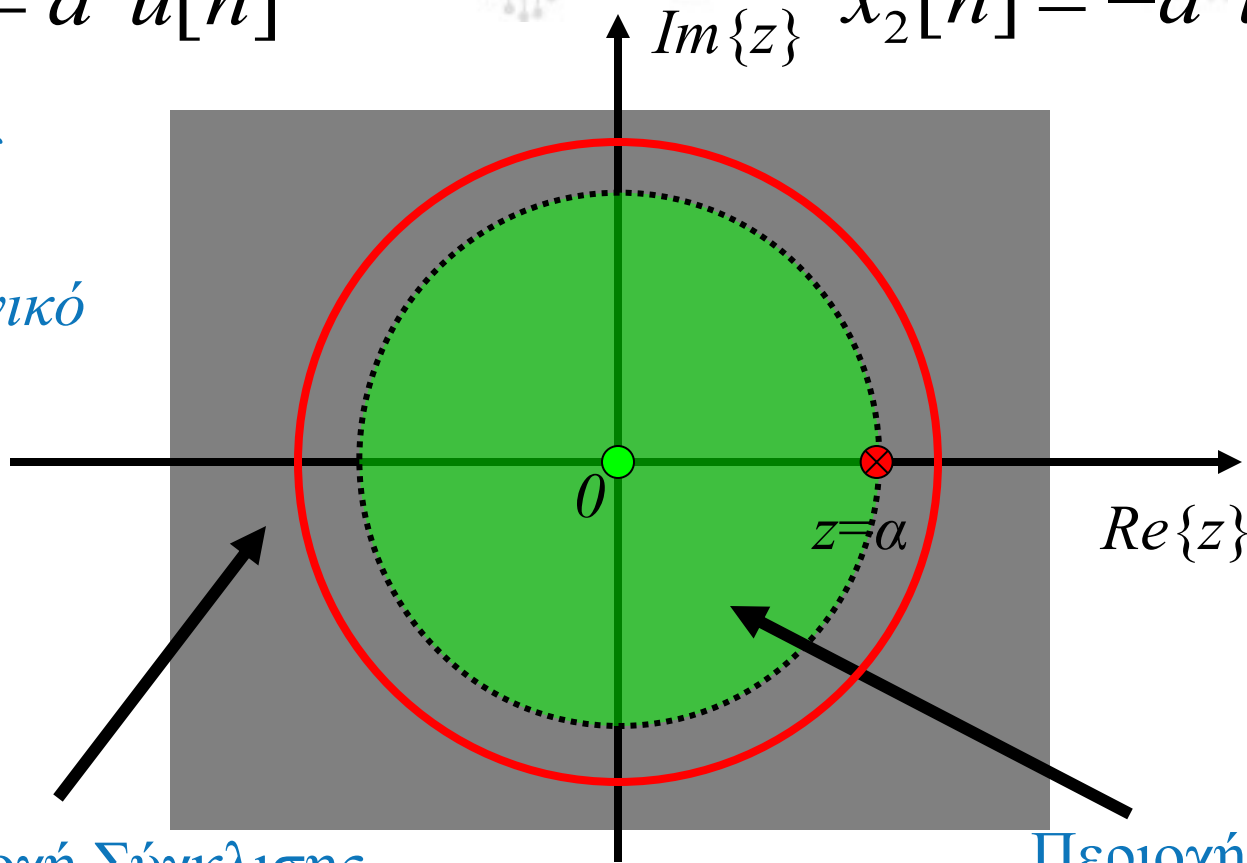
Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού

$$x_1[n] = a^n u[n]$$

$$x_2[n] = -a^n u[-(n+1)]$$

⊗ Πόλος

● Μηδενικό



Περιοχή Σύγκλισης
 $X_1(z) = Z\{x_1[n]\}$
 $|z| > |\alpha|$

Περιοχή Σύγκλισης
 $X_2(z) = Z\{x_2[n]\}$
 $|z| < |\alpha|$

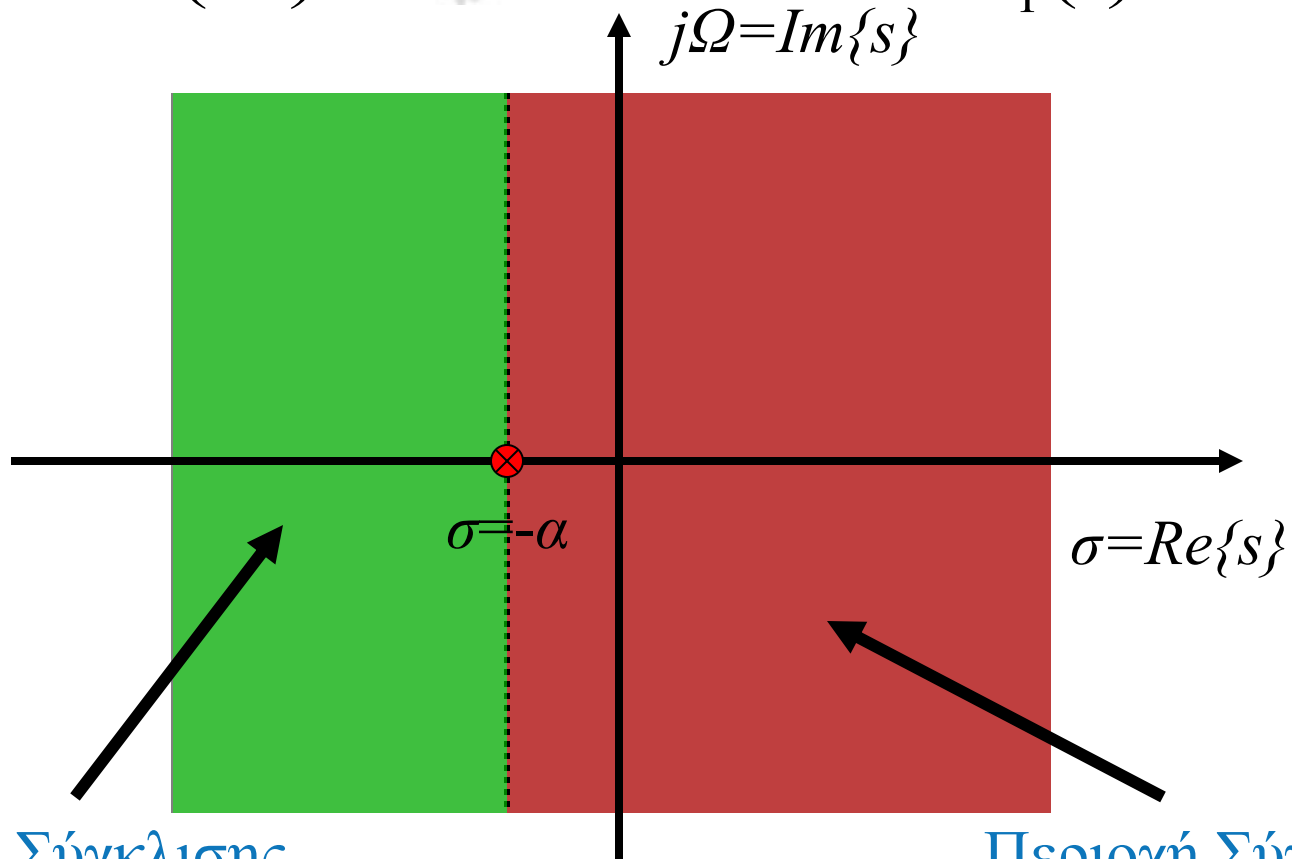
Μετασχηματισμός Laplace

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού

$$x_2(t) = -e^{-at} u(-t)$$

$$x_1(t) = e^{-at} u(t)$$

⊗ Πόλος



Περιοχή Σύγκλισης
 $X_2(s) = L\{x_2(t)\}$
 $\sigma = \text{Re}\{s\} < -\alpha$

Περιοχή Σύγκλισης
 $X_1(s) = L\{x_1(t)\}$
 $\sigma = \text{Re}\{s\} > -\alpha$

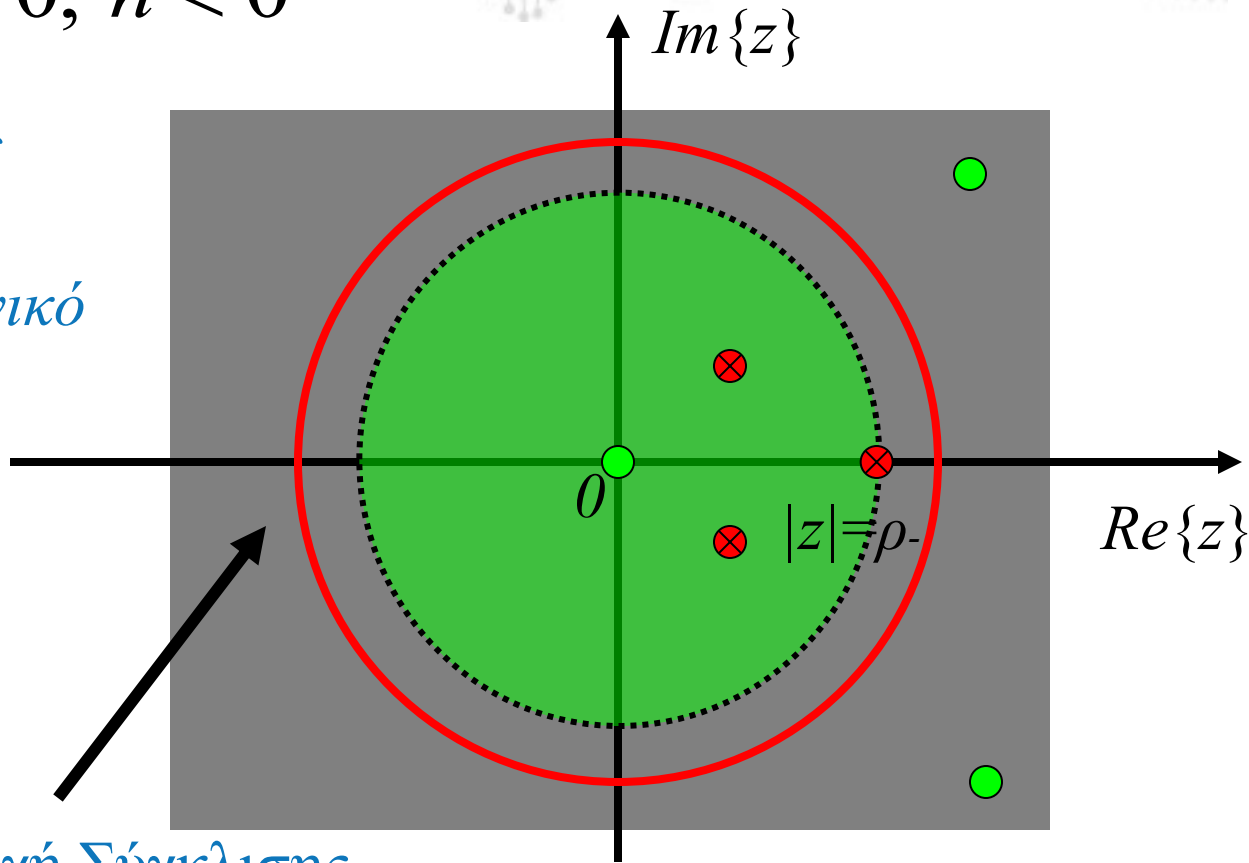
Μετασχηματισμός - z

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού-z Αιτιατών Σημάτων

$$x[n] = 0, n < 0$$

⊗ Πόλος

● Μηδενικό



Περιοχή Σύγκλισης
 $X(z) = Z\{x[n]\}$
 $|z| > \rho$

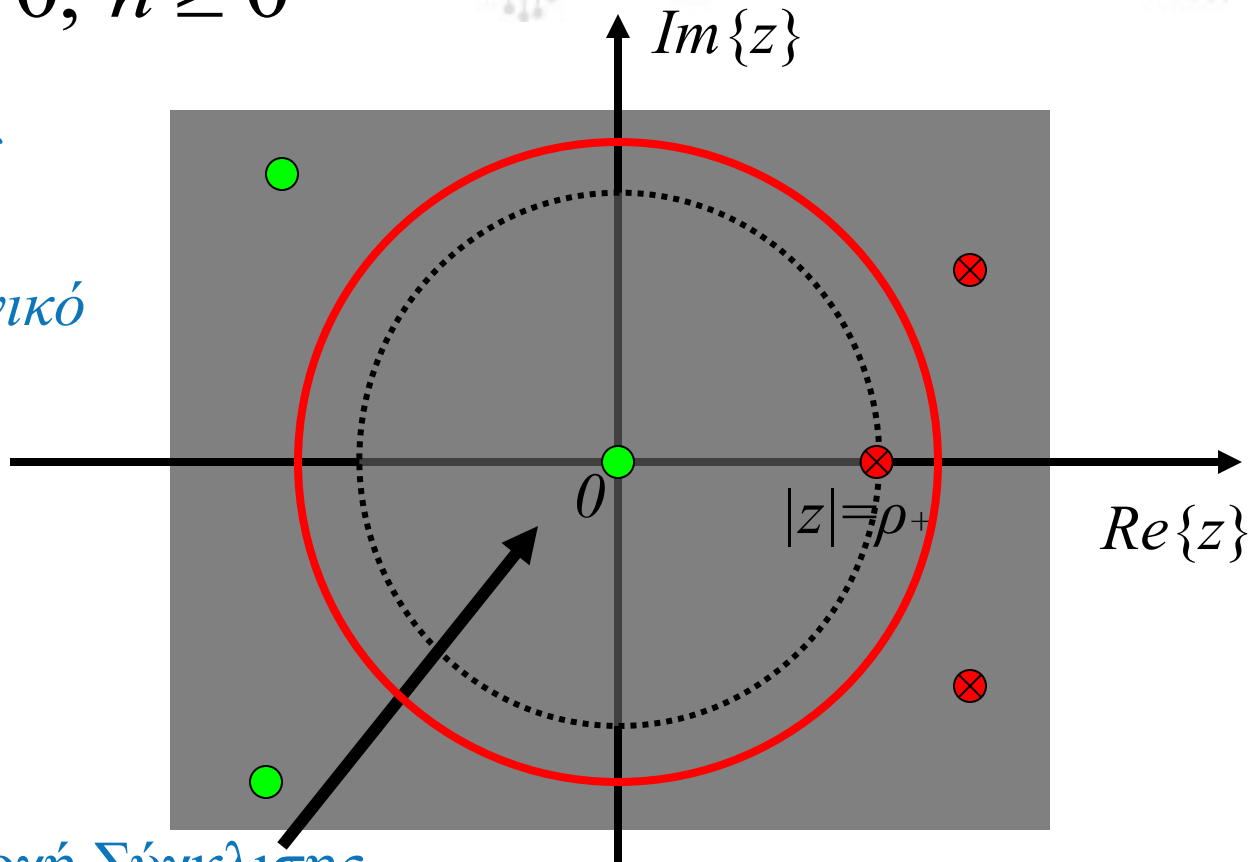
Μετασχηματισμός - z

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού-z Μη-Αιτιατών Σημάτων

$$x[n] = 0, n \geq 0$$

⊗ Πόλος

● Μηδενικό



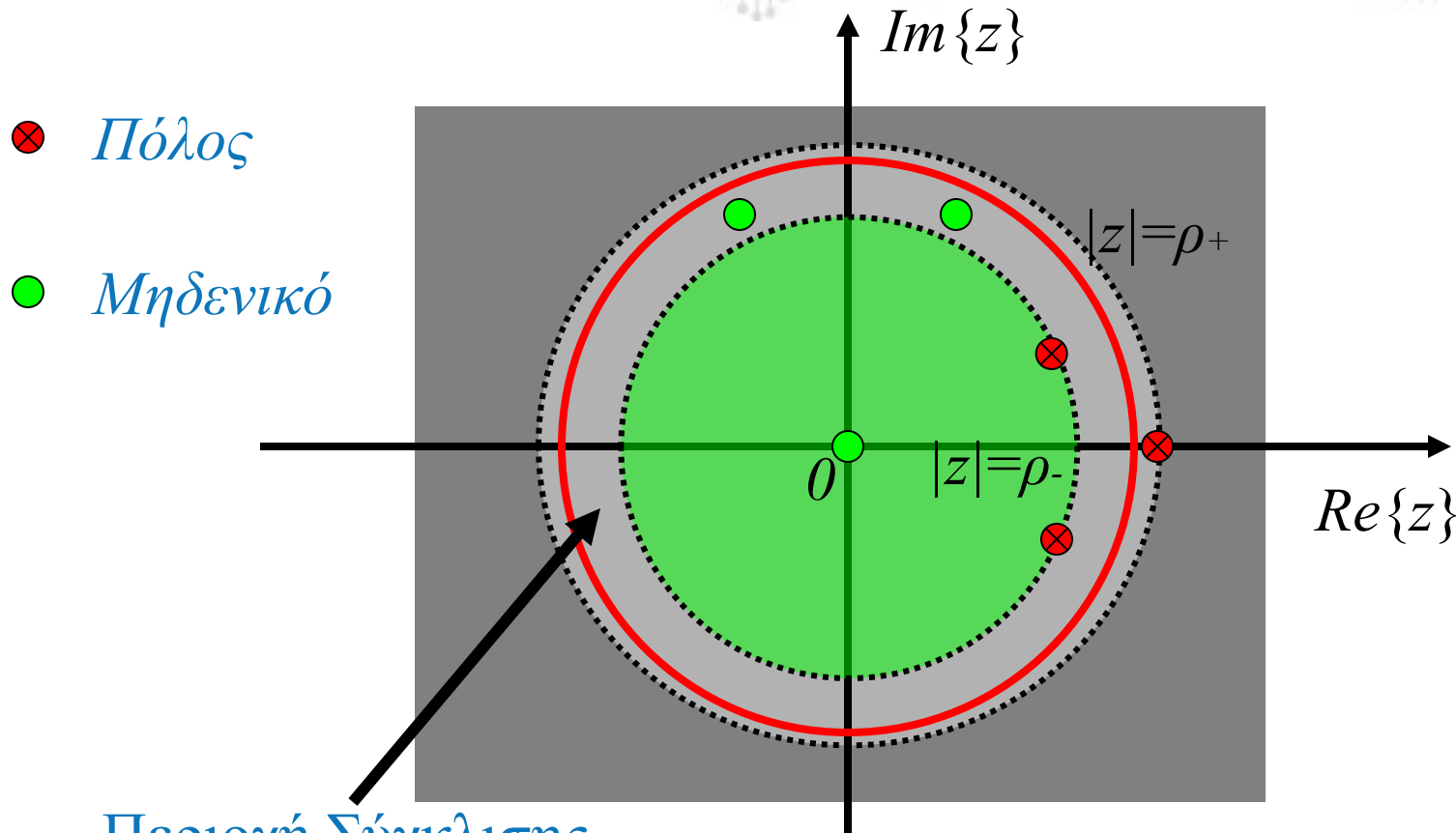
Περιοχή Σύγκλισης

$$X(z) = Z\{x[n]\}$$

$$|z| < \rho_+$$

Μετασχηματισμός - z

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού-z Αμφίπλευρων Σημάτων



⊗ Πόλος

● Μηδενικό

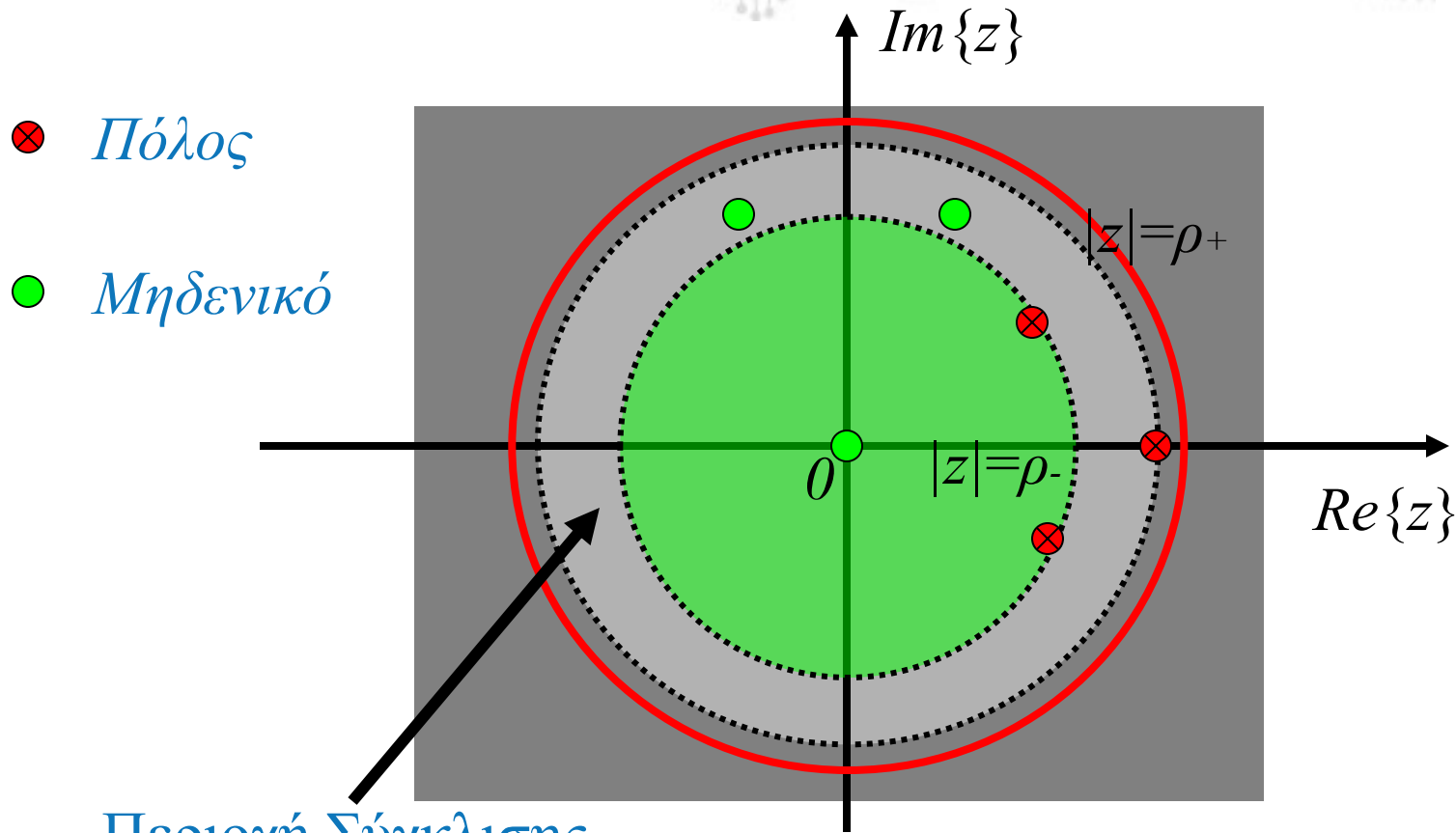
Περιοχή Σύγκλισης

$$X(z) = Z\{x[n]\}$$

$$\rho_+ > |z| > \rho_-$$

Μετασχηματισμός - z

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού-z & Ευστάθεια



Περιοχή Σύγκλισης

$$X(z) = Z\{x[n]\}$$

$$\rho_+ > |z| > \rho_-$$

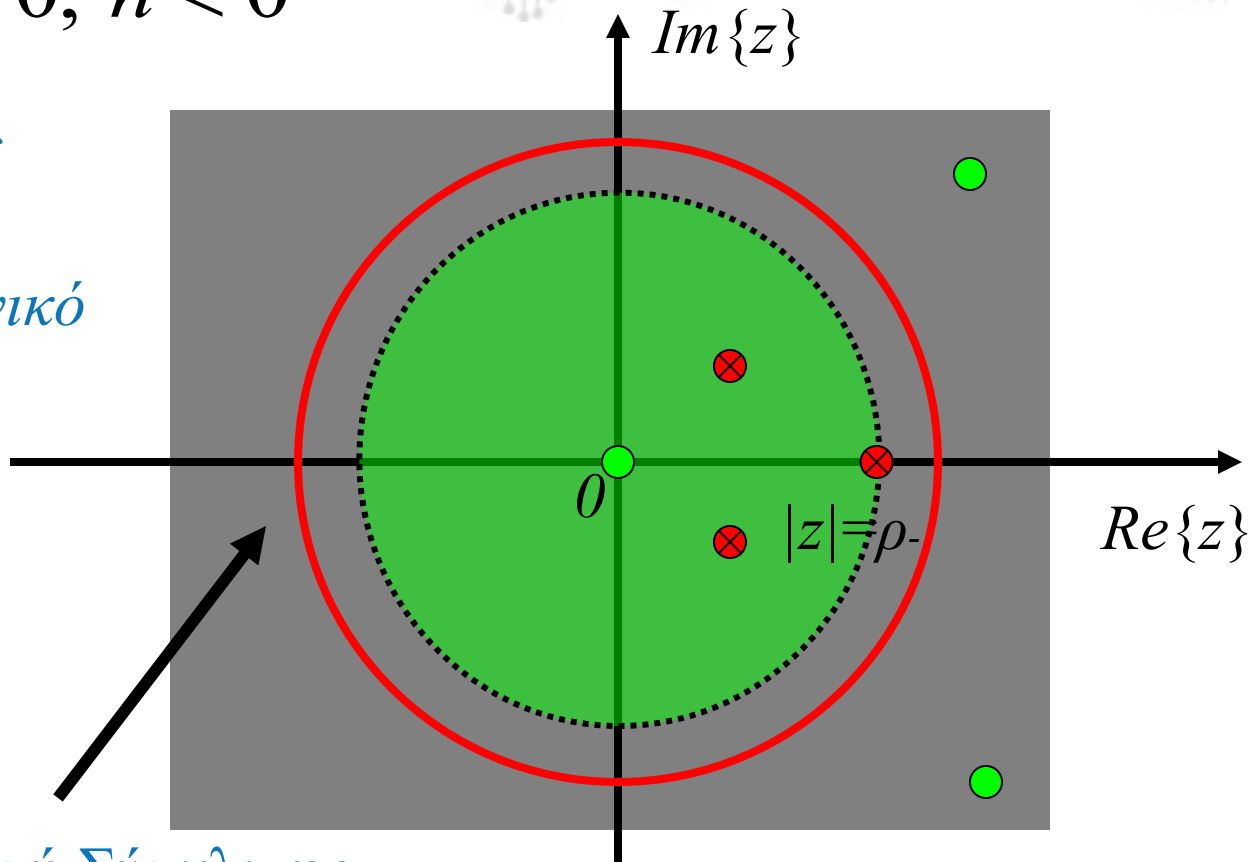
Μετασχηματισμός - z

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού-z Αιτιατότητα & Ευστάθεια

$$x[n] = 0, n < 0$$

⊗ Πόλος

● Μηδενικό



Περιοχή Σύγκλισης

$$X(z) = Z\{x[n]\}$$

$$|z| > \rho-$$

Μετασχηματισμός - z



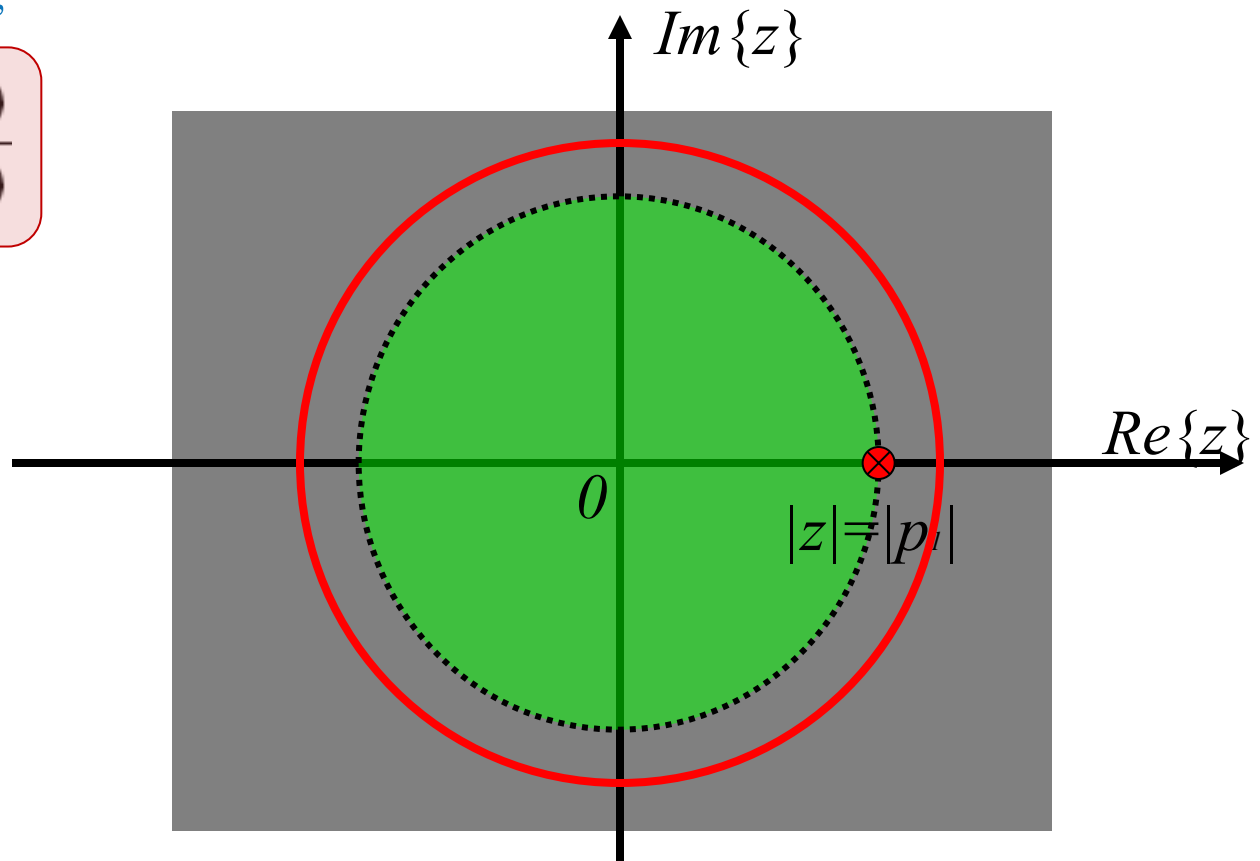
Μετασχηματισμός-z Αιτιατών & Ευσταθών Συστημάτων Πρώτης τάξης

Συνάρτηση Μεταφοράς

$$H(z) = G \frac{(z - z_1)}{(z - p_1)}$$

⊗ Πόλος

● Μηδενικό



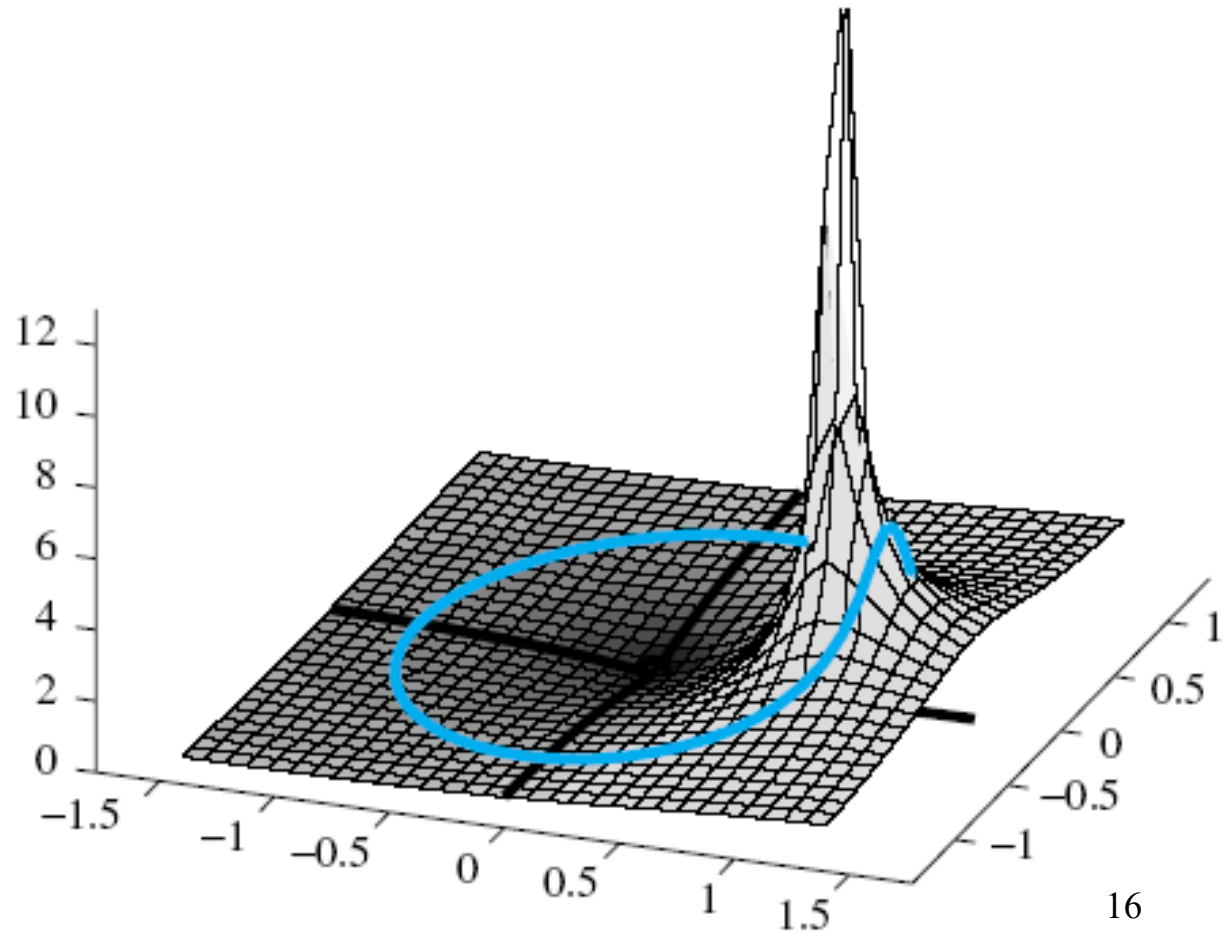
Μετασχηματισμός - z

Μετασχηματισμός-z Αιτιατών & Ευσταθών Συστημάτων Πρώτης τάξης

Μέτρο Μετασχηματισμού-z & Απόκριση Συχνότητας

Παράδειγμα

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}}$$



Μετασχηματισμός - z



Μετασχηματισμός-z Αιτιατών & Ευσταθών Συστημάτων Δεύτερης τάξης

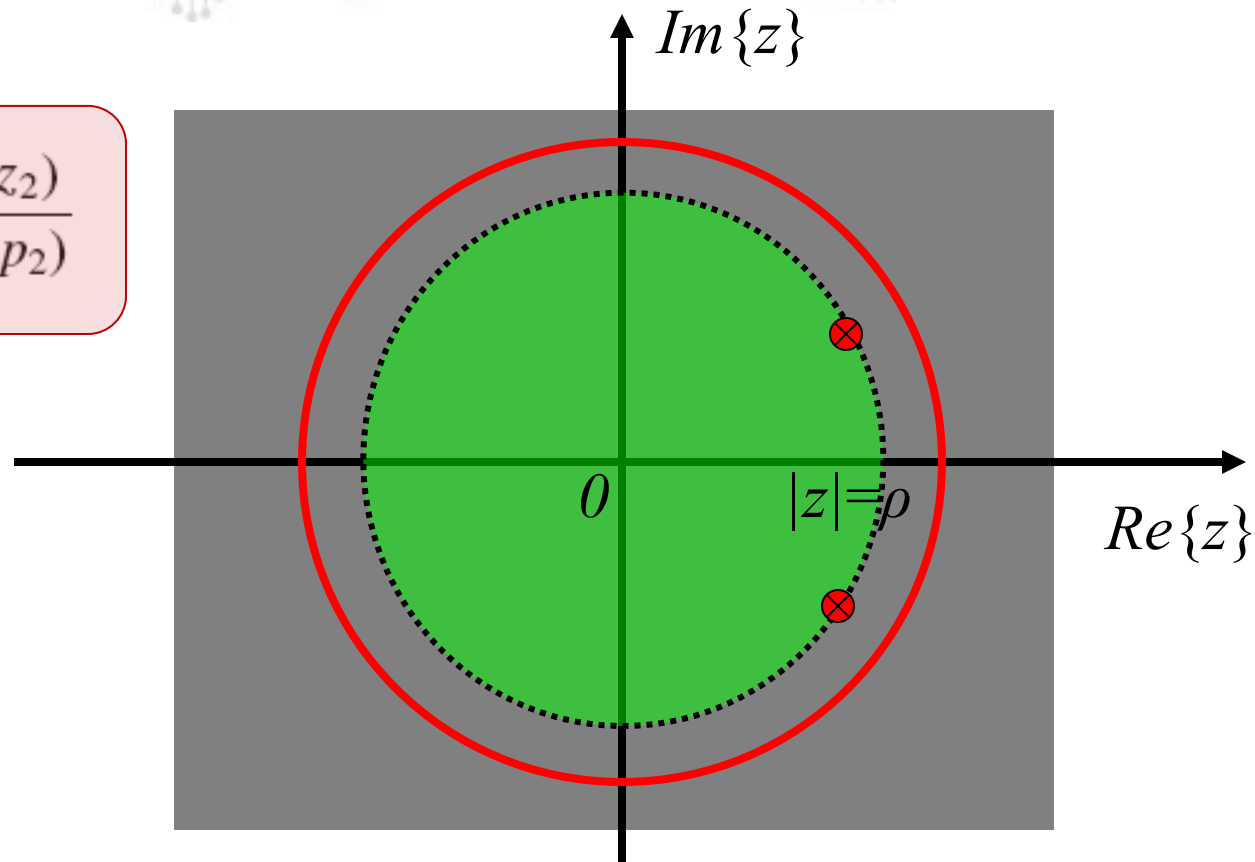
Συνάρτηση Μεταφοράς

$$H(z) = G \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

$$\rho = \max \{|p_1|, |p_2|\}$$

⊗ Πόλος

● Μηδενικό



Μετασχηματισμός - z

Περιοχή Σύγκλισης Μετασχηματισμού-z Αιτιατότητα & Ευστάθεια

Παράδειγμα

$$H(z) = G \frac{(z-1)(z+1)}{(z - .85e^{-j\frac{\pi}{2}})(z - .85e^{j\frac{\pi}{2}})}$$

Μέτρο Μετασχηματισμού-z & Απόκριση Συχνότητας

