

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

- ◎ Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου
- ◎ “Συνάρτηση δέλτα”
- ◎ Κατανομές

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης

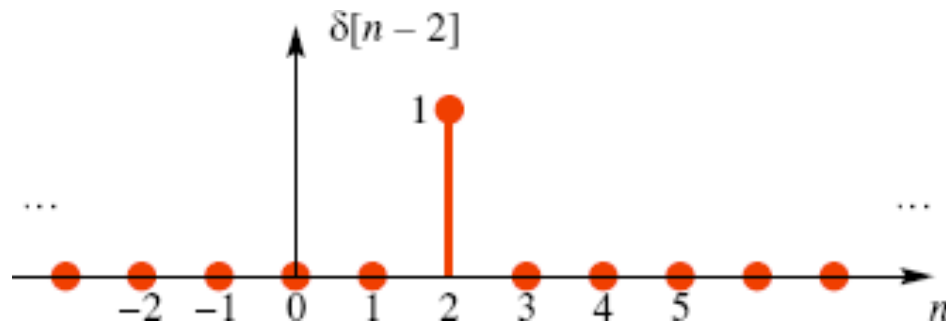
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Περιγραφή Σημάτων Διακριτού Χρόνου

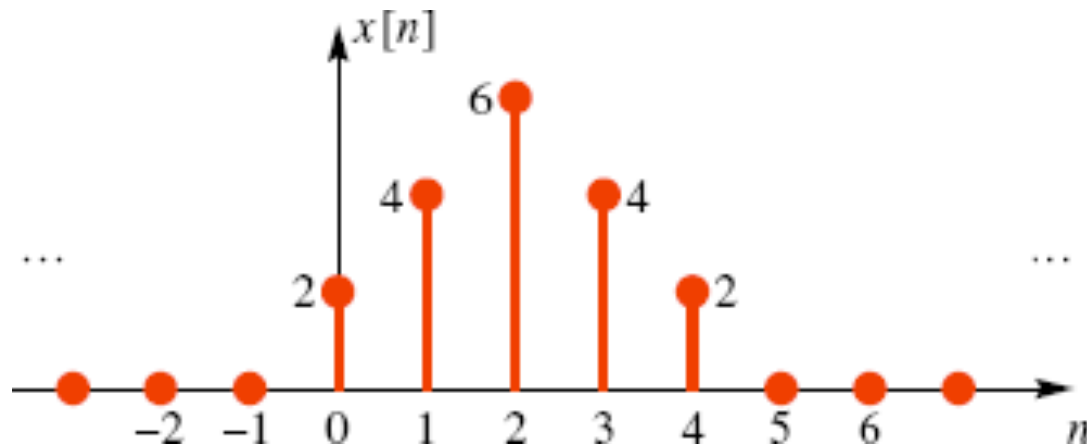
Η Ακολουθία Kronecker:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



Περιγραφή Σημάτων Διακριτού Χρόνου

και η χρήση της στην αναπαράσταση των σημάτων διακριτού χρόνου.



$$x[n] = 2\delta[n] + 4\delta[n - 1] + 6\delta[n - 2] \\ + 4\delta[n - 3] + 2\delta[n - 4]$$

Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Ποιά είναι η Συνάρτηση που αποτελεί, στο συνεχή χρόνο, το ανάλογο της Ακολουθίας Kronecker;

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{OXI!}$$

Ορισμός «Συνάρτησης» δέλτα από τον Dirac:

$$\delta(t) = 0 \quad \text{για } t \neq 0$$

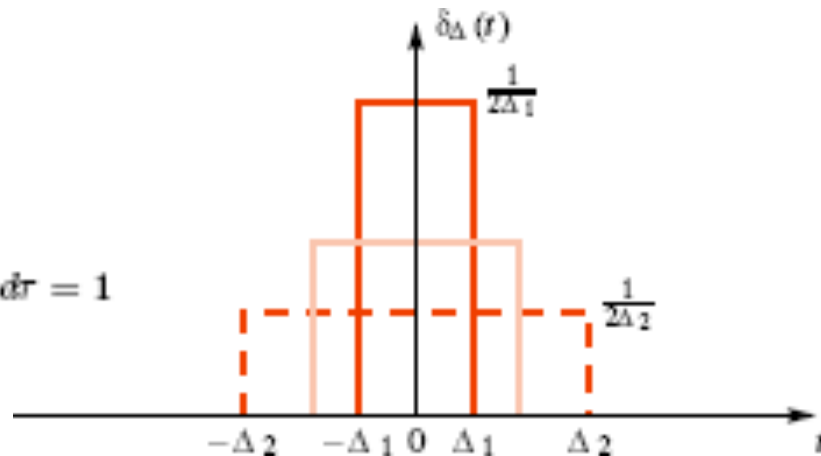
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Η «Συνάρτηση» δέλτα ως όριο ακολουθίας συναρτήσεων:

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta} & -\Delta < t < \Delta \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι $\forall \Delta$ ισχύει: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\Delta}(\tau) d\tau = 1$



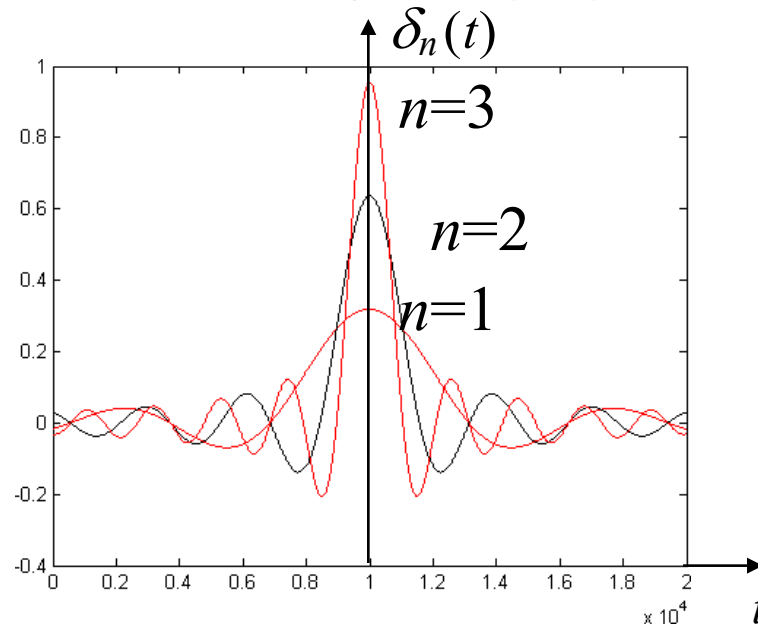
Μπορούμε να ορίσουμε την «Συνάρτηση» δέλτα ως ακολούθως: $\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$

Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Η «Συνάρτηση» δέλτα ως όριο ακολουθίας συναρτήσεων:

$$\delta_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\pi t}, n = 1, 2, \dots$$

$$\forall n \text{ ισχύει: } \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(\tau) d\tau = 1$$



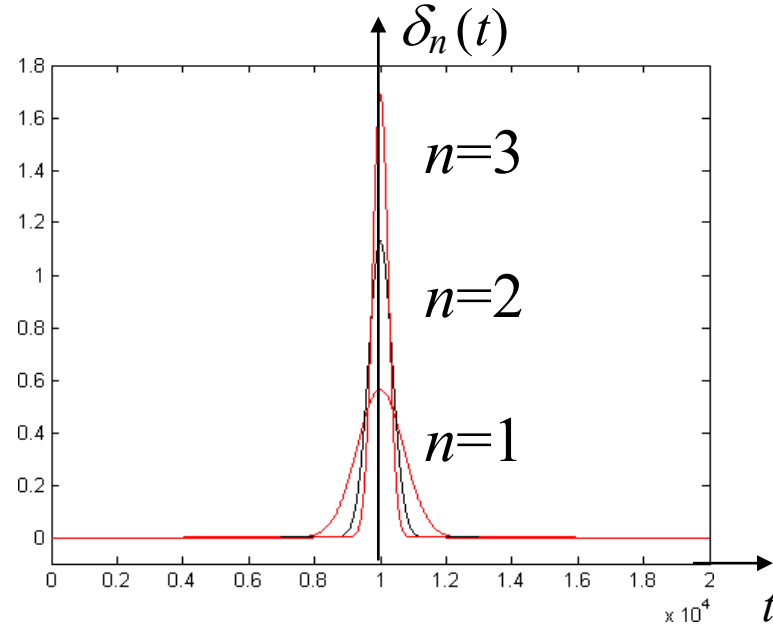
Μπορούμε να ορίσουμε την «Συνάρτηση» δέλτα ως ακολούθως: $\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t)$

Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Η «Συνάρτηση» δέλτα ως όριο ακολουθίας συναρτήσεων:

$$\delta_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2}, n = 1, 2, \dots$$

$$\forall n \text{ ισχύει: } \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(\tau) d\tau = 1$$



Μπορούμε να ορίσουμε την «Συνάρτηση» δέλτα ως ακολούθως: $\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t)$

Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Γενικευμένες Συναρτήσεις ή Συναρτησοειδή.

Έστω $\phi(t)$ συνάρτηση που ανήκει σε μία κλάση την οποία θα ονομάζουμε κλάση «συναρτήσεων δοκιμών». Αν το εσωτερικό γινόμενο:

$$\tau(\phi) = \langle \tau, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t) \phi(t) dt$$

συγκλίνει, η $\tau(t)$ είναι μία γενικευμένη συνάρτηση, ή συναρτησοειδές, στο χώρο των «συναρτήσεων δοκιμών».

Συναρτησοειδή-Κατανομές.

- Συνέχεια
- Γραμμικότητα

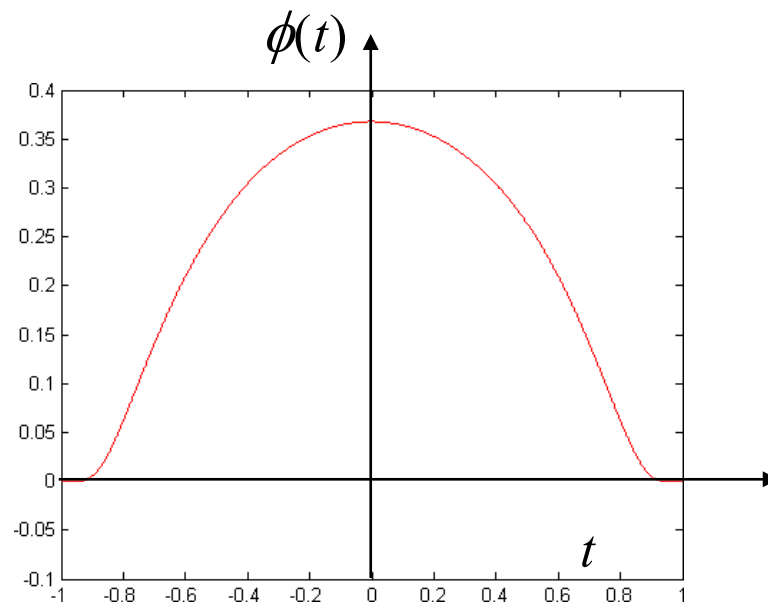
Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Θεωρία κατανομών του Schwartz.

Ο Schwartz θεώρησε ως «**συναρτήσεις δοκιμών**» όλες τις «**απείρως ομαλές**» συναρτήσεις και οι οποίες μηδενίζονται έξω από ένα **πεπερασμένο** διάστημα.

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{|ab|}{(x-a)(x-b)}} & x \in (a, b) \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Το **κλειστό** διάστημα $[a, b]$ ονομάζεται περιοχή υποστήριξης (**support**) της $\phi(t)$.



Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Θεωρία κατανομών του Schwartz.

Ο Schwartz όρισε ότι μια δοκιμαστική συνάρτηση $\phi(t)$ ανήκει στο χώρο δοκιμών D αν:

1. Οι κάθε τάξης παράγωγοι $\phi^{(k)}(t)$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο R .
2. Υπάρχει $T > 0$: $\phi(t) = 0, \forall |t| \geq T$

Όρισε δε την κατανομή ως ακολούθως:

$$\tau(\phi) = \langle \tau, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t) \phi(t) dt$$

όπου $\tau(t)$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Θεωρία κατανομών: Ολίσθηση Κατανομής

$$\tau_{t_0}(\varphi) = \langle \tau_{t_0}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t-t_0)\varphi(t) dt = \tau(\varphi_{t_0})$$

Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Θεωρία κατανομών: Αλλαγή κλίμακας κατανομής

Αν $\hat{\tau}(t) = \tau(at), a \in R$ τότε:

$$\hat{\tau}(\phi) = \langle \hat{\tau}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(at) \phi(t) dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t) \phi\left(\frac{t}{a}\right) dt = \frac{1}{|a|} \tau(\hat{\phi})$$

όπου: $\hat{\phi}(t) = \phi\left(\frac{t}{a}\right)$

Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Θεωρία κατανομών. Πολλαπλασιασμός Κατανομών

Αν $\tau(t)$ κατανομή και $a(t)$ μια συνάρτηση, τότε:

$$\langle \tau a, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\tau(t)a(t))\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t)(a(t)\phi(t))dt = \langle \tau, a\phi \rangle$$

Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Θεωρία κατανομών. Παράγωγος κατανομής

Η παράγωγος μιας κατανομής είναι μια νέα κατανομή

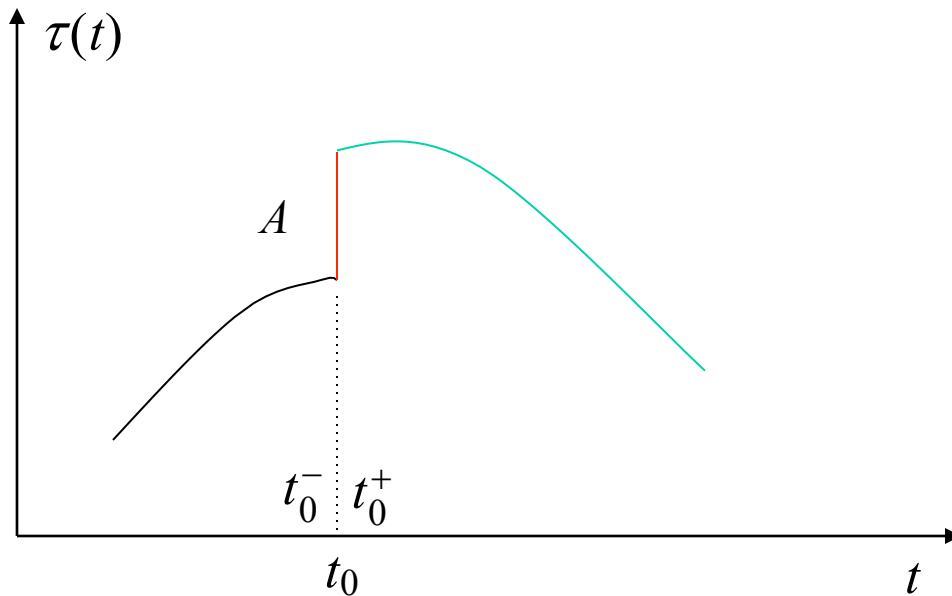
$$\tau^{(1)}(\phi) = \langle \tau^{(1)}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{(1)}(t) \phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t) \phi^{(1)}(t) dt = - \langle \tau, \phi^{(1)} \rangle = -\tau(\phi^{(1)})$$

Γενίκευση

Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Θεωρία κατανομών. Παράγωγος κατανομής

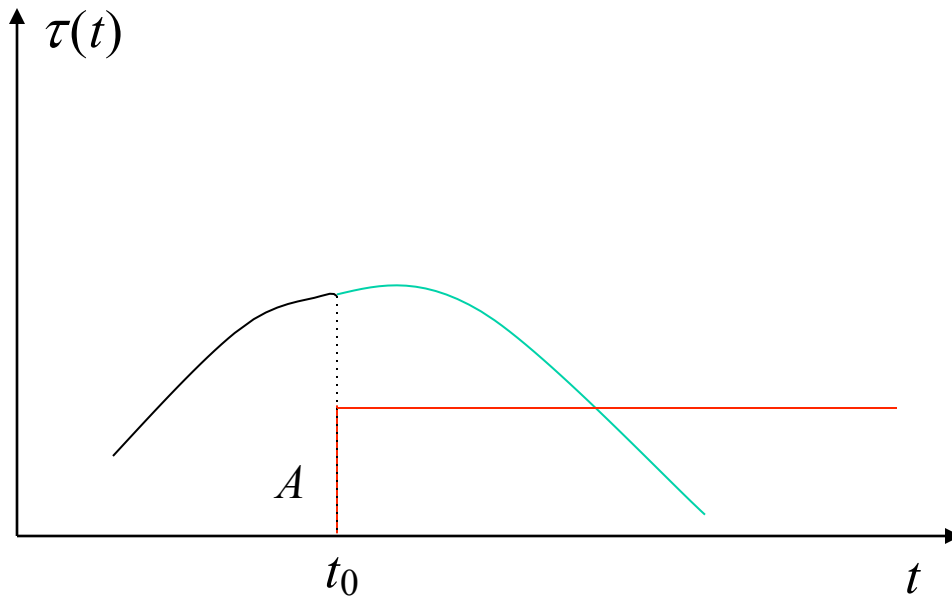
Υπάρχει η παράγωγος μιας ασυνεχούς κατανομής;



Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Θεωρία κατανομών. Παράγωγος κατανομής

Υπάρχει η παράγωγος μιας ασυνεχούς κατανομής;



Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Θεωρία κατανομών. Συνέλιξη κατανομών

$$\begin{aligned} \langle \tau_1 * \tau_2, \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_1(\hat{t}) \tau_2(t-\hat{t}) d\hat{t} \phi(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_1(\hat{t}) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tau_2(t-\hat{t}) \phi(t) dt \right] d\hat{t} \end{aligned}$$

Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Θεωρία κατανομών του Schwartz. Σύγκλιση

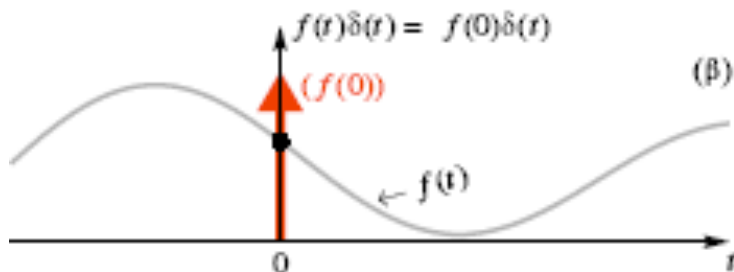
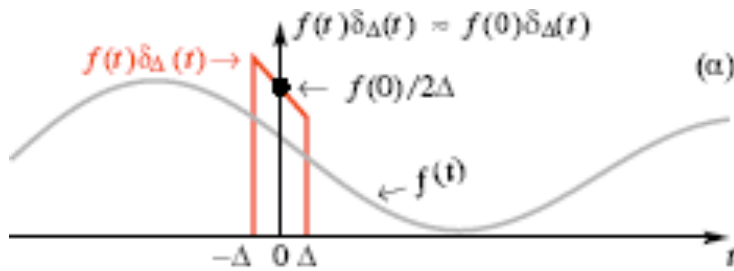
Η ακολουθία κατανομών $\{\tau_n(t)\}_1^\infty$ συγκλίνει στην κατανομή $\tau(t)$ αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_n(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t) \varphi(t) dt, \forall \varphi(t) \in D$$

Περιγραφή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Θεωρία κατανομών του Schwartz.

Μπορούμε να ορίσουμε την Κατανομή Dirac ως ακολούθως: $f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt$



Ορισμός της δέλτα όχι μέσω των τιμών της σε κάθε χρονική στιγμή, αλλά από το σύνολο των βαθμωτών γινομένων της με «συναρτήσεις δοκιμών».

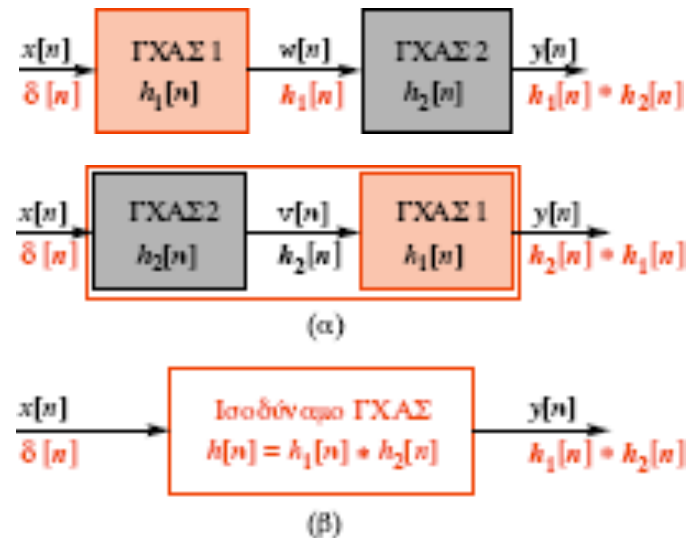
Μαθηματική Περιγραφή Συστημάτων

- Ιδιότητες ΓΧΑ Συστημάτων Συνεχούς Χρόνου.
- Αιτιατότητα
- Απόκριση των ΓΧΑ Συστημάτων σε Φανταστικά Εκθετικά Σήματα
- Μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου Σημάτων
- Συνέλιξη και Μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου Σημάτων
- Ευστάθεια BIBO
- Μετασχηματισμός *-Laplace*

Μαθηματική Περιγραφή Συστημάτων

Ιδιότητες ΓΧΑ Συστημάτων.

Αντιμεταθετική Ιδιότητα $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$



Προσεταιριστική Ιδιότητα $(x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n] = x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n])$